

共轭对称延拓傅里叶计算全息*

黄素娟^{1,2)†} 王朔中^{1,2)} 于瀛洁³⁾

1) 上海大学通信与信息工程学院, 上海 200072)

2) 上海大学特种光纤与光接入网省部级共建重点实验室, 上海 200072)

3) 上海大学机电工程与自动化学院, 上海 200072)

(2008 年 5 月 14 日收到, 2008 年 7 月 21 日收到修改稿)

提出一种计算全息算法, 将物光波进行共轭对称延拓, 经快速傅里叶变换直接生成实函数, 其中包含物光波的幅度和相位信息, 可编码得到灰度全息图. 利用此全息图可清晰地再现原物光波. 通过共轭延拓生成计算全息图的方法与以往基于干涉的计算全息不同之处在于, 这里并不需要模拟物光和参考光的干涉, 计算效率很高. 利用生成的全息图在数字再现和光电再现实验中均获得了良好的效果. 理论推导和实验结果都验证了算法的有效性.

关键词: 计算全息, 共轭对称, 数字再现, 光电再现

PACC: 4240J, 4240D, 4240K

1. 引 言

全息是利用干涉和衍射来记录和再现光波的技术. 计算全息 (computer generated holography, 简称 CGH) 避免了传统全息图形成中的光干涉记录过程, 由计算机通过数值计算直接产生并记录全息图. 它不需要光源、光路和记录介质的实际存在就能设计制作出所需的计算全息图, 降低了全息的实现难度, 能够产生世间不存在物体的三维图像, 并能存储、处理、传输和复制全息数据^[1]. 计算全息在信息的数字存储和光电再现中比传统全息有更大的优势, 基于计算全息的显示系统在三维电视终端显示和多媒体展示等领域有广泛的应用前景^[2-4]. 然而, 无论是描述复杂的三维景物, 还是计算高分辨率的全息图, 或者模拟光的传播和干涉, 计算复杂度都十分惊人, 要达到实时处理的目标还需做大量的工作^[5].

计算全息编码是将二维光场复振幅分布变换为全息图的二维透过率实函数分布的过程^[6]. 研究者已提出了很多计算全息算法, 例如, 早期 Ichioka 等^[7]提出了基于傅里叶变换的乒乓算法. 这种算法建立在较粗略的 Born 近似的基础上, 把物体切分成平行于全息面的许多面片, 用傅里叶变换计算向全

息面传播的物光波阵面, 重构的三维图像能消除隐藏的线条. 这种算法易于编程, 但只能生成自发光物体的图像, 而且计算效率低.

目前计算全息主要有基于干涉和面向衍射两类算法^[2]. 基于干涉的计算全息是通过模拟物光和参考光干涉全息条纹记录中光的传播过程来产生全息图^[8], 它可实现三维标量衍射积分, 能产生包括所有深度信息的高质量图像. 由于构成目标的点数量巨大, 而且全息带宽压缩技术有限, 所以这种方法的计算负荷过大. 模拟参考光和物光波的干涉是计算全息最常用的方法^[9], 通过对立体对象不同方向的投影分别进行计算可得到三维全息, 近年来研究者采用了许多方法以尽量减小其计算负荷^[10, 11].

面向衍射的计算全息最早由美国麻省理工学院的 Lucente 提出^[12, 13], 这种方法利用衍射原理通过反向模拟衍射产生全息条纹图. 通过空间和频谱采样编码生成基本条纹和全息素矢量, 再经过全息素矢量解码产生最终的全息图. 这种算法的优点是允许在图像质量和计算速度之间进行权衡, 但全息素矢量的解码是计算的瓶颈. 文献 [14] 提出了面向衍射的计算全息带宽压缩方法.

本文提出一种计算全息算法, 不同于模拟物光和参考光干涉产生全息图的常规方法^[8-11], 我们将

* 上海市科委科技攻关计划 (批准号 075115001) 资助的课题.

