

二元随机网^{*}

陈宏斌¹⁾ 樊 瑛²⁾ 方锦清³⁾ 狄增如^{2)†}

1) 华侨大学信息科学与工程学院, 厦门 361021)

2) 北京师范大学系统科学系, 北京 100875)

3) 中国原子能科学研究院, 北京 102413)

(2008 年 6 月 13 日收到, 2008 年 9 月 2 日收到修改稿)

在二分网的基础上明确提出了二元网的概念. 同样包含两类节点, 二分网同类节点之间没有连接, 而二元网同类节点之间可以有连接. 构建了一个二元随机网模型, 并对二元随机网的结构性质进行研究. 二元随机网可以具有小世界效应, 并且其平均最短路径长度比单元随机网还要小. 另外, 两类节点的规模比是一个重要参量, 会对网络的结构性质产生重大影响.

关键词: 复杂网络, 二分网, 二元网, 小世界

PACC: 0520, 0590

1. 引 言

随着小世界特性^[1]和无标度特性^[2]的发现, 科学家们掀起了一股研究复杂网络的热潮, 研究者遍及物理、数学、生物、化学、医学、计算机、通讯、交通、经济等领域^[3-16].

人们最开始研究的是单元网(单顶点网). 最近几年, 二分网的研究逐渐受到重视^[17-23]. 二分网(bipartite networks, 也称二元网)指的是所有的环都是偶数条边的网络, 这时可以把网络中的节点分成两类, 同类节点之间没有连接^[24]. 二分网有很多实际例子和应用, 典型的如人类性关系网络^[25]、新陈代谢网络^[26]、图书借阅网络^[27]等. 社团结构是复杂网络中的重要概念^[5, 28-31]. 二分网中两类节点与社团的概念有着截然相反的区别, 二分网中同类节点之间紧密连接, 同类节点之间没有连接, 而社团刚好相反, 同一个社团成员之间连接紧密, 不同社团之间连接稀疏. 那么, 很自然的一个问题是, 在二分网以及不连通的两个社团这两种极端情况之间, 网络具有什么样的性质? Holme 等人提出了网络二分性(network bipartite)的概念, 同时提出了两种计算公式^[24].

据我们所知, 并没有人进行相关的建模和对该

类网络的性质进行详细地探讨. 在这里我们将二分网和二元网的概念进行区分界定: 网络中包含两类节点, 二分网中同类节点之间没有连接, 而二元网中同类节点之间可以有连接, 但异类节点具有不同性质, 或者可以通过一些性质来判定网络中存在异类节点. 所谓的通过一些性质来判定网络中存在异类节点, 指的是网络中两类节点具有相同的特征量, 如度分布等, 但是像二分网, 可以根据同类节点之间没有连接将不同类的节点区分开来. 二分网就是一种特殊的二元网. 本文主要考虑的就是同类节点之间的连接概率 p_s 和异类节点之间的连接概率 p_d 不同的二元网.

当同类节点之间的连接概率 p_s 大于异类节点之间的连接概率 p_d 时, 两类节点可以看成是单元网中的两个社团; 当同类节点之间的连接概率 p_s 小于异类节点之间的连接概率 p_d 时, 网络趋近于二分网. 问题是现实世界中是否存在同类节点之间的连接概率比异类节点之间的连接概率还小的网络呢? 答案是肯定的, 比如 Holme 等人^[24]提到的性关系网络^[25]、买卖关系网络以及食物链网络等. 另外在现实生活中还有很多实际的例子, 比如歌手与听众网络^[32, 33], 歌手也听其他歌手的歌, 因此除了大量歌手与听众之间的连接, 歌手之间也有少量连接; 又比如

* 国家自然科学基金(批准号: 70431002, 70771011)资助的课题.

