

# 负折射率材料中二次谐波转换效率的理论分析<sup>\*</sup>

周 城<sup>1)†</sup> 高艳侠<sup>2)</sup> 王培吉<sup>1)</sup> 张 仲<sup>1)</sup> 李 萍<sup>1)</sup>

1) 济南大学理学院, 济南 250022)

2) 山东财政学院统计与数理学院, 济南 250014)

(2008 年 4 月 5 日收到, 2008 年 8 月 14 日收到修改稿)

研究了二次谐波是负折射率而基频光是正折射率材料中, 在考虑吸收系数、走离效应和相位失配的情况下, 推导出平面波振幅缓变近似下, 二次谐波的耦合波方程. 根据该方程在基频光小信号近似下推导出二次谐波转换效率表达式. 最后采用数值计算的方法分别研究了相位失配量  $\Delta k$ 、走离角  $\rho$  和二次谐波的吸收系数  $\alpha$  对转换效率的影响. 结果表明, 由于相位失配量的存在二次谐波的转换效率随负折射率材料长度的变化存在极大值, 即负折射率材料长度存在最佳值, 并且随着长度的增加, 转换效率呈明显的周期性振荡并且极大值总是逐渐减小, 转换效率随失配量的增加而减小, 走离效应对转换效率的影响不明显, 可以忽略不计, 转换效率随吸收系数的增加而减小. 这为研究负折射率材料的非线性理论打下了基础.

关键词: 负折射率材料, 二次谐波, 转换效率, 相位匹配

PACC: 4110H, 4265J, 7820

## 1. 引 言

负折射率材料在某频率波段具有负的介电常数和磁导率, 进而具有负的折射率. 在该种材料中, 二次谐波的研究已经引起了广泛关注. Agranovich 等<sup>[1]</sup>研究了负折射率/空气物质中二次谐波的产生, 其中基频光在负折射率材料而倍频光在空气中. Zharov 等<sup>[2]</sup>在未考虑介质吸收和基频光强不变的情况下, 推导出平板负折射率材料中平面二次谐波的解析表达式. Mattiucci 等<sup>[3]</sup>采用数值计算的方法研究了平板负折射率/正折射率/负折射率物质体系中二次谐波的转换效率, 在未考虑介质吸收和基频光强不变的情况下, 给出平面波耦合方程. Aguanno 等<sup>[4]</sup>在不考虑二次谐波吸收的情况下, 采用数值模拟的方法, 研究了正负折射率材料相互交替排列的平板体系中(类似于周期性结构)二次谐波的转换效率. Popov 等<sup>[5]</sup>研究了无损耗、相位匹配条件下负折射率材料中二次谐波的耦合波方程和能量转换效率. 陈亮等<sup>[6]</sup>根据电磁场理论, 推导了无耗、相位匹配条件下非线性左手材料中二次谐波的耦合波方程和能量转换过程. Roppo 等<sup>[7]</sup>研究了负折射率材料

中二次谐波产生时走离效应的影响. 浙江大学的高士明和何赛灵<sup>[8]</sup>研究了负折射率材料中四波混频时损耗的影响. 但是在这些研究中, 都把基频光(或泵浦光)置于负折射率材料中, 而把二次谐波(或信号光)置于正折射率材料中, 且没考虑到负折射率材料对二次谐波的吸收效应的影响. 实际上, 倍频光可以出现在负折射率材料中. Lezec 等<sup>[9]</sup>从实验上证明了频率高、波长短的可见光存在于负折射率材料中.

本文研究了二次谐波是负折射率而基频光是正折射率材料中, 在考虑吸收系数、走离效应和相位失配的情况下, 推导出平面波振幅缓变近似下, 二次谐波的耦合波方程. 根据该方程在基频光小信号近似下推导出二次谐波转换效率公式. 最后采用数值计算的方法分别研究了相位失配量  $\Delta k$ 、走离角  $\rho$  和二次谐波的吸收系数  $\alpha$  对转换效率的影响.

## 2. 理论模型

设频率为  $\omega$  ( $\epsilon_\omega > 0, \mu_\omega > 0$ ), 电场振幅为  $E_\omega$ , 磁场振幅为  $H_\omega$  的基频光处在负折射率材料的正折射率范围内, 频率为  $2\omega$  ( $\epsilon_{2\omega} < 0, \mu_{2\omega} < 0$ ), 电场振幅为

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金(批准号: 60471042)资助的课题.

