

# 半解析对偶棱边元及其在波导不连续性问题中的应用\*

陈杰夫<sup>†</sup> 朱 宝 钟万勰

(大连理工大学工业装备结构分析国家重点实验室, 大连 116023)

(2008 年 4 月 21 日收到, 2008 年 6 月 18 日收到修改稿)

给出电磁波导的对偶变量变分原理, 并采用对偶棱边元对波导的横截面进行半解析离散. 将波导中沿纵向均匀的区段视为子结构, 运用基于 Riccati 方程的精细积分算法求出其出口刚度阵, 然后与不均匀区段的常规有限元网格拼装即可对波导不连续性问题进行求解. 半解析对偶棱边元的采用可以在最大程度上对有限元网格进行缩减, 并且能够在不增加计算量的前提下任意增加子结构的长度, 从而可以将截断求解区域的人工边界设置在距离不均匀区段充分远的地方, 极大地减少了近似边界条件所带来的误差. 数值算例证明这种方法具有很高的精度与效率.

关键词: 波导的不连续性, 半解析辛分析, 对偶棱边元, 精细积分

PACC: 5235H, 0260

## 1. 引 言

波导的不连续性是微波工程中的基本问题之一. 由于波导中几何的或材料的不均匀性, 或二者兼而有之, 沿波导传播的电磁波在不均匀部分会发生散射, 仅有一部分电磁波能够穿越不均匀部分继续传播, 即是传输波, 另一部分则被反射而沿入射波的反方向传播, 如果不均匀部分含有损耗介质, 还会有一部分电磁波被吸收掉(见图 1). 对波导的不连续性问题进行分析, 弄清楚传输波与反射波的能量分配对于许多微波器件如环行器、滤波器、波导接头/耦合器等的设计极为重要.

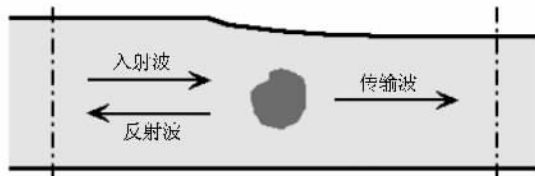


图 1 波导的不连续性问题

计算波导的不连续性问题, 其难点之一在于对求解区域的截断. 有限元方法可以有效地处理复杂几何结构及介质不均匀填充问题, 因此很适合应用

于波导不均匀区域的离散. 由于通常认为波导沿传播方向为无限长, 采用有限元方法时必须首先在不均匀区段的两侧设置人工边界(如图 1 中虚线所示), 将求解区域截断为有限大小, 然后在截断处加上合理的边界条件才能得到正确的计算结果. 人工边界设置的位置和边界条件施加方案的选择会对有限元方法实施过程的复杂程度、计算时间和存储空间的消耗量、以及数值结果的精度造成直接影响. 采用吸收边界条件<sup>[1]</sup>(ABC)包括最近常用的理想匹配层<sup>[2]</sup>(PML)技术)对求解区域进行截断是最常见的思路. 然而, 由于这种方法实际上对应的是近似的边界条件, 对于由不均匀部分激发出来的高次模态(凋零波)的吸收并不是很好, 因此在计算时需要将人工边界设置在距离不均匀部分足够远的地方, 认为高次模在到达人工边界时已经衰减至可以忽略的程度. 因此, 在采用这种方法时, 将人工边界设置得离不均匀部分越远, 数值结果的精度就越高. 然而, 这也会导致未知量的增加以及计算时间与内存消耗的急剧上升. 另一种方法采用了区域分裂的思想, 即仍对不均匀部分附近采用有限元离散, 而对于有限元网格以外的区域则采用边界积分方程<sup>[3]</sup>或特征函数展开<sup>[4]</sup>的办法. 基于这样的处理, 有限元网格截断处的边界条件可以精确地施加, 如此人工

\* 国家自然科学基金(批准号:10632030)资助的课题.

<sup>†</sup> E-mail: chenjiefu@student.dlut.edu.cn

边界可以设置在距离不均匀部分任意近的地方,从而减少了未知量.然而这种有限元方法结合其他算法的思路会使整个求解过程变得很复杂,而且在某些场合下边界积分方程或特征函数展开法所需要的 Green 函数或特征函数无法解析求得,往往造成算法无法使用.

本文在此采用有限元半解析离散并结合常规有限元方法的思路求解波导的不连续性问题.通过引入对偶变量,将对应于矢量波动方程的单变量变分原理改写为对偶变量变分原理,从而将电磁波导的基本方程导向了 Hamilton 体系、辛几何的形式.对于波导的不均匀区段,仍然采用常规的三维棱边元进行离散,而对于均匀的波导区段,保持其纵向的解析性质,采用对偶棱边元对其横截面进行半解析离散.通过基于 Riccati 方程的精细积分算法以及区段混合能到区段势能的转换,即可得到均匀区段的出口刚度阵.采用了精细积分计算的均匀区段可以视为一个子结构,其计算量仅与横截面的半解析有限元离散网格有关,而其纵向长度可以任意设定且不会导致计算量的增加.将常规有限元网格与子结构进行拼装,即可同时满足有限元网格截断边界距离不均匀部分任意近,而求解区域的人工边界距离不均匀部分充分远的要求.这种方法在区域离散时仅用到了有限元网格,其中涉及到的精细积分算法也易于实现,在处理波导的不连续性以及相关问题上,具有简单易行、精确高效的优点.

## 2. 电磁波导的对偶变量变分原理

电磁波导的对偶变量变分原理已在文献 [5] 中给出,由于本文需要将半解析对偶棱边元与常规的三维棱边元进行组合,所以在此处从单变量的变分原理出发,重新推导出电磁波导的对偶变量变分原理,以证明二者具有相容性.

