

异向介质谐振响应的 Floquet 模分析*

杨 锐† 谢拥军 李晓峰 蒋 俊 王元源 王 瑞

(西安电子科技大学天线与微波技术国家重点实验室 西安 710071)

(2008 年 5 月 16 日收到, 2008 年 7 月 14 日收到修改稿)

将开口谐振环单元的场分布利用 Floquet 模展开, 从电磁波传播角度揭示了凋落模引起异向介质谐振响应的事实. 数值计算了任意平面电磁波照射下异向介质的传输特性. 研究表明, 对于来自主平面上的垂直或平行极化的入射波, 具有相同极化方式的 Floquet 透射模将发生谐振, 并且磁谐振和电谐振将随着入射角的不同而改变. 而对于来自其他入射平面的电磁波, 两种极化的 Floquet 透射模将共同发生谐振.

关键词: 开口谐振环, 异向介质, Floquet 模, 谐振

PACC: 4110H

1. 引 言

21 世纪以来, 人工复合材料在固体物理、材料科学、光学和应用电磁学领域内获得了愈来愈广泛的应用. 尤其是含有开口谐振环(SRR)结构的异向介质更是引起了各国学者的高度关注^[1-11].

以薄的金属片为原材料, SRR 由两个同心金属开口环组成. 因为结构上的非对称性, SRR 异向介质对于入射场的电磁响应除了电耦合、磁耦合之外, 还存在磁电耦合, 构成了双各向异性介质^[12, 13]. 所以, SRR 结构相对于入射波的摆向需要特别注意, 否则, 其电磁响应将非常复杂. Smith 等^[14]研究了对称和非对称 SRR 平面的电磁特性, Varadan 等^[15]则对 SRR 的开口方向进行了分析, Aydin 等^[16]考虑了无序 SRR 结构对其磁谐振的影响, 而 Gay-Balmaz 等^[17]则对 SRR 结构单元间的耦合效应进行了计算. 迄今为止, 大量的分析模型已经用于研究 SRR 结构的传输特性^[18-20], 对于 SRR 的参数设计也日趋详尽^[21, 22], 但现有理论对于 SRR 异向介质谐振现象的研究多基于单一极化且垂直入射的电磁波, 仅有少量研究如 Gundogdu 等^[23]实验分析了单一极化斜入射电磁波作用下的谐振响应, 而实际工程中更多考虑的却是不同极化方式和入射角度的电磁波与 SRR 异向介质的相互作用.

基于以上考虑, 本文利用 Floquet 模^[24]展开分析了任意平面电磁波照射下异向介质的谐振响应, 并从电磁波传播角度揭示了凋落模引起异向介质谐振响应的事实. 数值计算表明, 对于主平面的入射波, 具有相同极化方式的 Floquet 透射模将发生谐振, 并且磁谐振和电谐振将随着入射角的不同而改变. 对于其他的入射波, 两种极化的 Floquet 透射模将共同发生谐振.

2. 异向介质中 Floquet 模的传播特性

考虑图 1 所示的异向介质, SRR 单元结构沿着 x 和 y 方向以 $dx = 5.6 \text{ mm}$ 和 $dy = 5 \text{ mm}$ 为周期排列. 图 1(a)中 $a = 3 \text{ mm}$, $b = c = d = 0.33 \text{ mm}$, SRR 单元的介质基底 $\epsilon_r = 4.8$. 图 1(b)所示为电磁波作用下的单层 SRR 异向介质, z 方向 SRR 异向介质层的高度为 3.63 mm . 因为空间电磁场满足周期性边界条件时的解由一组 Floquet 模表达, 所以对于 SRR 异向介质, 其散射场 E_S 、透射场 E_T 可以表示为^[25]

$$E_{S(T)} = \sum_{m=1}^2 \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} R_{mpq} (B_{mpq}) \psi_{mpq}, \quad (1)$$

式中 $p = q = 0$ 时对应 Floquet 主模, p 或 q 不等于零时对应 Floquet 高次模. $m = 1$ 时代代表了 TE-Floquet 模, $m = 2$ 时代代表了 TM-Floquet 模. R_{mpq} , B_{mpq} 分别为空气和 SRR 异向介质层界面的反射系数和透射系

* 国家自然科学基金(批准号 60771040)和教育部新世纪优秀人才(批准号 NCET-04-0950)资助的课题.