<sup>†</sup> E-mail: cczhoucheng@sina.com

$E_{2\omega}$  磁场振幅为  $H_{2\omega}$  的倍频光处在负折射率范围内. 电场  $E$  磁场  $H$  和表示电磁波传播方向的波矢  $k$  三者之间的关系为:

$$E(\mathbf{r}, t) = E_0(\mathbf{r}) \exp[i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})], \quad (1)$$

$$H(\mathbf{r}, t) = H_0(\mathbf{r}) \exp[i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})], \quad (2)$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{H} = -\omega \varepsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = \omega \mu \mathbf{H},$$

$$S = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{H} = \frac{1}{2\omega\mu} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{k} \cdot \mathbf{E}) = \frac{E^2}{2\omega\mu} \mathbf{k}. \quad (3)$$

根据(1)和(2)式,相速度与波矢  $k$  的方向一致且  $v = \frac{k}{\omega} \frac{c}{n}$ ; 根据(3)式光场的能流方向  $S$  与波矢  $k$  的方向是否一致,取决于  $\mu$  的正负. 对于基频光而言,处在正折射率范围内,所以  $\mu$  取正值,所以相速度、能流方向  $S$  与波矢  $k$  的方向一致;对于倍频光而言,处在负折射率范围内,所以  $\mu$  取负值,所以能流方向  $S$  与波矢  $k$  的方向相反,如图 1 所示.

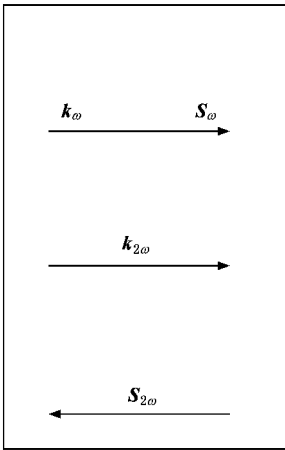


图 1 左手材料中二次谐波产生的方向

令  $E_i = e_i E_i (i = \omega, 2\omega)$ ,  $e_i$  表示光的偏振方向. 按照文献 [10, 11] 的方法,考虑光场在介质中的损耗和倍频光走离效应的情况下,得到基频光和倍频光振幅满足的波动方程为

$$\frac{dE_\omega(z)}{dz} + \frac{\alpha_\omega}{2} E_\omega(z) = \frac{i\omega}{cn_\omega} d_{\text{eff}} E_{2\omega}(z) E_\omega^*(z) e^{i\Delta k z}, \quad (4)$$

$$\frac{1}{\cos^2 \rho} \frac{dE_{2\omega}(z)}{dz} + \frac{\alpha_{2\omega}}{2} E_{2\omega}(z) = \frac{i2\omega}{cn_{2\omega}} d_{\text{eff}} E_\omega^2(z) e^{-i\Delta k z}. \quad (5)$$

式中  $n_\omega$  和  $n_{2\omega}$  分别是基频光和倍频光的折射率,  $\alpha_\omega$

和  $\alpha_{2\omega}$  分别是基频光和倍频光的损耗系数,  $\rho$  为倍频光的走离角,  $d_{\text{eff}}$  为有效非线性系数,  $\Delta k$  是相位失配,  $c$  是真空中光的传播速度. 对于负折射率材料,文献 [12] 已经给出,同正折射率材料一样,存在对波长的正吸收.

考虑在倍频过程中忽略基频光振幅的变化和基频光在介质中传播时忽略介质对基频光的吸收损耗时,解得<sup>[11]</sup>

$$E_{2\omega}(z) = \frac{\omega E_\omega^2 d_{\text{eff}} \cos^2 \rho}{cn_{2\omega}} \times \left[ \frac{i \frac{-\alpha_{2\omega} \cos^2 \rho}{2} - \Delta k}{\left( \frac{-\alpha_{2\omega} \cos^2 \rho}{2} \right)^2 + (\Delta k)^2} \right] \times \left( e^{-i\Delta k z} - e^{\frac{\alpha_{2\omega} \cos^2 \rho}{2} z} \right).$$