考察电磁波导的一个区段,其横截面为  $\Omega$ ,而纵向长度有限,两个端面的  $z$  轴坐标分别为  $z_a, z_b$ .与矢量波动方程相应的单变量变分原理如下:

$$\Pi(E) = \frac{1}{2} \int_{z_a}^{z_b} \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{\mu_r} (\nabla \times E) \cdot (\nabla \times E) - k_0^2 \epsilon_r E \cdot E \right] d\Omega dz, \quad \delta \Pi(E) = 0. \quad (1)$$

引入对应于 Faraday 定律的频域微分方程,并对(1)式做适当修改,可得

$$\begin{aligned} \Pi(E, H) = & -j\omega\mu_0 \int_{z_a}^{z_b} \int_{\Omega} \left[ H \cdot (\nabla \times E) \right. \\ & + \frac{1}{2} j\omega\mu_r H \cdot H \\ & \left. - \frac{1}{2} j\omega\epsilon_r E \cdot E \right] d\Omega dz, \end{aligned} \quad (2)$$

其中  $E, H$  为复数函数,且视为独立的变量.

把  $E, H$  分为纵向与横向分量

$$\begin{aligned} E &= E_t + E_z = (E_x x + E_y y) + E_z z, \\ H &= H_t + H_z = (H_x x + H_y y) + H_z z, \end{aligned} \quad (3)$$

并把矢量算子  $\nabla$  拆为纵向与横向算子,单独记  $z$  方向微商  $\alpha(\cdot) \partial_z = (\cdot) \partial_z$ , 即

$$\nabla = \nabla_t + (\cdot) z,$$

其中

$$\nabla_t = x \partial / \partial x + y \partial / \partial y \quad (4)$$

基于(3)(4)式并采用矢量的恒等运算及 Gauss 定理,可以将(2)式展开为

$$\begin{aligned} \Pi(E, H) = & -j\omega\mu_0 \int_{z_a}^{z_b} \int_{\Omega} \left[ (\dot{E}_t \times H_t) \cdot z \right. \\ & + H_z \cdot \nabla_t \times E_t + E_z \cdot \nabla_t \times H_t \\ & + j\omega\mu_r (H_t \cdot H_t + H_z \cdot H_z) / 2 \\ & \left. - j\omega\epsilon_r (E_t \cdot E_t + E_z \cdot E_z) / 2 \right] d\Omega dz \end{aligned} \quad (5)$$

对  $E_z, H_z$  先行变分,得到如下关系式:

$$\begin{aligned} E_z &= -j \nabla_t \times H_t / (\omega \epsilon_r), \\ H_z &= j \nabla_t \times E_t / (\omega \mu_r). \end{aligned} \quad (6)$$

将上式代入(5)式,有

$$\begin{aligned} \Pi(E_t, H_t) = & -j\omega\mu_0 \int_{z_a}^{z_b} \int_{\Omega} \left[ (\dot{E}_t \times H_t) \cdot z \right. \\ & - j\omega\epsilon_r E_t \cdot E_t / 2 + j\omega\mu_r H_t \cdot H_t / 2 \\ & + j(\nabla_t \times E_t) \cdot (\nabla_t \times E_t) / (2\omega\mu_r) \\ & \left. - j(\nabla_t \times H_t) \cdot (\nabla_t \times H_t) / (2\omega\epsilon_r) \right] \\ & \times d\Omega dz. \end{aligned} \quad (7)$$

至此,范函式(7)中所有的未知量及微分算子均为横向的矢量形式,但仍需做进一步的变换才能将问题导入 Hamilton 体系.取对偶变量<sup>[6]</sup>为

$$q = E_t, \quad p = j\omega\mu_0 z \times H_t. \quad (8)$$

将上式代入(7)式,经过简单的矢量式恒等运算,即可得到关于对偶变量  $q, p$  的变分原理

$$\begin{aligned} \Pi(q, p) = & \int_{z_a}^{z_b} \int_{\Omega} \left[ p \cdot \dot{q} - H(q, p) \right] d\Omega dz, \\ \delta \Pi = & 0, \end{aligned} \quad (9)$$

其中  $H(q, p)$  即是 Hamilton 函数

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = [k_0^2 \epsilon_r \mathbf{q} \cdot \mathbf{q} - (\nabla_i \times \mathbf{q}) \cdot (\nabla_i \times \mathbf{q}) / \mu_r + \mu_r \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} - (\nabla_i \cdot \mathbf{p}) (\nabla_i \cdot \mathbf{p}) / (k_0^2 \epsilon_r)] / 2. \quad (10)$$

### 3. 对偶方程组与辛本征值问题

完成(9)式的变分运算即得出电磁波导的对偶微分方程

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{H}\mathbf{v}, \quad (11)$$

式中各项定义为

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & \mu_r \cdot + 1/(k_0^2 \epsilon_r) \nabla_i \nabla_i \cdot \\ -k_0^2 \epsilon_r \cdot + 1/\mu_r \nabla_i \times \nabla_i \times & 0 \end{bmatrix}. \quad (12)$$

与方程(11)对应的理想导体侧边边界条件则是在侧边界  $\Gamma$  上,

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \times \mathbf{E}_i = 0 &\Rightarrow \mathbf{n} \times \mathbf{q} = 0, \\ \mathbf{E}_z = 0 &\Rightarrow \nabla_i \cdot \mathbf{p} = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

采用分离变量法,令

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\psi}(x, y)Z(z), \quad (14)$$

分离变量后的纵向方程为  $\dot{Z} = \gamma Z$ , 容易解得

$$Z(z) = \exp(\gamma z). \quad (15)$$

相应得到横向本征方程

$$\mathbf{H}\boldsymbol{\psi} = \gamma\boldsymbol{\psi}, \quad (16)$$

式中  $\gamma, \boldsymbol{\psi}$  分别是待求的本征值与本征向量函数。

可以验证本征方程(16)的算子矩阵  $\mathbf{H}$  是 Hamilton 型<sup>[7]</sup>的,也即对于任意两个满足侧边边界条件的状态函数向量  $\mathbf{v}_a$  与  $\mathbf{v}_b$ , 运用矢量 Green 公式及 Gauss 定理并结合边界条件(13)可以证得