† E-mail: mattomato811118@yahoo.com.cn

数 ψ_{mpq} 为矢量形式的 Floquet 模并具有以下形式：

$$\psi_{1pq} = \frac{1}{(d_x d_y)^{1/2}} \left(\frac{v_{pq}}{t_{pq}} \hat{x} - \frac{u_{pq}}{t_{pq}} \hat{y} \right) \varphi_{pq} \quad (\text{TE-Floquet 模}), \quad (2a)$$

$$\psi_{2pq} = \frac{1}{(d_x d_y)^{1/2}} \left(\frac{u_{pq}}{t_{pq}} \hat{x} + \frac{v_{pq}}{t_{pq}} \hat{y} \right) \varphi_{pq} \quad (\text{TM-Floquet 模}), \quad (2b)$$

其中，

$$\varphi_{pq} = \exp(-i(u_{pq}\hat{x} + v_{pq}\hat{y} + \gamma_{pq}\hat{z})). \quad (3)$$

假设入射平面电磁波的传播常数为 k ，照射方向为 (θ, ϕ) 则

$$u_{pq} = k \sin\theta \cos\phi + 2\pi p/d_x, \quad (4a)$$

$$v_{pq} = k \sin\theta \sin\phi + 2\pi q/d_y, \quad (4b)$$

$$\gamma_{pq} = (k^2 - t_{pq}^2)^{1/2} \quad (k^2 > t_{pq}^2), \quad (4c)$$

$$\gamma_{pq} = -i | (k^2 - t_{pq}^2)^{1/2} | \quad (k^2 < t_{pq}^2),$$

其中，

$$t_{pq}^2 = u_{pq}^2 + v_{pq}^2. \quad (5)$$

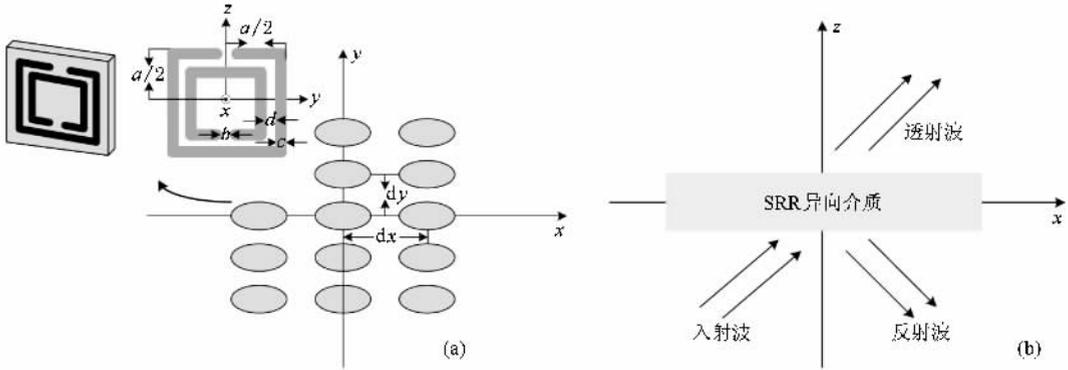


图 1 电磁波作用下 SRR 异向介质结构 (a) 主视图 (b) 侧视图

对于传播模 (γ_{pq} 为正实数), Floquet 模在 \hat{z} 方向只存在相位变化, 并没有幅度的衰减. 由 (4) 式可见, 来自异向介质的所有 SRR 单元结构在各 Floquet 模子波的传播方向上相位延迟为 2π 的整数倍, 波能够传递能量. 对于凋落模 (γ_{pq} 为负的纯虚数), Floquet 模在 \hat{z} 方向没有相位变化, 但存在幅度的衰减, 从而导致传输阻带. 因为 SRR 异向介质的谐振响应通常表现为 S_{21} 参数的极小值, 故考虑 SRR 异向介质层的 S 参数

$$S_{11}^{mpq} = \frac{R_{mpq}(1 - T_{pq}^2)}{1 - R_{mpq}^2 T_{pq}^2}, \quad S_{21}^{mpq} = \frac{T_{pq}(1 - R_{mpq}^2)}{1 - R_{mpq}^2 T_{pq}^2}, \quad (6)$$