† 通讯联系人. E-mail: zdi@bnu.edu.cn

师生关系网络,年轻教师也曾是老教师的学生,还有像两个国家之间的比赛,即使是随机抽签,也会经常出现对阵的两个选手国籍相同的情况,在这里我们给出了一个例子——第12届三星火灾杯世界围棋公开赛.在这届比赛上,日本选手在第一轮全军覆没,进入16强的全部是中韩两国棋手,其中中国棋手只有4人,韩国棋手有12人.图1画出了16强对阵网络(a)是以棋手国籍分类后的二元网(b)是进行社团划分后的单元网.从图中可以看到两种方式各有优点,二元网清晰地给出了棋手所在阵营(国籍),而单元网清晰地给出了棋手的分组情况.需要指出的是,分析二元网同样可以得到棋手的分组情况.很明显,图1(a)中左边8个点为一组,右边8个点为一组,而且不同组内两个国家棋手的比例一目了然.可见,二元网的表达给出了更丰富的信息.16强之间的比赛总共有15场次,其中相同国籍棋手对阵的场次有7次,不同国籍棋手对阵的场次有8次.整个网络可连边数为 $m = n(n-1)/2 = 120$,异类节点之间可连边数为 $m_d = n_1 n_2 = 4 \times 12 = 48$,同类节点之间可连边数为 $m_s = m - m_d = 120 - 48 = 72$.因此,整个网络的连接密度 $p = 15/120 = 0.125$,同类节点之间的连接概率 $p_s = 8/72 = 0.1111$,异类节点之间的连接概率 $p_d = 7/48 = 0.1458$.可见同类节点之

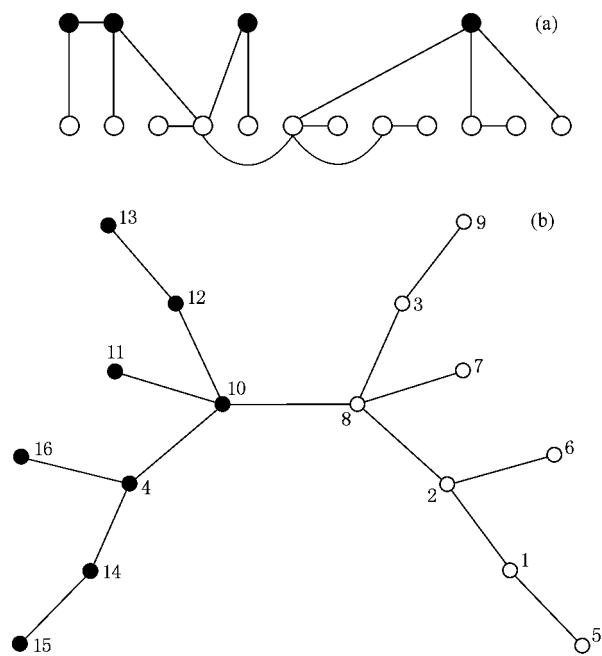


图1 第12届三星火灾杯世界围棋公开赛16强对阵网络(a)二元网,实心圆点为中国棋手,从左到右编号为1到4,空心圆圈为韩国棋手,从左到右编号为5到16(b)单元网,实心圆点和空心圆圈分别代表不同社团

间的连接概率比异类节点之间的连接概率还小.

2. 建 模

我们希望通过建立简单的模型来分析二元网的一些性质.一个随机连接的二元网,有如下5个基本特征量:网络规模 n ,两类节点规模之比 r (我们规定 r 为小规模与大规模之比,因此 $r \in [0, 1]$),整个网络的连接密度 p ,同类节点之间的连接概率 p_s ,异类节点之间的连接概率 p_d .这5个特征量并不是完全独立的.本文以 n, r, p 和 p_d 4个特征量为独立参量, p_s 可由这4个独立参量计算得到.显然,当 $p_d = p$ 时,网络就是单元随机网;当 $p_d \ll p$ 时,网络上两类节点就是非常清晰的两个社团;当 $p_d \gg p$ 时,如果两类节点规模相差不是特别悬殊,而且网络是稀疏网络,那么同类节点之间的连接概率 $p_s \rightarrow 0$,网络趋近于二分网.特别的,如果 $p_s = 0$,网络就是二分网.