† E-mail: sjhuang@shu.edu.cn

物光波进行共轭对称延拓,通过快速傅里叶变换直接生成实函数后编码得到灰度全息图,而不需要模拟光的干涉过程.由物光波就可生成全息图,处理速度很快.数字再现和光电再现实验表明,所生成的全息图可清晰地再现原物光波.

2. 共轭对称延拓计算全息算法

计算全息的实质是通过数值计算将光场复振幅分布转换为实的透过率分布即全息图,也就是将二维离散复值函数变换为二维离散正实值函数,而且在再现阶段能够完成逆转换,从二维离散实值函数恢复二维离散复值函数,得到原始物波.文献[8—11]实质上都是模拟参考光和物光波的干涉实

现这一目标的.

以下我们将说明,无需引入参考光与物光相干涉也能得到含有物光波振幅和相位信息的实值函数.为此,我们利用共轭对称复函数的傅里叶变换是实函数这一熟知的性质,直接将物光波的复振幅作共轭对称延拓,然后对它进行傅里叶变换和适当的编码来达到目的.用这一方法得到的全息图既可用数字方法再现原物像,也可以用激光直接照射全息图实现光电再现,得到原始物体的实像.

考虑一个由物光波 $f_0(m, n)$ 共轭对称延拓后得到的复振幅分布 $f(m, n)$ ($m = 0, 1, \dots, M-1; n = 0, 1, \dots, N-1$). 为了便于讨论,令 M 和 N 均为偶数,且 $f(0, n) = f(m, 0) = f(M/2, n) = 0$, 即

$$f(m, n) = \begin{cases} f_0(m, n) & (m = 1, 2, \dots, M/2 - 1; n = 1, 2, \dots, N - 1), \\ f_0^*(M - m, N - n) & (m = M/2 + 1, \dots, M - 1; n = 1, 2, \dots, N - 1), \\ 0, & (m = 0 \text{ 或 } n = 0 \text{ 或 } m = M/2). \end{cases} \quad (1)$$

式中上标“*”表示复共轭,对称中心位于 $(M/2, N/2)$. 其二维离散傅里叶变换(digital Fourier transform, 简记 DFT)为

$$F(\mu, \nu) = \frac{1}{MN} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) \times \exp\left[-j2\pi\left(\frac{m\mu}{M} + \frac{n\nu}{N}\right)\right] \begin{pmatrix} \mu = 0, 1, \dots, M-1 \\ \nu = 0, 1, \dots, N-1 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

其中 μ 和 ν 分别为水平和垂直方向的频域样本序号.由 $f(m, n)$ 共轭对称的假设不难证明(见附录 A)

$$F(\mu, \nu) = \frac{2}{MN} \sum_{m=1}^{(M/2)-1} \sum_{n=1}^{N-1} \left\{ \operatorname{Re}[f(m, n)] \times \cos\left[2\pi\left(\frac{m\mu}{M} + \frac{n\nu}{N}\right)\right] + \operatorname{Im}[f(m, n)] \sin\left[2\pi\left(\frac{m\mu}{M} + \frac{n\nu}{N}\right)\right] \right\} \quad (3)$$

式中 $\operatorname{Re}[f(m, n)]$ 和 $\operatorname{Im}[f(m, n)]$ 分别表示 $f(m, n)$ 的实部和虚部.可见我们得到了预料中的实二维 DFT,其值仅取决于 $f(m, n)$ 的左半部分,即 $f_0(m, n)$,也就是要记录的物光波.