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_a \cdot \mathbf{H}\mathbf{v}_b &= \iint_{\Omega} \mathbf{v}_a \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{v}_b d\Omega \\ &= \iint_{\Omega} [ -k_0^2 \epsilon_r \mathbf{q}_a \cdot \mathbf{q}_b \\ &\quad + 1/\mu_r \mathbf{q}_a \cdot \nabla_i \times \nabla_i \times \mathbf{q}_b - \mu_r \mathbf{p}_a \cdot \mathbf{p}_b \\ &\quad + 1/(k_0^2 \epsilon_r) \mathbf{p}_a \cdot \nabla_i \nabla_i \cdot \mathbf{p}_b ] d\Omega \\ &= \iint_{\Omega} [ -k_0^2 \epsilon_r \mathbf{q}_b \cdot \mathbf{q}_a \\ &\quad + 1/\mu_r \mathbf{q}_b \cdot \nabla_i \times \nabla_i \times \mathbf{q}_a - \mu_r \mathbf{p}_b \cdot \mathbf{p}_a \\ &\quad + 1/(k_0^2 \epsilon_r) \mathbf{p}_b \cdot \nabla_i \nabla_i \cdot \mathbf{p}_a ] d\Omega \\ &= \iint_{\Omega} \mathbf{v}_b \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{v}_a d\Omega = \mathbf{v}_b \cdot \mathbf{H}\mathbf{v}_a. \end{aligned} \quad (17)$$

上式中尖括号算子表示辛内积,定义为

$$\mathbf{v}_a \cdot \mathbf{v}_b \stackrel{\text{def}}{=} \iint_{\Omega} \mathbf{v}_a \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{v}_b d\Omega, \quad (18)$$

其中  $\mathbf{J}$  为 2 阶单元辛矩阵

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (19)$$

对于 Hamilton 型的算子矩阵  $\mathbf{H}$ , 有一系列关于其本征值问题的结论. 如  $\gamma$  是本征值则  $-\gamma$  一定也是本征值. 因此全部本征值可以分为两类,即

$$\begin{aligned} 1) \gamma_i, \text{Re}(\gamma_i) < 0 \text{ 或 } \text{Re}(\gamma_i) = 0 \wedge \text{Im}(\gamma_i) > 0, \\ 2) \gamma_{-i}, \gamma_{-i} = -\gamma_{+i} \quad (i = 1, 2, \dots), \end{aligned} \quad (20)$$

其中  $\text{Re}(\gamma_i) = 0$  的本征解即对应于波的传播.

本征值  $\gamma_i$  和  $\gamma_{-i}$  所对应的本征向量函数  $\boldsymbol{\psi}_i$  和  $\boldsymbol{\psi}_{-i}$  互为辛共轭.  $\mathbf{H}$  矩阵的本征函数向量相互间的共轭辛正交归一关系<sup>[7]</sup>为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\psi}_i \cdot \boldsymbol{\psi}_j &= 0, \quad \boldsymbol{\psi}_{-i} \cdot \boldsymbol{\psi}_{-j} = 0, \\ \boldsymbol{\psi}_i \cdot \boldsymbol{\psi}_{-j} &= \delta_{ij} \quad (i, j > 0). \end{aligned} \quad (21)$$

将本征函数向量编排为  $\boldsymbol{\psi}_1, \boldsymbol{\psi}_{-1}, \boldsymbol{\psi}_2, \boldsymbol{\psi}_{-2}, \dots$ , 这些本征函数向量将成为状态空间的一个完备系. 根据(21),任何横截面上的状态空间的函数  $\mathbf{v}(x, y)$  皆可以由本征函数向量来展开

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(x, y) &= \sum_{i=1, 2, \dots} (a_i \boldsymbol{\psi}_i + b_i \boldsymbol{\psi}_{-i}), \\ a_i &= -\boldsymbol{\psi}_{-i} \cdot \mathbf{v}, \\ b_i &= \boldsymbol{\psi}_i \cdot \mathbf{v}. \end{aligned} \quad (22)$$

对于一般形状的横截面或填充有不均匀介质的电磁波导,其解析求解很困难. 对此只能采用数值方法进行求解. 在对横截面进行有限元半解析离散后,Hamilton 算子矩阵转化为 Hamilton 矩阵,从而(16)也成为 Hamilton 矩阵的本征值问题.

### 4. 对偶棱边元及半解析离散

采用对偶棱边元<sup>[8]</sup>,对电磁波导的横截面进行半解析离散

$$\begin{aligned} \mathbf{q}^e(x, y, z) &= \sum_{i=1}^n \mathbf{N}_{ie}^e(x, y) q_i^e(z) \\ &= \{ \mathbf{N}_{ie}^e(x, y) \}^T \{ q_i^e(z) \}, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^e(x, y, z) &= \sum_{i=1}^n \mathbf{N}_{in}^e(x, y) p_i^e(z) \\ &= \{ \mathbf{N}_{in}^e(x, y) \}^T \{ p_i^e(z) \}, \end{aligned} \quad (24)$$

其中  $e$  表示单元编号,  $n$  表示单元的棱边数,  $\mathbf{N}_{ie}^e$  与  $\mathbf{N}_{in}^e$  分别为切向与法向矢量基插值函数<sup>[9]</sup>,在对偶棱边元中分别用来离散横向分量  $\mathbf{q}, \mathbf{p}$ ,如图 2 所示.