其中 R_{mpq} 为 (1) 式中的反射系数, 有 $|R_{mpq}| \leq 1$, 而 $T_{pq} = \exp(-i\gamma_{pq}d)$ 为传输因子. 可以看出, S_{21}^{mpq} 将随着传输因子 T_{pq} 的减小而减小. 当 γ_{pq} 变为纯虚数, 意味着电磁波将随与激励源间的距离增加而指数衰减, 从而导致了 S_{21}^{mpq} 出现极小值, 可见 SRR 异向介质谐振响应是由 Floquet 凋落模所引起.

我们知道, 一个具有任意极化方式的平面电磁波总可以分解为垂直极化波和平行极化波, 而这正好对应 $p=0$ 且 $q=0$ 的 TE 和 TM 的 Floquet 传播模

$$E_1 = \sum_{m=1}^2 A_{m00} \psi_{m00}, \quad (7)$$

式中 A_{m00} 表示入射波的幅度. 所以, 利用 Floquet 模将 SRR 单元的场分布展开可以很方便地分析在任意极化方式和入射角度平面电磁波照射下的异向介质谐振响应.

3. 异向介质的谐振响应

利用 ANSOFT HFSS 11.0 所引进的 Floquet 端口来进行数值仿真. 这一新型的端口求解器可以使更清楚地看到异向介质周围空间电磁场各模式传输特性.

3.1. 主平面的斜入射平面波作用

图 2 给出了异向介质在来自 XOZ 面入射波 ($\phi = 0^\circ$) 照射下随 θ 角变化的传输特性. 可以看到, 由于入射波的电场垂直入射面, 谐振现象只发生在 TE-Floquet 透射主模上. 谐振频率 8.2 GHz 基本不变, 但谐振强度随着入射角的变化有所不同. 我们知道磁场分量垂直于 SRR 平面时将引起环电流, 而这一环电流在略高于谐振频率的频段内将产生一个与 $H_{\perp} = H \cos\theta$ 反方向的磁耦极矩, 从而最终导致负的

μ . 而对于图 1 所示 SRR 摆相的异向介质同时还存在由平行于 SRR 开口方向的电场产生的电谐振, 从而使总的谐振强度随着入射角度的不同而变得更加复杂. 由图 2(a) 可以看出, 当 $\theta = 40^\circ$ 时, 谐振强度最强, $\theta = 0^\circ$ 和 $\theta = 20^\circ$ 时总的谐振强度基本一致, 而 $\theta = 60^\circ$ 时, 谐振强度最弱. 另外, 随着 θ 的增长, 带宽有略微的增长. 图 2(b) 给出了透射主模 S 参数的相位变化, 可以看到当 $\theta = 0^\circ$ 时, S_{11} 的在谐振频点的相位为零而 S_{21} 相位发生突变, 此时且接近全反射, SRR 异向介质等效为一磁导体. 当 $\theta = 40^\circ$ 时, 虽然此时总的谐振强度最强, 但电谐振和磁谐振对于入射角度变化的不同响应使得相位变得较为复杂. 图

3 给出了异向介质在来自 YOZ 面入射波 $\phi = 90^\circ$ 照射下随 θ 角变化的传输特性. 可以看到, 由于入射波的电场平行入射面, 谐振现象只发生在透射的 TM-Floquet 模上. 与图 2 相同, 谐振频率基本不变, 但谐振强度随着入射角的变化有所不同. 当 $\theta = 60^\circ$ 时, 谐振强度最强, $\theta = 20^\circ$ 和 $\theta = 40^\circ$ 时总的谐振强度基本一致且谐振强度最弱, 而 $\theta = 0^\circ$ 时, 谐振强度居中. 另外, 随着 θ 的增长, 带宽有略微的减小. 图 3(b) 给出了透射主模 S 参数的相位变化, 可以看到当 $\theta = 0^\circ$ 时, 与图 2(b) 相同, 此时 SRR 异向介质等效为一磁导体. 而当 $\theta = 60^\circ$ 时, 相位变化较为复杂.