待记录的物光波复振幅 $f_0(m, n)$ 可用幅度分布函数 $A(m, n)$ 和相位分布函数 $\varphi(m, n)$ 表示,有

$$f_0(m, n) = A(m, n) \exp[j\varphi(m, n)]$$

$$(m = 1, 2, \dots, M/2 - 1; n = 1, 2, \dots, N - 1). \quad (4)$$

根据(1)式作共轭对称延拓后代入(3)式可得

$$F(\mu, \nu) = \frac{2}{MN} \sum_{m=1}^{(M/2)-1} \sum_{n=1}^{N-1} \left\{ A(m, n) \times \cos\left[2\pi\left(\frac{m\mu}{M} + \frac{n\nu}{N}\right) - \varphi(m, n)\right] \right\} \begin{pmatrix} \mu = 0, 1, \dots, M-1 \\ \nu = 0, 1, \dots, N-1 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

因此,一个二维离散物光波复振幅 $f_0(m, n)$ 经共轭对称延拓和傅里叶变换后,可得到二维离散实值函数 $F(\mu, \nu)$,其中记录了物光波的幅度信息 $A(m, n)$ 和相位信息 $\varphi(m, n)$.为了制作全息图,需将此实值函数的取值线性映射至非负实数.如用数字方法制作 8 bit 灰度全息图时,则可映射至 0—255 并取整,得到编码后的全息图

$$F_{\text{holo}}(\mu, \nu) = \operatorname{round}\left\{255 \cdot \frac{F(\mu, \nu) \min[F(\mu, \nu)]}{\max[F(\mu, \nu)] - \min[F(\mu, \nu)]}\right\} \triangleq H_0 + hF(\mu, \nu), \quad (6)$$

显然 $F_{\text{holo}}(\mu, \nu)$ 中含有直流成分 H_0 , h 为比例系数,全息图 $F_{\text{holo}}(\mu, \nu)$ 中任意一点都包含物光波的幅度

和相位信息,可用于再现物光波.直流成分并不影响物光的再现,只是在对称中心位置形成一个亮点.

3. 平面图像的计算全息编码及数字再现

考虑一个实的物光场如图 1(a)所示 256×255 黑白图像,将它作为 $f_0(m, n)$ 的幅度 $A(m, n)$.用 $[-\pi, \pi]$ 范围内的均匀分布随机数作为相位因子 $\varphi(m, n)$ 以便平滑傅里叶变换谱,降低全息图的动态范围,于是待记录的物光波如(4)式所示.将此物光按(1)式作共轭对称延拓,则构成 514×256 的共轭对称光波复振幅,其幅度分布如图 1(b)所示.

对得到的共轭对称光波复振幅求二维离散傅里叶变换,变换结果是包含物光波幅度信息(即图像)和随机相位的实值函数.引入的随机相位使复分布函数的频谱变得很宽,因而 DFT 的值分布比较均匀.将实值函数按(6)式编码为代表 256 级灰度的 8 bit 整数,用以表示透过率的变化.由此得到尺寸为 514×256 的均匀全息图,如图 1(c)所示.

数字再现很容易实现,只要计算傅里叶反变换

就能得到原物体的像.取整幅计算全息图傅里叶反变换的幅度,可得到与图 1(b)相似的图像,只是中心有一亮点,这是由于全息图的直流分量所致.保留其左半部分即得到如图 1(d)所示数字再现,图像清晰.计算峰值信噪比

$$\text{PSNR} = 10 \lg \frac{MN \cdot 255^2}{\sum_{m,n} [A(m,n) - A'(m,n)]^2}, \quad (8)$$

可得 $\text{PSNR} = 48.9 \text{ dB}$.式中 $A(m, n)$ 表示原始图像, $A'(m, n)$ 表示数字再现图像, M, N 分别为图像的列数和行数.

截取任何一部分全息图依然能再现整个物体.取图 1(c)方框中的部分全息图(占 40%),可得到如图 1(e)所示的数字再现(去除了右侧的共轭部分),可见此时也再现了整个物光波,只是质量下降了,其原因是只用了一部分全息图,由不完整频域数据求离散傅里叶反变换时,幅度和相位信息相互重叠,使再现图像上叠加了随机相位噪声.

对于彩色图像可先分解成 RGB 三个分量,按上述算法分别计算全息图.对 RGB 分量的全息图分别进行数字再现后合成彩色图像.