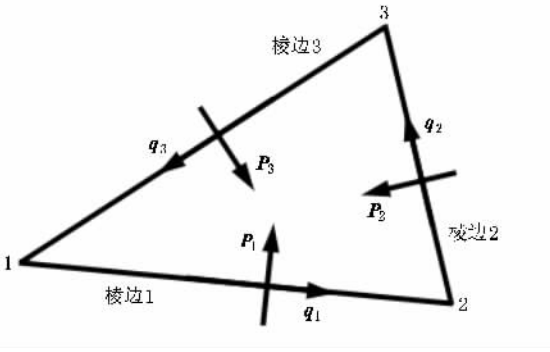


图2 对偶棱边元

采用全局标记并对单元系数矩阵进行求和,变分原理(9)即改写为

$$\Pi = \int_{z_a}^{z_b} (\tilde{p}_g^T \tilde{W}_g \dot{\tilde{q}}_g + \tilde{q}_g^T \tilde{B}_g \tilde{q}_g / 2 - \tilde{p}_g^T \tilde{D}_g \tilde{p}_g / 2 - \tilde{p}_g^T \tilde{A}_g \tilde{q}_g) dz, \delta \Pi = 0 \quad (25)$$

式中,

$$\tilde{W}_g = \sum_{e=1}^M \iint_{\Omega_e} \{N_n^e\} \cdot \{N_t^e\}^T d\Omega, \quad (26)$$

$$\tilde{B}_g = \sum_{e=1}^M \iint_{\Omega_e} \left( \frac{1}{\mu_r} \{\nabla_t \times N_t^e\} \cdot \{\nabla_t \times N_t^e\}^T - k_0^2 \epsilon_r \{N_t^e\} \cdot \{N_t^e\}^T \right) d\Omega, \quad (27)$$

$$\tilde{D}_g = \sum_{e=1}^M \iint_{\Omega_e} \left( \mu_r \{N_n^e\} \cdot \{N_n^e\}^T - \frac{1}{k_0^2 \epsilon_r} \{\nabla_t \cdot N_n^e\} \cdot \{\nabla_t \cdot N_n^e\}^T \right) d\Omega, \quad (28)$$

$$\tilde{A}_g = 0. \quad (29)$$

其中  $M$  表示横截面上的单元数目.

需要强调的是,尽管上一节已经证明变分原理(9)已导向 Hamilton 对偶体系,然而经过半解析离散后的变分原理(25)却不再保持有辛结构.其原因在于对偶变量  $q, p$  经过离散后出现了一个交互阵  $\tilde{W}_g$ ,而且由于在进行变分之前需要首先施加侧面的边界条件,这一步骤会导致  $\tilde{q}_g, \tilde{p}_g$  维数不再相同,从而不能构成 Hamilton 对偶变量.通过变换的方法使  $\tilde{q}_g, \tilde{p}_g$  具有相同的维数并消去交互阵  $\tilde{W}_g$ ,从而将半解析离散后的变分原理重新导入 Hamilton 对偶体系的过程即是辛正则化.辛正则化实施起来不只一种途径,其具体的公式推导可以参见文献[10],限于篇幅,此处直接给出执行辛正则化后得到的变分原理

$$\Pi = \int_{z_a}^{z_b} [p_g^T \dot{q}_g - H(p_g, q_g)] dz, \delta \Pi = 0, \quad (30)$$

$$H(p_g, q_g) = p_g^T A_g q_g - q_g^T B_g q_g / 2 + p_g^T D_g p_g / 2. \quad (31)$$

经过变换,上式中的  $A_g, B_g, D_g$  已与(25)式中的有所不同,此时对偶变量  $q_g, p_g$  再次具有相同的维数,因此均去掉上面的波号以示区别.此时(30)式已是 Hamilton 体系对偶变量变分原理了,参照结构力学中的概念,半解析离散后的 Hamilton 函数  $H(p_g, q_g)$  也可称为波导区段的混合能密度<sup>[11]</sup>.

### 5. 波导的区段势能、混合能以及 Riccati 方程的精细积分

从(30)式可以导出经过半解析离散的对偶微分方程

$$\dot{q}_g = A_g q_g + D_g p_g, \quad (32)$$

$$\dot{p}_g = B_g q_g - A_g^T p_g. \quad (33)$$

根据解的唯一性定理<sup>[12]</sup>,给定波导两端的切向电场向量

$$q_g(z_a) = q_a, q_g(z_b) = q_b, \quad (34)$$

即可求解该对偶方程,从而计算出波导区段的电磁势能

$$\Pi(q_a, q_b) = \int_{z_a}^{z_b} [p_g^T \dot{q}_g - H(p_g, q_g)] dz. \quad (35)$$

波导的区段势能应该是两端切向电场向量的二次型函数,即

$$\Pi(q_a, q_b) = q_a^T K_{aa} q_a / 2 + q_b^T K_{bb} q_b / 2 + q_a^T K_{ba} q_b, \quad (36)$$

其中矩阵  $K_{aa}, K_{ba}, K_{bb}$  即可构成波导区段的出口刚度阵,从而可以实现与非均匀区域的常规有限元网格的拼装.然而关于(35)式的积分并不容易,只能借助于数值积分技术,这样无法保证积分过程的效率与精度,也失去了半解析有限元的意义.

一个可行的思路是根据系统矩阵  $A_g, B_g, D_g$  来生成出口刚度阵.为此选用波导两端的变量  $q_a, q_b$  作为基本未知量,通过对区段势能的 Legendre 变换引入波导的区段混合能<sup>[13]</sup>

$$\Gamma(q_a, p_b) = p_b^T q_b - \Pi(q_a, q_b). \quad (37)$$

通过对上式的变分可以看出

$$\delta \Gamma(q_a, p_b) = q_b^T \delta p_b + p_a^T \delta q_a, \quad (38)$$

$$q_b = \partial \Gamma / \partial p_b,$$

$$p_a = \partial \Gamma / \partial q_a. \quad (39)$$

由(37)式可知区段混合能同样是二次型函数,可表

达为

$$\Gamma(q_a, p_b) = -q_a^T Q q_a / 2 + p_b^T F q_a + p_b^T G p_b / 2. \tag{40}$$