由于

$$I = \frac{1}{2} cn \varepsilon_0 |E|^2 = \frac{P}{A},$$

$$\eta = \frac{P_{2\omega}}{P_\omega} = \frac{8\pi^2 d_{\text{eff}}^2 z^2 \cos^4 \rho}{\lambda^2 c |n_{2\omega}| n_\omega^2 \varepsilon_0} \frac{P_\omega}{A} e^{-\frac{\alpha_{2\omega}}{2} z} \times \frac{\sin^2\left(\frac{\Delta k}{2} z\right) + \sinh^2\left(\frac{-\alpha_{2\omega} \cos^2 \rho}{4} z\right)}{\left(\frac{\alpha_{2\omega} \cos^2 \rho}{4} z\right)^2 + \left(\frac{\Delta k}{2} z\right)^2}, \quad (6)$$

根据文献 [6] 取  $\lambda = 1 \times 10^{-5} \text{ m}$ ,  $d_{\text{eff}} = 1 \times 10^{-12} \text{ m/V}$ ,  $n_\omega = 0.41$ ,  $n_{2\omega} = -0.64$  则(6)式变为

$$\eta = 2.76 \times 10^{-13} \frac{P_\omega}{A} \cos^4 \rho \times L^2 \times \exp\left(-\frac{\alpha_{2\omega} \cos^2 \rho}{2} L\right) \times \frac{\sin^2\left(\frac{\Delta k}{2} L\right) + \sinh^2\left(\frac{-\alpha_{2\omega} \cos^2 \rho}{4} L\right)}{\left(\frac{\alpha_{2\omega} \cos^2 \rho}{4} L\right)^2 + \left(\frac{\Delta k}{2} L\right)^2}. \quad (7)$$

### 3. 数值计算与分析

#### 3.1. 相位匹配参数对转换效率的影响

为了研究相位匹配参数对转换效率的影响,取  $\frac{P_\omega}{A} = 10^{12} \text{ W/m}^2$ ,  $\rho = 0^\circ$ ,  $\alpha_{2\omega} = 0.005/\text{cm}$ , 根据(7)式得到的二次谐波转换效率随负折射率材料长度变化曲线,如图 2 所示,图中五角星(☆)代表  $\Delta k =$

0 rad/mm, 钻石形(◇)代表  $\Delta k = 0.01$  rad/mm, 圆圈(○)代表  $\Delta k = 0.03$  rad/mm, 实点(·)代表  $\Delta k = 0.06$  rad/mm. 由图 2 可知, 随着相位失配度  $\Delta k$  的增大, 转换效率降低; 当  $\Delta k$  增大到某一临界值时, 转换效率随介质长度的增加先增大而后减小, 即转换效率出现极大值, 与该值相对应的介质长度称为最佳长度, 若失配量再增大, 将会出现多个转换效率极大值, 即存在多个最佳长度. 图 3 给出了  $\Delta k = 0.06$  rad/mm 时, 转换效率随负折射率材料长度变化曲线. 由图 3 知, 随着负折射率材料长度的增加, 转换效率呈现周期性振荡, 但随着周期的增加, 转换效率的极大值始终是减小的.