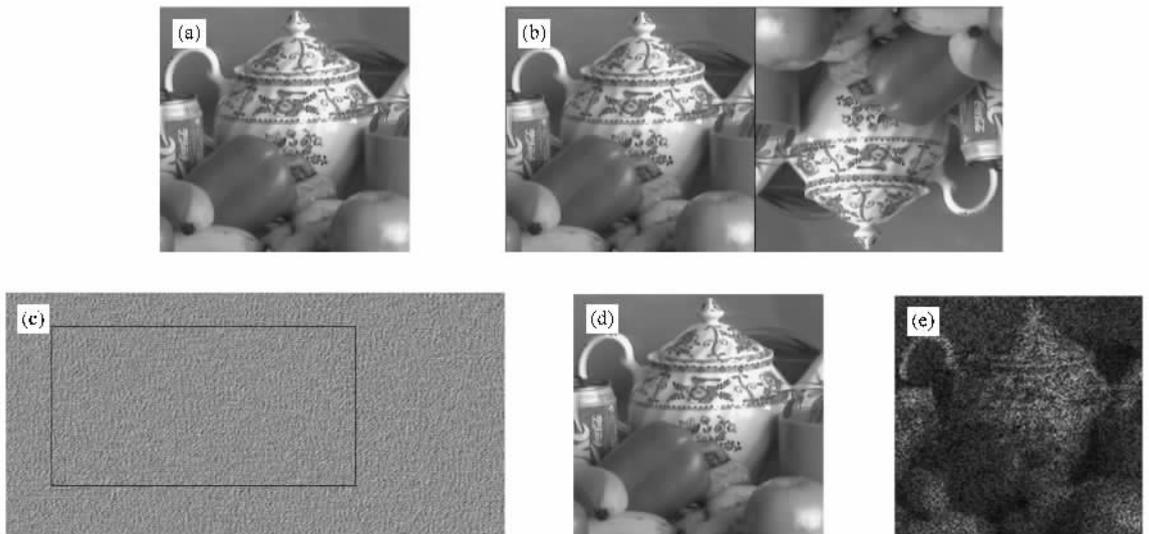


图 1 平面图像的全息图及其数字再现 (a)原始图像 (b)共轭对称图像 (c)灰度全息图 (d)完整全息图数字再现 (e)40%的全息图(方框中)数字再现

4. 全息图的光电再现

全息图被再现光波照射时,起到衍射光屏的作用,光波通过衍射光屏而产生衍射效应,使全息图上的振幅信息和相位信息得到还原,再现物光波.用激光照射由(6)式表示的全息图,入射光波为平面波

$$R(\mathbf{r}) = B \exp(j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}), \quad (9)$$

其中 B 为常数, \mathbf{k} 为波数, $|\mathbf{k}| = k = 2\pi/\lambda$, \mathbf{r} 为沿激光入射方向的矢径.考虑全息图所在的 (μ, ν) 平面,不失一般性,可令入射光与 ν 轴垂直,与 μ 轴的夹角为 θ .入射光波在全息图表面的分布仅为 μ 的函数

$$R_0(\mu, \nu) = B \exp\left(j \frac{2\pi}{\lambda} \mu \cdot \delta x \cos \theta\right), \quad (10)$$