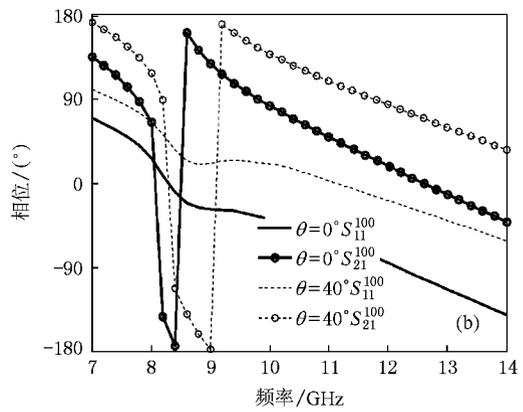
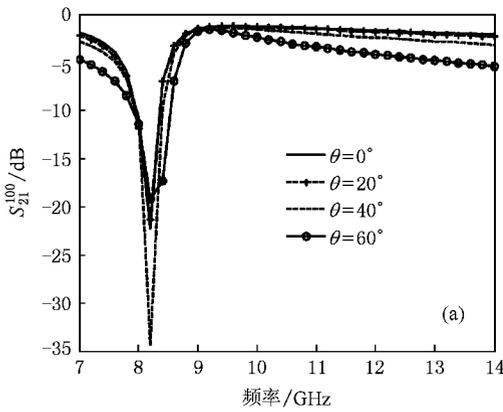


图 2 异向介质对于来自 XOZ 面垂直极化入射波 ($\phi = 0^\circ$) 的谐振响应 (a) TE-Floquet 透射模谐振强度 (b) TE-Floquet 透射模主模相位

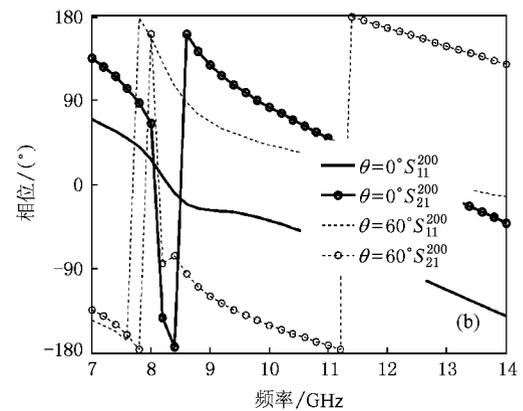
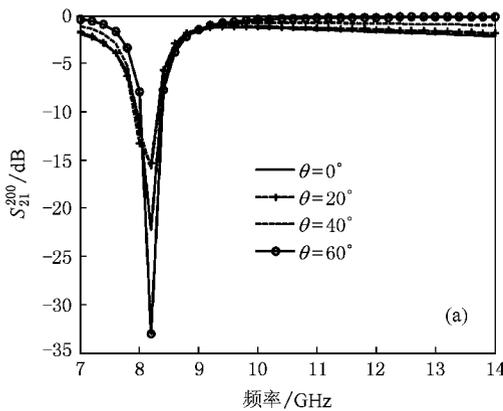


图 3 异向介质对于来自 YOZ 面平行极化入射波 ($\phi = 90^\circ$) 的谐振响应 (a) TM-Floquet 透射模谐振强度 (b) TM-Floquet 透射模主模相位

表 1 给出了 8.2 GHz 时 TE-Floquet 透射模在 $\theta = 0^\circ$, $\theta = 40^\circ$ 和 TM-Floquet 透射模在 $\theta = 0^\circ$, $\theta = 60^\circ$ 时的透射因子. 可以看到 $|T|$ 均远小于 1, 且谐振强度越大 $|T|$ 越小, 此时凋落模的作用越强烈, 从而表明

SRR 异向介质谐振响应是由 Floquet 凋落模所引起. 因为对于如图 1 所示的 SRR 摆相, 垂直于 SRR 平面的磁场分量和平行于 SRR 开口方向的电场分量将共同引起谐振, 且磁谐振和电谐振将随着入射角的