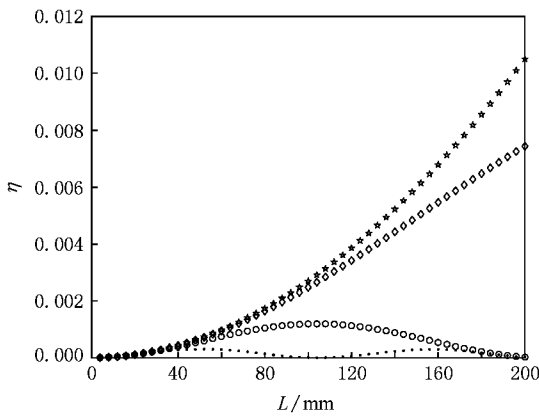


图 2 不同相位匹配时二次谐波转换效率随负折射率材料长度的变化曲线

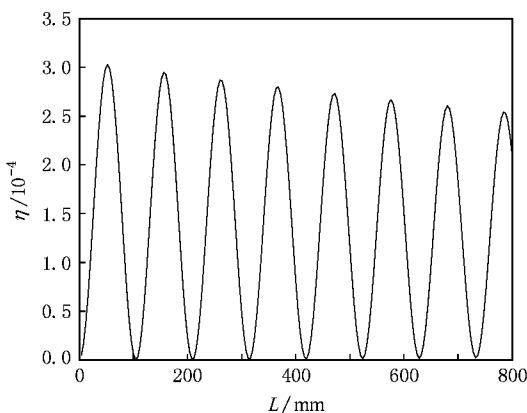


图 3  $\Delta k = 0.06$  rad/mm 时二次谐波转换效率随负折射率材料长度的变化曲线

### 3.2. 走离角对转换效率的影响

为了便于分析走离角对转换效率的影响, 取  $\frac{P_\omega}{A} = 10^{12}$  W/m<sup>2</sup>,  $\Delta k = 0.03$  rad/mm,  $\alpha_{2\omega} = 0.005$ /cm, 根据 (7) 式得到的二次谐波转换效率随负折射率材料长

度变化曲线, 如图 4 所示, 图中圆圈(○)代表  $\rho = 0^\circ$ , 实线代表  $\rho = 80^\circ$ . 由图 4 可知, 随着走离角  $\rho$  的增大, 转换效率降低, 但变化幅度较小, 因此在实际中可不必考虑走离角对转换效率的影响.

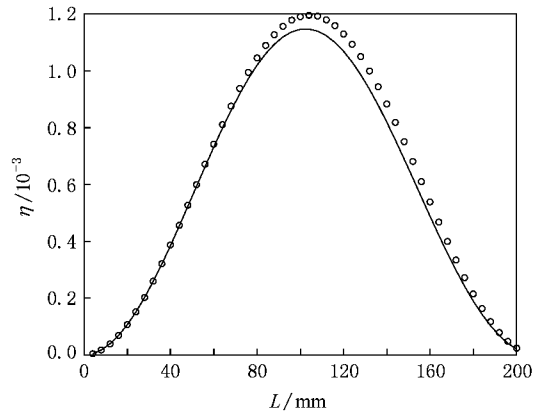


图 4 不同走离角时二次谐波转换效率随负折射率材料长度变化曲线  $\Delta k = 0.03$  rad/mm

### 3.3. 吸收系数对转换效率的影响

为了研究吸收系数对转换效率的影响, 取  $\frac{P_\omega}{A} = 10^{12}$  W/m<sup>2</sup>,  $\Delta k = 0.03$  rad/mm,  $\rho = 0^\circ$ . 根据 (7) 式得到的二次谐波转换效率随负折射率材料长度变化曲线, 如图 5 所示, 图中实点(·)代表  $\alpha_{2\omega} = 0$ /cm, 圆圈(○)代表  $\alpha_{2\omega} = 0.005$ /cm, 加号(+)代表  $\alpha_{2\omega} = 0.025$ /cm, 五角星(☆)代表  $\alpha_{2\omega} = 0.01$ /cm; 图 6 是在相同条件下, 负折射率材料的长度变化范围是图 5 的三倍. 由图 5 可知, 负折射率材料长度的从零开始增加时, 随着吸收系数的增大, 转换效率降低; 当负折射率材料长度增大到某一特定值时, 随着吸收系数的增大, 转换效率降低得非常明显; 但当负折射率材料长度再增大时, 随着吸收系数的增大, 转换效率的降低变的越来越不明显, 趋向于同一个值. 在此基础上, 负折射率材料长度再增大, 随着吸收系数的增大, 转换效率不是降低反而增加了. 这是因为负折射率材料的长度从零开始逐渐增加, 能量交换过程是以基频光向倍频光转移过程为主; 当负折射率材料长度增加到某一特定值时, 能量交换过程中基频光向倍频光转移的最多; 此后, 随着负折射率材料长度的增加, 二次谐波能量流动方向会发生反转, 能量交换过程是以倍频光向基频光“回吐”转移过程为主, 此时“回吐”的能量与原来的二次谐波能量相互抵消, 从而造成总的二次谐波转换能量降低, 从而转换效率降低. 由于倍频光向基频光“回吐”的过程中, 倍频光

还被负折射率材料吸收一部分能量,所以“回吐”的能量不可能完全抵消原来产生的二次谐波的能量,吸收系数越大抵消的越少,剩余的二次谐波能量将被带入下一个周期,如图 6 所示.因此会出现转换效率趋向于同一值后,负折射率材料长度再增大,随着吸收系数的增大,转换效率不是降低反而增加了.