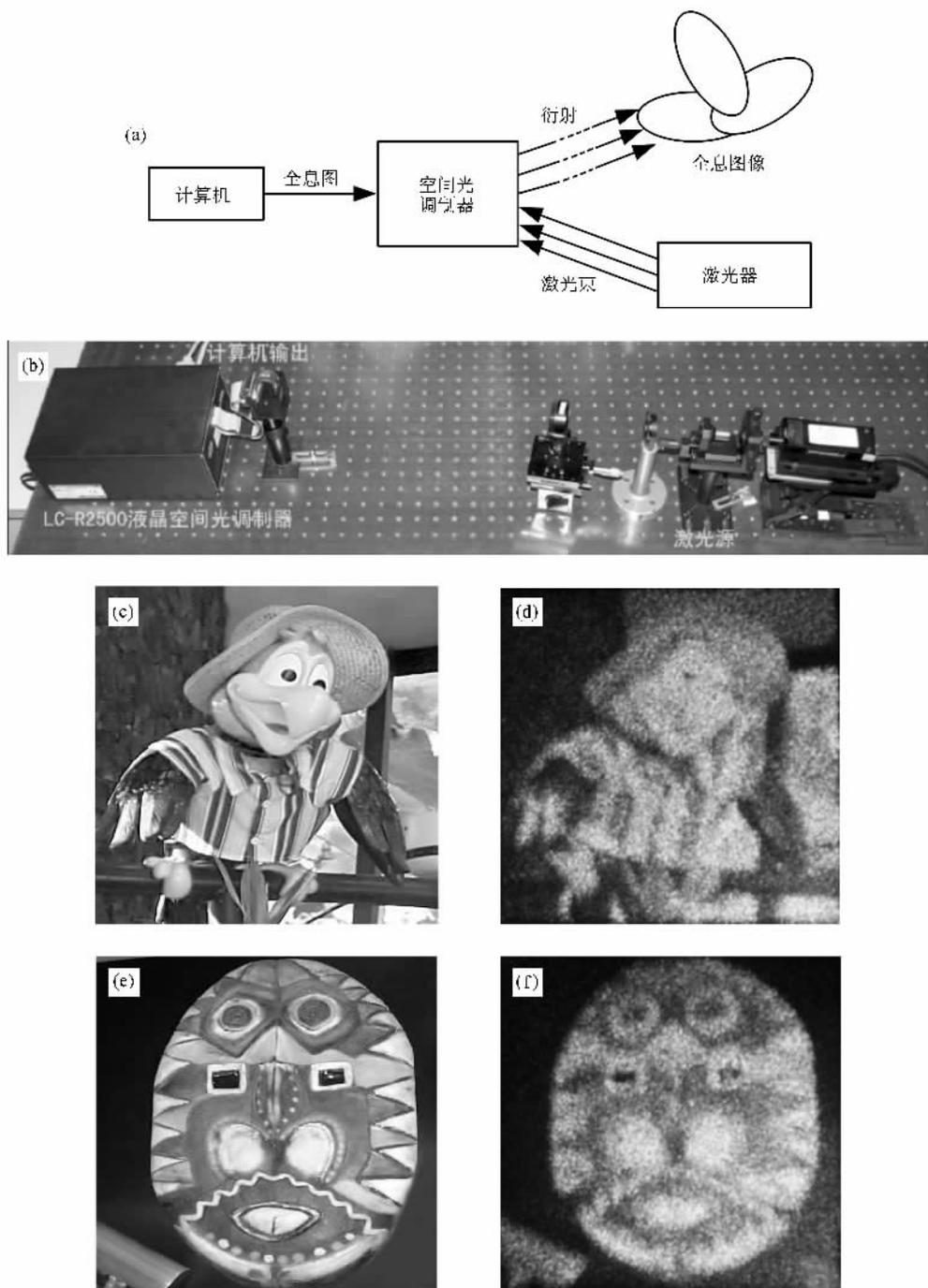


图2 全息图光电再现实验结果 (a)光电再现原理图 (b)实验装置 (c)原始图像 (d)光电再现图像 (e)原始图像 (f)光电再现图像

式中 $\mu \cdot \delta x$ 表示全息图上的水平位置, δx 为全息图的像素间隔即空间采样间隔. 平面波经过全息图调制后的光场为

$$G(\mu, \nu) = R_0(\mu, \nu)F(\mu, \nu), \quad (11)$$

这里没有考虑(6)式中的 H_0 , 因为它仅在再现图像中心形成一个亮点. 经傅里叶反变换后可获得再现图像的复振幅为

$$g(m, n) = \sum_{\mu=0}^{M-1} \sum_{\nu=0}^{N-1} R_0(\mu, \nu)F(\mu, \nu) \times \exp \left[j2\pi \left(\frac{m\mu}{M} + \frac{n\nu}{N} \right) \right] \begin{pmatrix} m = 0, 1, \dots, M-1 \\ n = 0, 1, \dots, N-1 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