下面我们介绍如何构造给定4个基本特征量的二元随机网.根据网络规模 n 和两类节点规模之比 r 计算出两类节点的规模分别为

$$n_1 = \frac{rn}{1+r}, n_2 = \frac{n}{1+r}. \quad (1)$$

再根据整个网络的连接密度 p 和异类节点之间的连接概率 p_d ,可以算出同类节点之间的连接概率为

$$p_s = \frac{\frac{pn(n-1)}{2} - p_d n_1 n_2}{\frac{n_1(n_1-1)}{2} + \frac{n_2(n_2-1)}{2}}. \quad (2)$$

有了 n_1, n_2, p_d 和 p_s ,我们就可以像构造单元随机网一样构造二元随机网.首先,对 n_1 个节点赋予类别属性 I, 对其余 n_2 个节点赋予类别属性 II. 在建立连接时,对任意两个节点,首先判断它们是同类节点还是异类节点.如果是同类节点,以概率 p_s 连边;如果是异类节点,以概率 p_d 连边.在这里,我们需要特别指出的是, p_s 和 p_d 的取值范围并不一定是 $[0, 1]$, 因为它们的取值要受到整个网络的连接密度 p 的限制.对于稀疏网络, p_s 和 p_d 的取值上限有可能小于1;对于稠密网络, p_s 和 p_d 的取值下限有可能大于0.极端的例子是,如果网络中没有连边,也就是网络的连接密度 $p = 0$, 则 p_s 和 p_d 也都只能为0;如果网络是个全连网络,即网络的连接密度 $p = 1$, 则 p_s 和 p_d 也都只能为1.

3. p_s 和 p_d 的取值范围

下面我们讨论 p_s 和 p_d 的取值上限和下限. 网络中平均连边数 $m = pn(n - 1)/2$, 同类节点间的平均连边数

$$m_s = p [n_1(n_1 - 1)/2 + n_2(n_2 - 1)/2] \\ = p_s n \left[n \frac{1 + r^2}{(1 + r)^2} - 1 \right] / 2, \quad (3)$$

异类节点间的平均连边数

$$m_d = p_d n_1 n_2 = p_d r n^2 (1 + r)^2. \quad (4)$$

因为连边数不能为负, 由 $m = m_s + m_d$, 可知 $m_s \leq m, m_d \leq m$. 故

$$p_s \leq p \frac{n(1 + r)^2(1 + r^2) - 1}{n - 1}, \quad (5)$$

$$p_d \leq p \frac{n(1 + r)^2(n - 1)}{2rn}. \quad (6)$$

当网络是个稀疏网络, 也就是 p 很小时, 上面两式的右边有可能小于 1, 也就是 p_s 和 p_d 的取值上限小于 1.

当 p_d 取最大值时 p_s 取最小值, 反之亦然. 由于连接概率不能大于 1, 因此 p_s 和 p_d 的取值下限并不一定为 0. 令 $p_d = 1$, 则可得此时同类节点间的连边数为

$$m_s = m - m_d = pn(n - 1)/2 - r n^2 (1 + r)^2. \quad (7)$$

结合(3)式, 可得 p_s 的取值下限为

$$p_{smin} = \frac{p(n - 1)(1 + r)^2 - 2rn}{n(1 + r^2) - (1 + r)^2}. \quad (8)$$

同样的, 令 $p_s = 1$, 可得 p_d 的取值下限为

$$p_{dmin} = 1 - \frac{(1 - p)(1 + r)^2(n - 1)}{2rn}. \quad (9)$$

综上可得 p_s 和 p_d 的取值范围

$$p_s \in \left[\max \left(0, \frac{p(n - 1)(1 + r)^2 - 2rn}{n(1 + r^2) - (1 + r)^2} \right), \min \left(1, p \frac{n(1 + r)^2(1 + r^2) - 1}{n - 1} \right) \right], \quad (10)$$

$$p_d \in \left[\max \left(0, 1 - \frac{(1 - p)(1 + r)^2(n - 1)}{2rn} \right), \min \left(1, p \frac{(1 + r)^2(n - 1)}{2rn} \right) \right]. \quad (11)$$