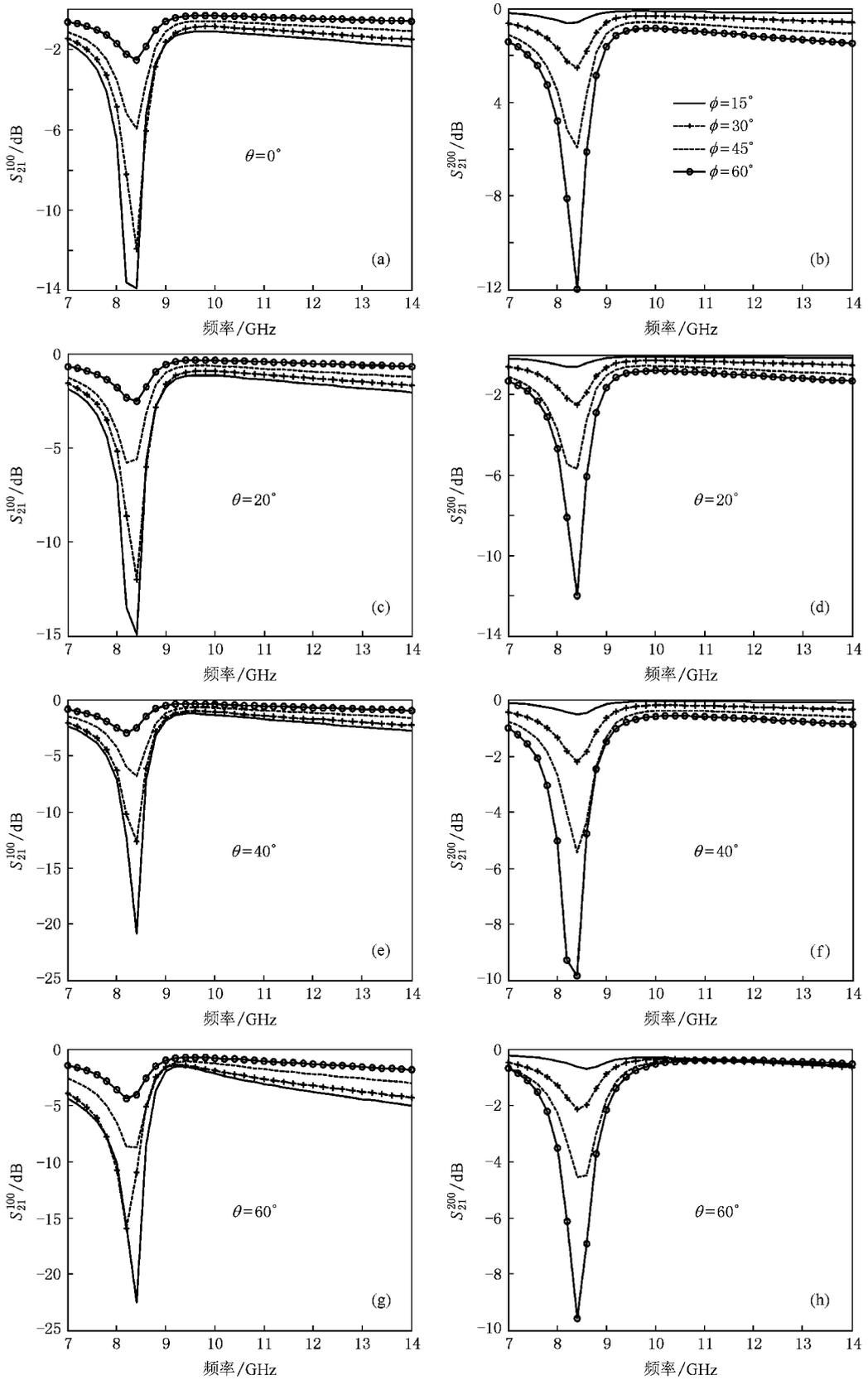


图4 异向介质在来自任意平面且具有任意极化方式的斜入射平面电磁波作用下的谐振响应 (a)(c)(e)(g)为 TE-Floquet 透射模 (b)(d)(f)(h)为 TM-Floquet 透射模

的不同而改变,从而使总的谐振强度随着入射角度 θ 都存在一个特定的入射角,其总谐振强度最强,传输因子的模值 $|T|$ 最小.