综合(36)(37)(39)(40)式即可知矩阵  $K_{aa}, K_{ba}, K_{bb}$  与  $Q, F, G$  是可以相互转化的, 其关系如下:

$$\begin{aligned} K_{aa} &= Q + F^T G^{-1} F, \\ K_{ba} &= -G^{-1} F, \\ K_{bb} &= G^{-1}, \\ Q &= K_{aa} - K_{ba}^T K_{bb}^{-1} K_{ba}, \\ F &= -K_{bb}^{-1} K_{ba}, \\ G &= K_{bb}^{-1}. \end{aligned} \tag{41}$$

当考虑的波导区段为沿  $z$  方向均匀, 也即其几何与材料参数沿  $z$  坐标不变时, 矩阵函数仅是波导的区段长度

$$\eta = z_b - z_a, \tag{43}$$

的函数, 即有  $Q(\eta), F(\eta), G(\eta)$ . 相应于区段混合能的矩阵  $Q(\eta), F(\eta), G(\eta)$  可由相应于区段混合能密度的矩阵  $A_g, B_g, D_g$  积分得到, 其关系满足联立 Riccati 微分方程

$$\begin{aligned} dF/d\eta &= (A_g - GB_g)F = F(A_g - D_gQ), \\ dG/d\eta &= D_g + A_gG + GA_g^T - GB_gG = FD_gF^T, \\ dQ/d\eta &= F^TB_gF = B_g + A_g^TQ + QA_g - QD_gQ. \end{aligned} \tag{44}$$

其初始条件为, 当  $\eta \rightarrow 0+$  时,

$$Q = 0, G = 0, F = I. \tag{45}$$

方程(44)看起来很复杂, 但可以采用 Riccati 微分方程的精细积分算法进行求解. 精细积分虽然也是一种数值积分方法, 但其计算精度可以超过现有计算机字长所决定的精度范围, 从某种意义上说, 也就是得到了计算机上的解析解. 限于篇幅, 本文仅在附录 A 中给出实现精细积分的基本步骤, 其详细的公式推导及精度分析可以参考文献 [14].

如图 3 所示, 对于波导的不均匀部分, 采用常规的有限元进行离散, 此时也一并得到了波导均匀区段横截面上的网格, 即完成了半解析离散. 由精细积分算法求得波导均匀区段的矩阵  $Q(\eta), F(\eta), G(\eta)$  并根据(41)式将其转化为区段的两端出口刚度阵之后, 即可将该波导区段视为一个子结构. 子结构仅在两端的出口面上存在未知量, 将其与波导不均匀部分的常规有限元网格进行拼装, 然后在求解区域的截断边界, 也即是图 3 中标识为“2”的边界处给出相应的边界条件, 即可对整个波导不连续性

问题进行求解.

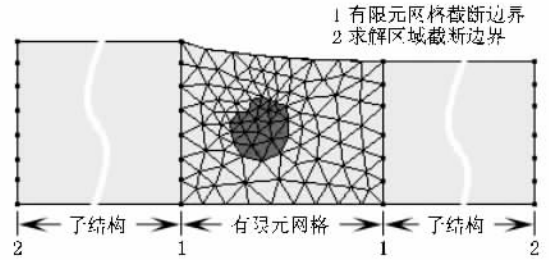


图 3 有限元网格与子结构拼装

采用以上的求解思路, 可以将有限元离散的网格缩减至最小, 同时截断求解区域的近似人工边界可以距离不均匀部分充分远. 有限元网格与人工边界之间的子结构无论纵向长度为多少, 均可采用精细积分一次性求出, 其计算时间不会有任何的变化. 可以看出, 这种算法集精确、高效于一身, 对于求解波导的不连续性问题是非常适合的.

## 6. 数值算例

### 6.1. 平行板波导的不连续性问题

考虑如图 4 所示的结构, 平行板波导的两板之间距离为 3.5 cm, 波导中插入一个长为 5 cm 的矩形介质棒. 在计算时取入射波的波长  $\lambda = 10$  cm, 设定距离介质棒左右两端各 10 cm 处为吸收边界, 并将此结构从介质不连续处分开, 成为三个纵向长度分别为 10.5, 10 cm 的子结构. 每个子结构则采用由半解析离散及精细积分计算该子结构出口刚度阵. 对于插入的介质棒分别取不同的相对介电常数, 画出反射系数和穿透系数随介质棒高度变化的曲线图, 结果与文献 [15] 中的图 4.16 一致. 同时给出用加密矩形网格有限元得到的结果作为参考 (见图 5 和图 6), 可以验证由本文方法所得计算结果的正确性.



图 4 插入介质棒的平行板波导

在计算中, 人工边界的设置需距离介质棒足够远 (通常情况下要大于一个波长). 人工边界距离不均匀部分越远, 则边界条件的近似程度越好, 计算精

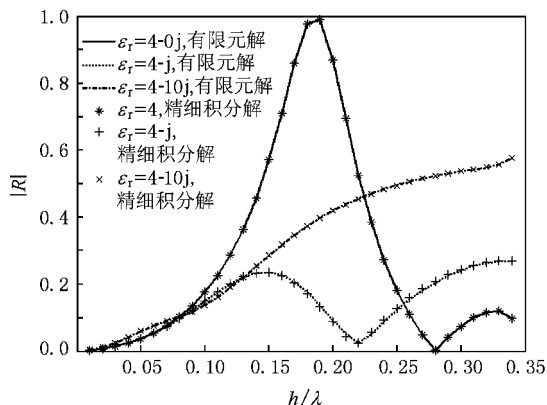


图 5 当  $\lambda = 10 \text{ cm}$  时 精细积分与有限元求解反射系数随介质棒高度  $h$  的变化

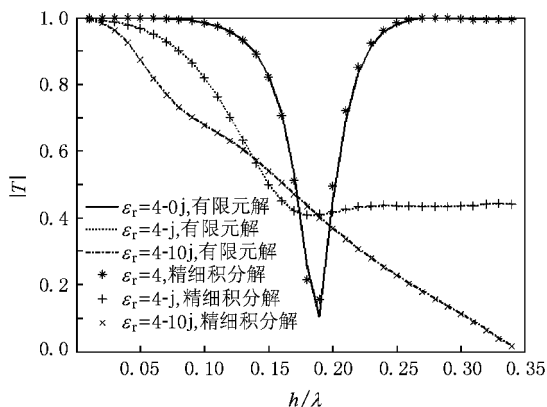


图 6 当  $\lambda = 10 \text{ cm}$  时 精细积分与有限元求解穿透系数随介质棒高度  $h$  的变化

度也就越高。如果完全采用有限元计算,更远的边界设置即意味着更大的计算区域与计算量。而有限元与子结构拼装的方法则可以任意调整人工边界的位置,而在计算时间上不会有任何增加,因此在解决这一类开放区域的问题上有很大优势。为验证这一结论,可以取介质棒的相对介电常数  $\epsilon_r = 4$ ,因为此时介质是无损的,根据能量守恒,应该有入射能量的损耗