根据傅里叶变换性质, 有

$$g(m, n) = f(m + m_0, n)$$

$$\Leftrightarrow F(\mu, \nu) \exp\left[j2\pi\mu \frac{m_0}{M}\right], \quad (13)$$

其中

$$m_0 = \frac{M \cdot \delta x \cos\theta}{\lambda}. \quad (14)$$

可见,再现图像中包含了原物光波及其共轭光波,只是在水平方向上偏移了 m_0 .

我们用反射式电寻址液晶空间光调制器为核心器件以实现全息图的光电再现.空间光调制器根据输入的全息图信号调制入射的参考光,能够再现原物光波.光电再现的原理图如图 2(a)所示,由计算机生成的全息图通过计算机显示卡的数字视频接口输出至液晶显示(liquid crystal display,简记 LCD)空间光调制器.根据全息图所形成的相应电信号直接寻址,改变 LCD 各像素的透过率,激光器输出的激光扩束后经过透镜照射到空间光调制器.激光经过空间光调制器后会发生菲涅耳衍射,从而再现了原物光.

在图 2(b)的实验装置中,左侧为 LC-R2500 液晶空间光调制器,有效面积 $19.5 \text{ mm} \times 14.6 \text{ mm}$,像素间距 $19 \mu\text{m}$.在离开空间光调制器约 4 m 的墙上得到了再现实像,可用相机拍摄.分别对图 2(c)和(e)计算共轭对称延拓傅里叶变换全息图,并加载到空间光调制器上进行光电再现,得到再现图像如图 2(d)和(f)所示(未含共轭部分及中心亮点),可见共轭对称延拓傅里叶全息图较好地实现了光电再现.理论上,在无穷远处菲涅耳衍射变成傅里叶变换,可获得良好的光电再现.但由于实验室空间的限制,无法进一步增大空间光调制器到墙面的距离,只能达到

近似的无穷远,因此光电再现的质量不如数字再现.

5. 深度图像的计算全息编码及数字再现

描述立体对象的深度图像如图 3(a)所示,用颜色或灰度表示不同深度.将深度信息作为物光波的相位信息,变化范围归一化为 $[0, \pi)$,并令物光场的幅度为常数 1.首先进行共轭对称延拓,再进行二维傅里叶变换得到实值函数,其中包含了作为物光波相位的深度信息.

由于作为相位信息的深度数据不是均匀分布的,得到的实值函数值动态范围很大,而且不均匀.将实值函数线性编码为 8 bit 灰度变化,得到包含深度信息的灰度全息图如图 3(b).图中右下角为中心部分的放大,可见这一部分变化很剧烈.

全息图的数字再现只要计算全息图的傅里叶反变换并提取相位,再现的深度图像如图 3(c)所示(去除了右侧的共轭部分).与原始深度图像相比存在一定误差,其误差来源主要是因为编码时的量化误差.

傅里叶变换前后的能量保持不变,故全息编码所产生的量化误差可用能量失真来描述.能量失真度 D 定义为每个待编码实值的编码量化误差平方和与这些实值的平方和之比

$$D = \frac{\sum_{\mu, \nu} |\Delta(\mu, \nu)|^2}{\sum_{\mu, \nu} |F(\mu, \nu)|^2}, \quad (15)$$

式中 $F(\mu, \nu)$ 为实值函数, $\Delta(\mu, \nu)$ 为对应的编码量化误差.实验中将深度值映射到 $[0, 0.8\pi]$,编码量化误差所引起的能量失真度为 1.92%,可见图 3(c)基本再现了原来的深度信息.