表 1 8.2 GHz 时 TE-Floquet 透射模和 TM-Floquet 透射模的透射因子

透射模	$\theta(^{\circ})$	S 参数	$ T $
TE-Floquet 模 $\phi = 0^{\circ}$	0	$S_{11}^{100} = -0.4117 + j(-0.9080)$ $S_{21}^{100} = -0.0614 + j(-0.0466)$	0.0424
	40	$S_{11}^{100} = -0.7535 + j(-0.6571)$ $S_{21}^{100} = -0.0001 + j(-0.0193)$	0.0147
TE-Floquet 模 90	0	$S_{11}^{200} = -0.4117 + j(-0.9080)$ $S_{21}^{200} = -0.0614 + j(-0.0466)$	0.0424
	60	$S_{11}^{200} = -0.6596 + j(-0.8780)$ $S_{21}^{200} = -0.0019 + j(-0.0222)$	0.0126

3.2. 任意平面的斜入射平面波作用

图 4 给出了异向介质对于来自任意平面且具有任意极化方式的斜入射平面电磁波作用下的谐振响应.可以看到,与主平面上单一极化平面波的作用不同,此时 TE-和 TM-Floquet 模将共同产生谐振响应,

且谐振频率都保持 8.4 GHz 不变.随着 θ 的增长,任一 ϕ 平面下 TE-Floquet 透射主模的谐振强度将变强,而 TM-Floquet 透射主模的谐振强度变弱.另外,对于任一入射角 θ ,TE-Floquet 透射主模的谐振响应将随着 ϕ 平面角度的增长而变弱,而 TM-Floquet 透射主模的谐振响应将随着 ϕ 平面角度的增长而变强.