$$D = 1 - (|R|^2 + |T|^2) = 0, \quad (46)$$

上式中  $R$  和  $T$  分别是反射系数和穿透系数,在求解出电磁场的分布后即可根据公式求出<sup>[15]</sup>。(46)式反映的是一种理想情况,在计算中由于各种误差的存在, $D$  总是一个很小的非零数值。故能量损耗比率  $D$  可以作为判断算法数值精度的一个指标。由图 7 可以看出,当介质棒高度为  $1.75 \text{ cm}$  时,随着设定的子结构长度的增加,计算得到的能量损耗比率  $D$ ,

即计算误差,下降得很快,而这都是以不增加任何计算量为前提的。

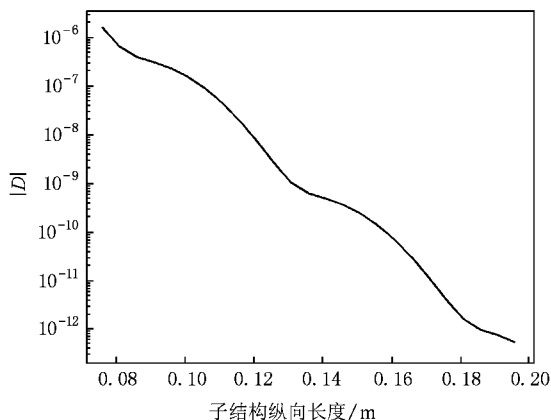


图 7 计算误差(能量损耗比率)随子结构长度  $h$  的变化

### 6.2. 矩形电磁波导的不连续性问题

在波导的不连续性问题中,有一大类问题可以归结于或近似为多步阶梯状的不连续形式。波导的几何与材料参数的分布沿横截面可以任意变化,但其纵向总是分段定常的,呈阶梯状,如图 8 所示。对于这样一类问题,将整个待求解区域划分为若干个沿纵向定常的区段,即可在每一段内采用本文所阐述的半解析有限元方法计算出子结构的出口刚度矩阵,将所有的子结构拼装起来即可形成总体的系数矩阵,进而可得到原问题的解。这种分段半解析有限元的方法无疑具有极高的精度和效率。

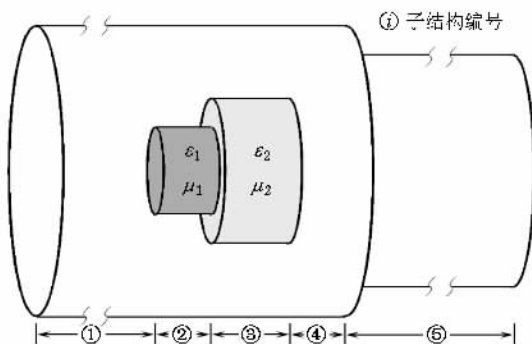


图 8 多步阶梯状不连续性问题及子结构区段划分

以矩形波导为例,其内部填充有一相对介电常数  $\epsilon_r = 6$  的长方体障碍物,波导及障碍物的几何尺寸如图 9,其中  $b$  为矩形波导的高度<sup>[16]</sup>。分别用常规长方体棱边元及分段半解析对偶棱边元求解这一问题,为对两种方法进行比较,取半解析对偶棱边元

的网格与常规三维棱边元网格在波导横截面上的分布一致,并将人工边界设置在距离障碍物左右两端  $0.8b$  处,如图 10,11 所示.由于该问题不存在解析解,另给出在如图 12 所示的加密的常规三维棱边元网格下的计算结果作为参考.