图 3 深度图像的全息图和数字再现结果 (a)深度图像 (b)全息图 (c)数字再现深度图像

6. 结 论

共轭对称函数的傅里叶变换结果是实值,本文基于傅里叶变换的这一基本性质得到计算全息图.将物光波在空间作共轭延拓,经傅里叶变换得到实值函数,对它进行线性编码生成傅里叶变换全息图,其中包含了物光波的幅值信息和相位信息.该算法不需要模拟光波的干涉,由物光波就可生成全息图.对于平面图像作为物光波的幅度生成的全息图,能很好地利用数字方法再现原图像,由深度图像作为物光波的相位所生成的全息图也能较好地再现原来的深度.以空间光调制器为核心器件对单色图像生成的全息图进行光电再现取得了良好的效果.若对彩色图像进行光电再现,我们可以根据(14)式,对不

同波长 λ 的光适当调节对应分量全息图的有效范围 M 或者相应入射光的角度 θ ,使得三色光的偏移量 m_0 相等,可望实现彩色图像的再现.

在传统的基于物光波和参考光波干涉的计算全息中,再现时为了消除原物光波和共轭物光波的混叠现象,需要在空域中将待记录物光波的范围至少延拓一倍,延拓部分不包含信息.若原物光波是 $M \times N$,计算傅里叶全息图时就要对延拓后的 $2M \times N$ 矩阵进行傅里叶变换,再和参考光波进行 $2M \times N$ 次乘法运算,最后编码生成全息图.而用本文的方法则只要对原物光波共轭延拓后的 $2M \times N$ 矩阵进行快速傅里叶变换,然后直接编码生成全息图.由于不必做乘法,运算量减少了,因此本文的算法可望用于发展动态全息显示.

附录 A

可将 $F(\mu, \nu)$ 写成两项之和,有

$$F(\mu, \nu) = F_1(\mu, \nu) + F_2(\mu, \nu), \quad (\text{A1})$$

其中,

$$F_1(\mu, \nu) = \frac{1}{MN} \sum_{m=1}^{M/2-1} \sum_{n=1}^{N-1} f(m, n) \exp \left[-j2\pi \left(\frac{m\mu}{M} + \frac{n\nu}{N} \right) \right], \quad (\text{A2})$$

$$F_2(\mu, \nu) = \frac{1}{MN} \sum_{m=M/2+1}^{M-1} \sum_{n=1}^{N-1} f(m, n) \exp \left[-j2\pi \left(\frac{m\mu}{M} + \frac{n\nu}{N} \right) \right]. \quad (\text{A3})$$

根据 $f(m, n)$ 共轭对称的假设不难证明

$$F_2(\mu, \nu) = \frac{1}{MN} \sum_{m=1}^{M/2-1} \sum_{n=1}^{N-1} f^*(m, n) \exp \left[j2\pi \left(\frac{m\mu}{M} + \frac{n\nu}{N} \right) \right], \quad (\text{A4})$$

即

$$F(\mu, \nu) = \frac{1}{MN} \sum_{m=1}^{M/2-1} \sum_{n=1}^{N-1} \left\{ f(m, n) \exp \left[-j2\pi \left(\frac{m\mu}{M} + \frac{n\nu}{N} \right) \right] + f^*(m, n) \exp \left[j2\pi \left(\frac{m\mu}{M} + \frac{n\nu}{N} \right) \right] \right\}. \quad (\text{A5})$$

将 $f(m, n)$ 表示为实部和虚部之和,用 Euler 公式展开指数函数,整理后可得到 DFT 表达式

$$F(\mu, \nu) = \frac{2}{MN} \sum_{m=1}^{M/2-1} \sum_{n=1}^{N-1} \left\{ \text{Re}[f(m, n)] \cos \left[2\pi \left(\frac{m\mu}{M} + \frac{n\nu}{N} \right) \right] + \text{Im}[f(m, n)] \sin \left[2\pi \left(\frac{m\mu}{M} + \frac{n\nu}{N} \right) \right] \right\}, \quad (\text{A6})$$

其中 $\text{Re}[f(m, n)]$ 和 $\text{Im}[f(m, n)]$ 分别表示 $f(m, n)$ 的实部和虚部,故(3)式得证.