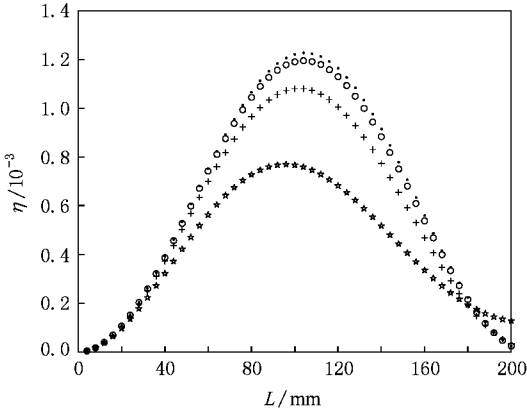


图 5 不同吸收系数时二次谐波转换效率随负折射率材料长度变化曲线  $\Delta k = 0.03 \text{ rad/mm}$ ,  $\rho = 0^\circ$

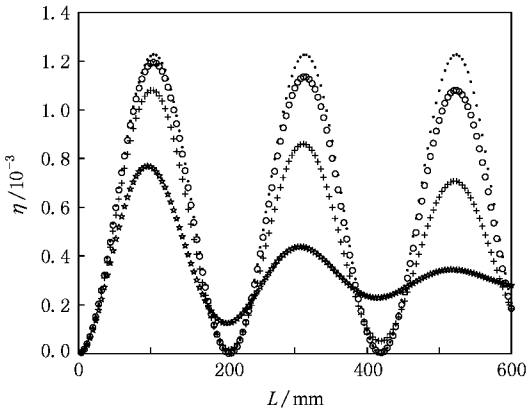


图 6 将图 5 放大 3 倍时二次谐波转换效率随负折射率材料长度变化曲线  $\Delta k = 0.03 \text{ rad/mm}$ ,  $\rho = 0^\circ$

取  $\Delta k = 0 \text{ rad/mm}$ , 则(7)式变为

$$\eta = \frac{P_{2\omega}}{P_\omega} = 0.276L^2 \times \exp\left(-\frac{\alpha_{2\omega}}{2}L\right) \times \frac{\sinh^2\left(\frac{-\alpha_{2\omega}}{4}L\right)}{\left(\frac{\alpha_{2\omega}}{4}L\right)^2}. \quad (8)$$

根据(8)式得到的二次谐波转换效率随负折射率材料长度变化曲线如图 7 所示,图中五角星(☆)代表  $\alpha_{2\omega} = 0.01/\text{cm}$ ,加号(+ )代表  $\alpha_{2\omega} = 0.025/\text{cm}$ ,圆圈(○)代表  $\alpha_{2\omega} = 0.005/\text{cm}$ ,实点(·)代表  $\alpha_{2\omega} = 0.0001/\text{cm}$ .比较图 5 和图 7 可知,由于相位失配因子的存在,才使得转换效率存在极大值.