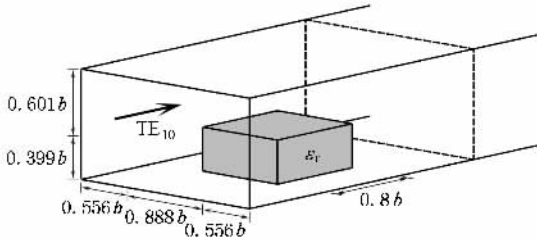


图 9 带有障碍物的矩形波导

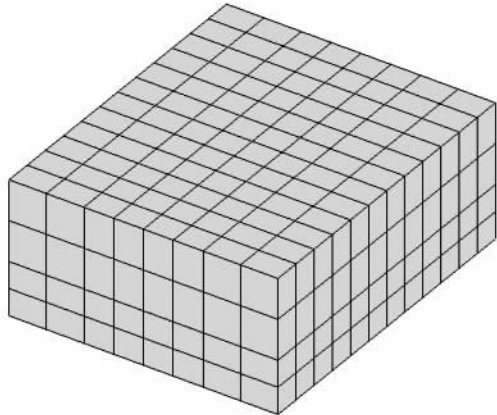


图 10 常规三维棱边元网格

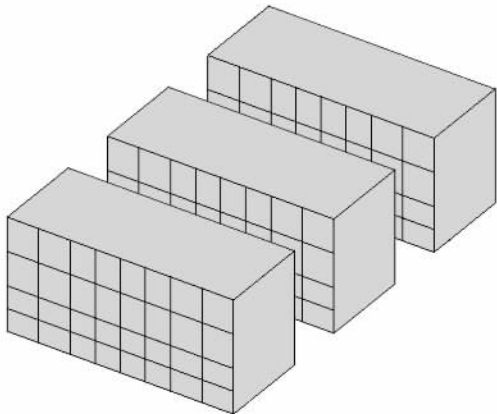


图 11 分段半解析对偶棱边元

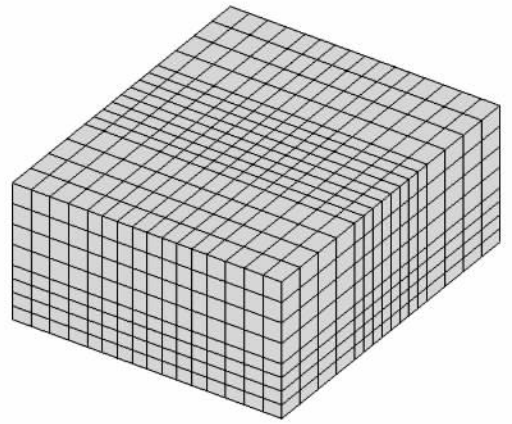


图 12 加密的三维棱边元网格

$|S_{11}|^{[16]}$ . 分析图 13 可知,尽管图 10 与 11 具有相同的横截面离散网格,但由于后者采用了精细积分,在纵方向上的精度与解析方法相当,远高于常规的有限元离散,故由后者得到的反射系数曲线比前者更接近于参考的计算结果.

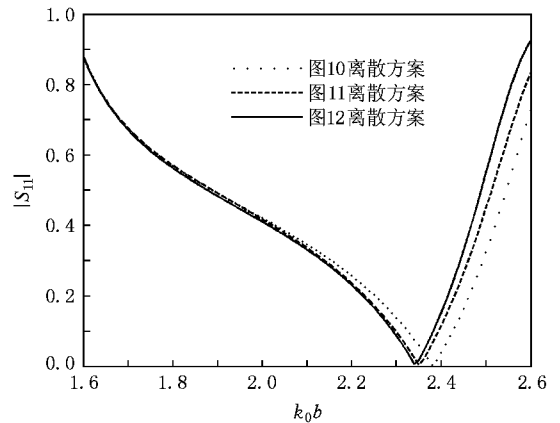


图 13 由不同离散方案计算得到的反射系数  $|S_{11}|$

### 7. 结 论

本文阐述了半解析有限元结合常规有限元方法求解波导不连续性问题思路,并通过二维和三维的算例展示了这种方法的高精度与高效率.半解析有限元易于实现,其纵向长度可以灵活地任意变化,而且因为采用了精细积分算法,具有很高的精度.这种方法在微波器件、集成光学网路的分析和设计中可以发挥很大的作用.

图 13 给出由以上几种离散方案计算得到的在不同工作频率下对应于主模  $TE_{10}$  的反射系数

## 附录 A Riccati 方程的精细积分算法

采用精细积分算法求解 Riccati 方程时有两处要点,其一在于运用  $2N$  类算法对积分区段进行细分,以利于 Taylor 级数展开的顺利进行. 设定初始积分步长为  $\eta$ , 将之继续细分为  $2^N$  段, 比如选择  $N=20$  则有

$$\tau = \eta/2^N, 2^N = 1048576. \quad (A1)$$

$\eta$  本身是一个有限长度的区段, 如此  $\tau$  将成为一个非常小的量, 首先在小区段  $\tau$  内对矩阵  $F, G, Q$  做 Taylor 级数展开

$$\begin{aligned} F(\tau) &= I + F'(\tau), \\ F'(\tau) &= \varphi_1 \tau + \varphi_2 \tau^2 + \varphi_3 \tau^3 + \varphi_4 \tau^4 + O(\tau^5), \\ G(\tau) &= \gamma_1 \tau + \gamma_2 \tau^2 + \gamma_3 \tau^3 + \gamma_4 \tau^4 + O(\tau^5), \\ Q(\tau) &= \theta_1 \tau + \theta_2 \tau^2 + \theta_3 \tau^3 + \theta_4 \tau^4 + O(\tau^5), \end{aligned} \quad (A2)$$

其中  $\varphi, \gamma, \theta$  为 Taylor 展开的系数矩阵, 其维数与  $F, G, Q$  阵相同. 将 A2 式代入方程 (44), 通过比较  $\tau$  的各阶幂次即可得到各系数矩阵的表达式

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= D_g, \\ \gamma_2 &= (A_g \gamma_1 + \gamma_1 A_g^T) / 2, \\ \gamma_3 &= (A_g \gamma_2 + \gamma_2 A_g^T - \gamma_1 B_g \gamma_1) / 3, \\ \gamma_4 &= (A_g \gamma_3 + \gamma_3 A_g^T - \gamma_2 B_g \gamma_1 - \gamma_1 B_g \gamma_2) / 4. \end{aligned} \quad (A3)$$

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= A_g, \\ \varphi_2 &= (A_g \varphi_1 - \gamma_1 B_g) / 2, \\ \varphi_3 &= (A_g \varphi_2 - \gamma_2 B_g - \gamma_1 B_g \varphi_1) / 3, \\ \varphi_4 &= (A_g \varphi_3 - \gamma_3 B_g - \gamma_2 B_g \varphi_1 - \gamma_1 B_g \varphi_2) / 4. \end{aligned} \quad (A4)$$

$$\begin{aligned} \theta_1 &= B_g, \\ \theta_2 &= (\varphi_1^T B_g + B_g \varphi_1) / 2, \\ \theta_3 &= (\varphi_2^T B_g + B_g \varphi_2 + \varphi_1^T B_g \varphi_1) / 3, \\ \theta_4 &= (\varphi_3^T B_g + B_g \varphi_3 + \varphi_2^T B_g \varphi_1 + \varphi_1^T B_g \varphi_2) / 4. \end{aligned} \quad (A5)$$

因为步长  $\tau$  已是一个很小的量, 则采用 Taylor 展开时略去的高阶项 ( $O(\tau^5)$ ) 与  $\eta$  区段相应的混合能矩阵的量级相比, 已往往超出了计算机字长所决定的精度范围之外, 可以忽略不计. 关于精细积分区段细分参数的选取以及精度分析可以参考文献 [6], 限于篇幅此处不再赘述.