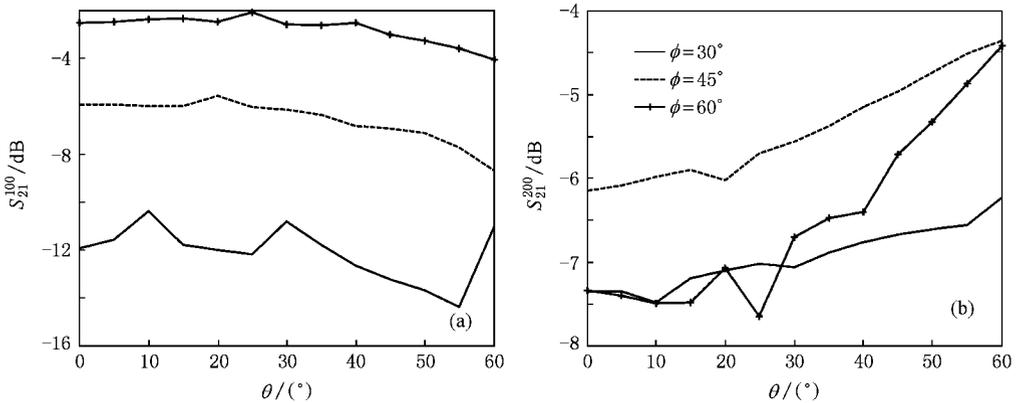


图 5 异向介质在 8.4 GHz 时任意入射面内垂直极化电磁波作用下的谐振响应 (a) TE-Floquet 透射模 (b) TM-Floquet 透射模

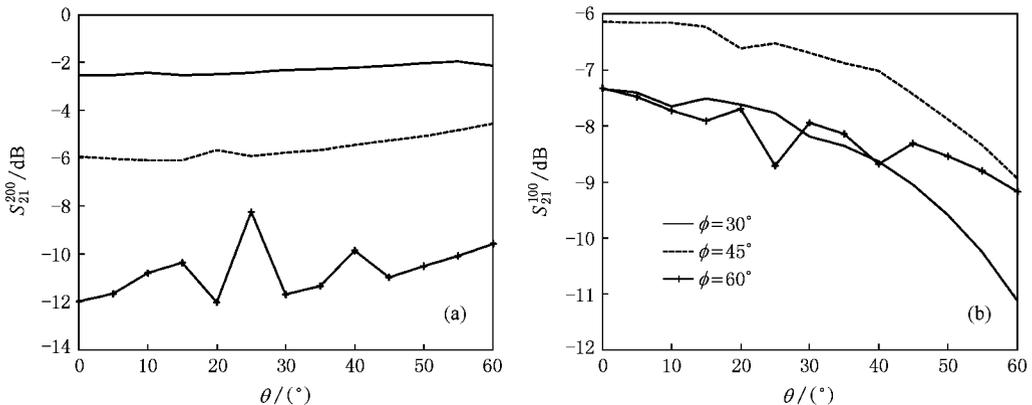


图 6 异向介质在 8.4 GHz 时任意入射面内水平极化电磁波作用下的谐振响应 (a) TM-Floquet 透射模 (b) TE-Floquet 透射模

图 5 给出了异向介质在 8.4 GHz 时任意入射面内垂直极化电磁波作用下的谐振响应,当 $\phi = 30^\circ$, 45° , 60° 时,垂直极化的入射波不仅会引起 TE-Floquet 透射模的谐振响应,同时 TM-Floquet 透射模也会产生谐振响应.可以看到,对于 TE-Floquet 透射模其谐振强度是随着 ϕ 平面角度的增加而有所降低,而对于 TM-Floquet 透射模则呈现出在相同的 ϕ 平面角度下随着入射角度的增加其谐振响应的递增趋势.图 6 给出了异向介质在 8.4 GHz 时任意入射面内水平极化电磁波作用下的谐振响应,同样的,当 $\phi = 30^\circ$, 45° , 60° 时,水平极化的入射波也会引起 TE-Floquet 透射模和 TM-Floquet 透射模的谐振响应.可以看到,对于 TM-Floquet 透射模其谐振强度是随着 ϕ 平面角度的增加而有所增强,而对于 TE-Floquet 透射模则呈现出在相同的 ϕ 平面角度下随着入射角度 θ 的增加其谐振响应的递减趋势.

4. 结 论

本文将开口谐振环单元的场分布利用 Floquet 模展开,从电磁波传播角度揭示了凋落模引起异向介质谐振响应的事实.数值计算了任意平面电磁波照射下异向介质的传输特性,研究表明,对于来自主平面上的垂直或平行极化的入射波,具有相同极化方式的 Floquet 透射模将发生谐振,并且磁谐振和电谐振将随着入射角的不同而改变.而对于来自其他入射平面的电磁波,两种极化的 Floquet 透射模将共同发生谐振.需要指出的是,由于现有异向介质的 SRR 结构单元周期相对于其谐振波长较小,利用 Floquet 模展开时只有 Floquet 主模($p = 0, q = 0$)会起作用,所以本文中通过对 TE-和 TM-Floquet 透射主模研究了任意平面电磁波照射下异向介质的谐振响应.