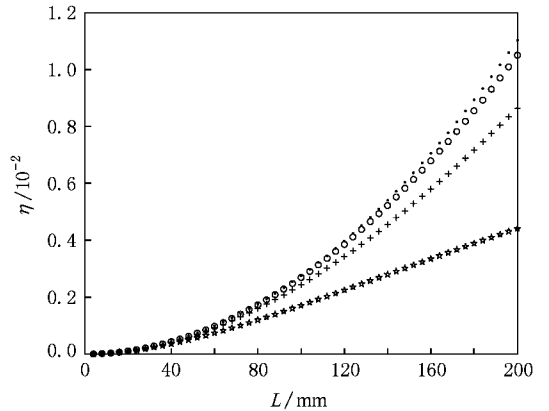


图 7 由(8)式得到的二次谐波转换效率随负折射率材料长度变化曲线  $\Delta k = 0 \text{ rad/mm}$

## 4. 结 论

在考虑二次谐波的走离效应、吸收系数和相位失配的情况下,根据麦克斯韦方程组推导出二次谐波的负折射率而基频光是正折射率材料中,平面波振幅缓变近似下,二次谐波的耦合波方程.根据该方程在基频光小信号近似下推导出二次谐波转换效率表达式.最后采用数值计算的方法分别研究了相位失配量  $\Delta k$ , 走离角  $\rho$  和二次谐波的吸收系数  $\alpha$  对转换效率的影响.结果表明,由于相位失配量的存在二次谐波的转换效率随负折射率材料长度的变化存在极大值,即负折射率材料长度存在最佳值,并且随着长度的增加,转换效率呈明显的周期性振荡但极大值总是逐渐减小,转换效率随失配量的增加而减小;走离效应对转换效率的影响不明显,可以忽略不计;转换效率随吸收系数的增加而减小.这为研究负折射率材料的非线性理论打下了基础.

[1] Agranovich V M, Shen Y R, Baughman R H, Zakhidov A A 2004 *Phys. Rev. B* **69** 165112

[2] Zharov A A, Zharova N A, Shadrivov I V, Kivshar Y S 2005 *Appl. Phys. Lett.* **87** 091104

[3] Mattiucci N, Aguanno G D, Bloemer M J, Scalora M 2005 *Phys. Rev. E* **72** 066612

[4] Aguanno G D, Mattiucci N, Scalora M, Bloemer M J 2006 *Phys. Rev. E* **74** 026608

- [ 5 ] Popov A K ,Shalaev V M 2006 *Appl. Phys. B* **84** 131
- [ 6 ] Chen L ,Liang C H ,Dang X J 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 6398 ( in Chinese ) [ 陈 亮、梁昌洪、党晓杰 2007 *物理学报* **56** 6398 ]
- [ 7 ] Roppo V ,Centini M ,Sibilia C ,Bertolotti M 2007 *Phys. Rev. A* **76** 033829
- [ 8 ] Gao S M ,He S L 2007 *J. Nonlinear Opt. Phys. Mater.* **16** 485
- [ 9 ] Lezec H J ,Dionne J A ,Atwater H A 2007 *Science* **316** 430
- [ 10 ] Zhou C ,Gao Y X ,Wang P J 2008 *High Power Laser and Particle Beams* **20** 83 ( in Chinese ) [ 周 城、高艳侠、王培吉 2008 *强激光与粒子束* **20** 83 ]
- [ 11 ] Jensen S M ,Hellwarth R W 1978 *Appl. Phys. Lett.* **32** 166
- [ 12 ] Dimmock J O 2003 *Opt. Express* **11** 2397

## Theoretical analysis of second-harmonic conversion efficiency in negative-index materials \*

Zhou Cheng<sup>1)†</sup> Gao Yan-Xia<sup>2)</sup> Wang Pei-Ji<sup>1)</sup> Zhang Zhong<sup>1)</sup> Li Ping<sup>1)</sup>

1) *School of Science ,University of Jinan ,Jinan 250022 ,China*

2) *School of Statistic and Mathematics ,Shandong University of Finance ,Jinan 250014 ,China*

( Received 5 April 2008 ; revised manuscript received 14 August 2008 )

### Abstract

For negative-index material ( NIM ) of second-harmonic wave ( SHW ) and positive-index materials of fundamental frequency wave ( FFW ), the equations of the coupled wave was deduced , taking account of absorption coefficient , walk-off effect , phase mismatching capacity and the approximation of slow-varying amplitudes of the plane wave. On the basis of the equations , a formulation of SHW conversion efficiency was obtained in condition of small signal approximation for FFW. Through numerical simulation , the effects of phase mismatching capacity , walk-off angle and absorption coefficient of SHW on the conversion efficiency of SHW were scrutinized respectively. The maximum conversion efficiency of SHW was realized via increasing the length of NIM that is , there exists an optimum length of NIM ; however , the conversion efficiency of SHW shows an evident periodic evolution and the maximum conversion efficiency always diminishes. The conversion efficiency decreases with the increases of the phase mismatching capacity and the absorption coefficient. The influence of walk-off effect is not evident so that it may be neglected with respect to the conversion efficiency of SHW. This study provides a basis for investigating nonlinear theory of negative-index materials.

**Keywords** : negative-index material , second-harmonic wave , conversion efficiency , phase matching

**PACC** : 4110H , 4265J , 7820

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China ( Grant No. 60471042 ).

† E-mail : cezhoucheng@sina.com