得到  $\tau$  区段的矩阵  $F, G, Q$  后即可执行由两个  $\tau$  区段得到一个  $2\tau$  区段的合并公式

$$\begin{aligned} G(2\tau) &= G(\tau) + (I + F'(\tau)) G(\tau)^{-1} \\ &\quad + Q(\tau)^{-1} (I + F'(\tau))^{-1}, \\ F'(2\tau) &= (F'(\tau) - G(\tau) Q(\tau)^{-1} (I + G(\tau) Q(\tau))^{-1} \\ &\quad + (I + G(\tau) Q(\tau))^{-1} (F'(\tau) - G(\tau) Q(\tau)^{-1} \\ &\quad + F'(\tau) (I + G(\tau) Q(\tau))^{-1}) F'(\tau), \\ Q(2\tau) &= Q(\tau) + (I + F'(\tau)) Q(\tau)^{-1} \\ &\quad + G(\tau)^{-1} (I + F'(\tau)). \end{aligned} \quad (A6)$$

将以上的区段合并过程重复执行  $N$  次, 积分步长由  $\tau$  合并为初始长度  $\eta$ , 即可得到区段  $\eta$  的混合能矩阵  $F(\eta), G(\eta), Q(\eta)$ . 需要强调的是由于当  $\tau$  很小时,  $F(\tau)$  趋于单位阵, 在计算过程中  $F(\tau)$  阵的增量  $F'(\tau)$  如果直接与单位阵相加, 就会成为尾数, 其计算精度将会在计算机舍入操作中丧失殆尽. 合理的处理方式是在计算时仅记录待求矩阵的增量  $F'$  而不是全量  $F$ , 而在结束循环后再令  $F = I + F'$ , 此即为精细积分的第二个要点.

- [1] Peterson A F 1988 *Microwave Opt. Tech. Lett.* **1** 62
- [2] Berenger J P 1994 *J. Comput. Phys.* **2** 185
- [3] Silvester P P, Hsieh M S 1971 *IEE Proc. H* **12** 1743
- [4] Ise K, Inoue K, Koshiba M 1990 *IEEE Trans. Micro. Theory Tech.* **9** 1352
- [5] Zhong W X 2001 *J. Dalian University of Technology* **41** 379 (in Chinese) [钟万勰 2001 大连理工大学学报 **41** 379]
- [6] Zhong W X 2002 *Dual System in Applied Mechanics* (Beijing: Science Press) p28 (in Chinese) [钟万勰 2002 应用力学对偶体系(北京:科学出版社)第 28 页]
- [7] Yao W A, Zhong W X 2002 *Symplectic Elasticity* (Beijing: Higher Education Press) p14 (in Chinese) [姚伟岸、钟万勰 2002 辛弹性力学(北京:高等教育出版社)第 14 页]
- [8] Chen J F, Zheng C L, Zhong W X 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 2340 (in Chinese) [陈杰夫、郑长良、钟万勰 2006 物理学报 **55** 2340]
- [9] Rao S M, Wilton D R, Gilsson A W 1982 *IEEE Trans. Antennas Propagat.* **5** 409
- [10] Zhong W X 2003 *Acta Mech. Sin.* **4** 401 (in Chinese) [钟万勰 2003 力学学报 **4** 401]
- [11] Zhong W X 1995 *A New Systematic Methodology for Theory of Elasticity* (Dalian: Dalian University of Technology Press) p41 (in Chinese) [钟万勰 1995 弹性力学求解新体系(大连:大连理工大学出版社)第 41 页]
- [12] Bladel J V 1964 *Electromagnetic Fields* (New York: McGraw-Hill)
- [13] Zhong W X, Ouyang H J, Deng Z C 1993 *Computational Structural Mechanics and Optimal Control* (Dalian: Dalian University of Technology Press) p97 (in Chinese) [钟万勰、欧阳华江、邓子辰 1993 计算结构力学与最优控制(大连:大连理工大学出版社)第 97 页]
- [14] Zhong W X, Zhu J P 1996 *J. Num. Meth. Comput. Appl.* **1** 26
- [15] Jin J 2002 *The Finite Element Method in Electromagnetics* (2<sup>nd</sup> ed) (New York: John Wiley & Sons) p126
- [16] Ise K, Inoue K, Koshiba M 1991 *IEEE Trans. Micro. Theory Tech.* **8** 1289



# Semi-analytical dual edge element method and its application to waveguide discontinuities<sup>\*</sup>

Chen Jie-Fu<sup>†</sup> Zhu Bao Zhong Wan-Xie

( *State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment* , *Dalian University of Technology* , *Dalian* 116023 , *China* )

( Received 21 April 2008 ; revised manuscript received 18 June 2008 )

## Abstract

A semi-analytical dual edge element is proposed to solve the waveguide discontinuities. The governing equations for electromagnetic waveguide are converted to the Hamiltonian system, and the corresponding variational principle based on the dual variables is given. For waveguide sections which are homogeneous along the longitudinal direction, the dual edge element is employed to discretize the cross section, and a precise integration method based on the Riccati equations is used for the longitudinal integration to generate the export stiffness matrices. The whole waveguide discontinuity problems can be solved by combining the export stiffness matrices of homogeneous waveguide sections with the system matrices by conventional three-dimensional finite element method for inhomogeneous waveguide sections. Numerical examples demonstrate the high accuracy and efficiency of this method for solving waveguide discontinuity problems.

**Keywords** : waveguide discontinuities , semi-analytical symplectic method , dual edge element , precise integration method

**PACC** : 5235H , 0260

---

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China ( Grant No. 10632030 ).

<sup>†</sup> E-mail : chenjiefu@student.dlut.edu.cn