- [1] Shelby R A ,Smith D R ,Schultz S 2001 *Science* **292** 77
- [2] Pendry J B 2000 *Phys. Rev. Lett.* **85** 3966
- [3] Zhang D K ,Zhang Y W ,He L ,Li H Q ,Chen H 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 772 (in Chinese) [张东科、张冶文、赫 丽、李宏强、陈 鸿 2005 物理学报 **54** 772]
- [4] Zhuang F ,Shen J Q 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 955 (in Chinese) [庄 飞、沈建其 2005 物理学报 **54** 955]
- [5] Luo C R ,Kang L ,Zhao Q ,Fu Q H ,Song J ,Zhao X P 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 1607 (in Chinese) [罗春荣、康 雷、赵 乾、付全红、宋 娟、赵晓鹏 2005 物理学报 **54** 1607]
- [6] Zheng Q ,Zhao X P ,Fu Q H ,Zhao Q ,Kang L ,Li M M 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 5683 (in Chinese) [郑 晴、赵晓鹏、付全红、赵 乾、康 雷、李明明 2005 物理学报 **54** 5683]
- [7] Zhang G M ,Peng J C ,Jian Z J ,Huang X Y 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 1846 (in Chinese) [张高明、彭景翠、翦知渐、黄小益 2006 物理学报 **55** 1846]
- [8] Meng F Y ,Wu Q ,Wu J 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 2194 (in Chinese) [孟繁义、吴 群、吴 健 2006 物理学报 **55** 2194]
- [9] Wu M F ,Meng F Y ,Wu Q ,Wu J 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 5790 (in Chinese) [武明峰、孟繁义、吴 群、吴 健 2006 物理学报 **55** 5790]
- [10] Cao J X ,Hu W ,Luo H L ,Yang X B 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 2131 (in Chinese) [曹京晓、胡 巍、罗海陆、杨湘波 2007 物理学报 **56** 2131]
- [11] Dai X Y ,Wen S C ,Xiang Y J 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 186 (in Chinese) [戴小玉、文双春、项元江 2007 物理学报 **57** 186]
- [12] Marqués R ,Medina F ,Rafii-El-Idrissi R 2002 *Phys. Rev. B* **65** 14444
- [13] Smith D R ,Gollub J ,Mock J J ,Padilla W J ,Schurig D 2006 *J. Appl. Phys.* **100** 024507
- [14] Smith D R ,Schurig D ,Mock J J 2006 *Phys. Rev. E* **74** 036604
- [15] Varadan V V ,Tellakula A R 2006 *J. Appl. Phys.* **100** 034910
- [16] Aydin K ,Güven K ,Katsarakis N ,Soukoulis C M ,Ozbay E 2004 *Opt. Exp.* **12** 5896
- [17] Gay-Balmaz P ,Martin O J F 2002 *J. Appl. Phys.* **92** 2929
- [18] Martín F ,Falcone F ,Bonache J ,Marqués R ,Scrolla M 2003 *Appl. Phys. Lett.* **83** 4652
- [19] Aznar F ,Bonache J ,Martín F 2008 *Appl. Phys. Lett.* **92** 043512
- [20] Chen H S ,Ran L X ,Huangfu J T 2006 *J. Appl. Phys.* **100** 024915
- [21] Ziolkowski R W 2003 *IEEE T. Antennas Propagat.* **51** 1516
- [22] Aydin K ,Bulu I ,Güven K ,Kafesaki M ,Soukoulis C M ,Ozbay E 2005 *New J. Phys.* **7** 168
- [23] Gundogdu T F ,Tsiapa I ,Kostopoulos A ,Konstantinidis G ,Katsarakis N ,Penciu R S ,Kafesaki M ,Economou E N ,Koschny Th ,Soukoulis C M 2006 *Appl. Phys. Lett.* **89** 084103
- [24] Amitay N ,Galindo V 1968 *Bell Syst. Tech. J.* **47** 1903
- [25] Chen C C 1970 *IEEE T. Microwave Theory Tech.* **18** 627

Floquet mode analysis on the resonance behavior of metamaterials^{*}

Yang Rui[†] Xie Yong-Jun Li Xiao-Feng Jiang Jun Wang Yuan-Yuan Wang Rui

(*National Key Laboratory of Antennas and Microwave Technology, Xidian University, Xi'an 710071, China*)

(Received 16 May 2008 ; revised manuscript received 14 July 2008)

Abstract

The field distribution over a split ring resonator is expanded into Floquet modes, revealing the fact that the evanescent floquet modes actually lead to the metamaterial resonance behavior. Transmission through metamaterials is examined for arbitrary incident wave. It is shown that the resonance happens in the transmitted modes with the same polarization as that of the wave incident in the main plane. The electric and the magnetic resonances vary with the incidence angle. For the wave from other incident planes, the TE- and TM- Floquet modes will share the resonance.

Keywords : split ring resonator, metamaterial, Floquet mode, resonance

PACC : 4110H

^{*} Project supported by National Natural Science Foundation of China (Grant No. 60771040) and the New Century Excellent Talents in University (Grant No. NCET-04-0950).

[†] E-mail : mattomato811118@yahoo.com.cn