- [1] Shi J P ,Chen X N ,Gao H T ,Chen X Z 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 844 (in Chinese) [石建平、陈旭南、高洪涛、陈献忠 2003 物理学报 **52** 844]
- [2] Sainov V ,Stoykova E ,Onural L ,Ozaktas H 2006 *Proc. SPIE* **6252** 62521C-1
- [3] Slinger C ,Cameron C ,Stanley M 2005 *IEEE Computer* **38** 46
- [4] Slinger C ,Cameron C ,Coomber S ,Miller R ,Payne D ,Smith A ,Smith M ,Stanley M ,Watson P 2004 *Proc. SPIE* **5290** 27
- [5] Shimobaba T ,Shiraki A ,Masuda N ,Ito T 2005 *Opt. Express* **13** 4196
- [6] Su X Y ,Li J T 1999 *Information Optics* (Beijing :Science Press) p167 (in Chinese) [苏显渝、李继陶 1999 信息光学 (北京 :科学出版社) 第 167 页]
- [7] Ichioka Y ,Izumi M ,Suzuki Y 1971 *Appl. Opt.* **10** 403
- [8] Lucente M 1993 *J. Electr. Imaging* **2** 28
- [9] Chen L F ,Zhao D M 2006 *Chin. Phys. Lett.* **23** 603
- [10] Ahrenberg L ,Benzie P ,Magnor M ,Watson J 2006 *Opt. Express* **14** 7636
- [11] Abookasis D ,Rosen J 2006 *Appl. Opt.* **45** 6533
- [12] Lucente M 1994 (*Ph. D. Dissertation*) (Massachusetts : MIT)
- [13] Lucente M 1996 *IBM Systems J.* **35** 349
- [14] Chai X D ,Wei S 2004 *Acta Opt. Sin.* **24** 304 (in Chinese) [柴晓冬、韦 穗 2004 光学学报 **24** 304]

Computer generated holography based on Fourier transform using conjugate symmetric extension *

Huang Su-Juan^{1,2)†} Wang Shuo-Zhong^{1,2)} Yu Ying-Jie³⁾

¹ *School of Communication and Information Engineering ,Shanghai University ,Shanghai 200072 ,China*

² *Key Laboratory of Special Fiber Optics and Optical Access Networks ,Shanghai University ,Shanghai 200072 ,China*

³ *College of Mechatronics Engineering and Automation ,Shanghai University ,Shanghai 200072 ,China*

(Received 14 May 2008 ; revised manuscript received 21 July 2008)

Abstract

A new computer generated holography (CGH) algorithm based on Fourier transform is proposed. The complex amplitude of the light wave to be recorded is extended to produce a conjugate symmetric function. The function is then Fourier transformed to generate a real valued distribution containing both the amplitude information and the phase information of the light wave. The obtained real distribution is coded to give a gray-scale hologram ,which can be used to reconstruct the original light wave. Unlike the existing CGH algorithms based on interference of object and reference light waves ,the proposed method does not require simulating the interference to produce the hologram. The algorithm is highly efficient and can produce good results both in digital and electroholographic reconstruction. Theoretical and experimental results are presented to verify the validity of the method.

Keywords: computer generated holography (CGH) , conjugate symmetry , digital reconstruction , electroholographic reconstruction

PACC : 4240J , 4240D , 4240K

* Project supported by the Key Technology Research and Development Program of Science and Technology Commission of Shanghai Municipality , China (Grant No. 075115001).

† E-mail :sjhuang@shu.edu.cn