4. 二元随机网的特殊结构性质

4.1. 数值结果

4.1.1. 特殊的小世界效应

作为一个新的网络模型, 我们首先关注的当然是网络的平均最短路径长度和集聚系数有什么样的性质. 在这里, 所谓的平均是对整个网络而言的, 不考虑节点的类别. 也就是说, 相应的定义与单元网没有区别. 图 2 画出了在不同规模比下网络平均最短路径长度和集聚系数随异类节点连接概率 p_d 的变化曲线. 有意思的是, 曲线不是单调的, 而且不同规模比下曲线走势很不相同. 在 WS 模型^[1]中, 网络的平均最短路径长度和集聚系数随重连概率的增加都是单调下降的. 只不过, 在重连概率比较小时集聚系数随重连概率的增加下降得很慢, 而平均最短路径长度下降则快得多. 因此在小的重连概率下可以得到很好的小世界效应——同时具有较高的集聚系数和较小的平均最短路径长度. 我们的模型同样可以得到小世界效应, 像图 2(b) 中异类节点连接概率 $p_d = 0.2$ 附近 (c) 中 p_d 在 0.7 和 0.8 之间 (d) 中 $p_d = 1.0$ 附近. 注意到 $p_d = p$ 时网络实际上就是一个单元随机网. 因而具有小世界效应的二元随机网的平均最短路径比单元随机网的平均最短路径还要短. 而 Watts 等人提出的小世界网络的平均最短路径比单元随机网的平均最短路径要长. 因此可以说, 这样的二元网比 WS 小世界网络更有效率. 实际上, WS 模型虽然是第一个被提出的最接近真实网络的模型, 并开启了研究复杂网络的研究热潮, 但它同样存在一些不如人意的地方. 比如, 真实网络关系大多不是规则网络上的微调, 随机连接的因素要比规则连接的因素强得多. 另外, WS 模型中点的度分布太过单一, 这与真实网络中节点具有较宽的度分布不符. 因此, 后来一直有人在试图对 WS 模型进行改进, 或者建立新的模型以重现真实网络的所有特征^[34-37]. 我们提出的二元随机网基于随机连接, 并且节点具有较宽的度分布, 而且其平均最短路径比单元随机网的平均最短路径还要短. 遗憾的是点的度分布并不是无标度的. 这点也许可以在以后对模型改进后避免.

4.1.2. 平均最短路径以及集聚系数与规模比 r 的依赖关系

图 2 中不同规模比下曲线走势很不相同, 也就

是说,二元随机网两类节点的规模比 r 是一个重要参量.在现实生活中,规模比也有重要作用并被人们所关心.比如,在现实世界中广泛存在二八定律(巴莱多定律)——在任何一组东西中,最重要的只占其中一小部分,约 20%,其余 80%的尽管是多数,却是次要的.在管理学中,它说,通常一个企业 80%的利润来自它 20%的项目;在经济学界中,它说,20%的人手里掌握着 80%的财富.老百姓关心穷人和富人的比例.官民比可以从侧面反映一个政府的效率.在我国,中小学,特别是幼儿园,教师男女比例严重失调导致的社会问题已受到广泛关注,并进而导致男教师和女教师进入学校的门槛不同.而有些国家男女比例失衡成为了制约该国发展的一个重要因素.

从图 2 可以看到,网络平均最短路径长度的范围 (a) 中大概是在 (2.5, 3.2) 之间 (b) 中大概是在 (2.3, 3.0) 之间 (c) (d) 中大概是在 (1.9, 2.6) 之间.也就是说,随着规模比的降低,即两类节点规模差异增大,网络的效率在逐渐提高.网络集聚系数的范围 (a) (b) 中大概是在 (0.0, 0.1) 之间 (c) (d) 中

大概是在 (0.0, 0.4) 之间.也就是说,随着规模比的降低,网络集聚系数在提高.因此,在两类节点规模不均衡的情况下可以看到小世界效应.这点与现实社会中很多规模比都不是 1:1 相符合.

图 3 画出了在不同的异类节点连接概率 p_d 下,网络的平均最短路径长度和集聚系数随 I 类节点规模 n_1 (也就是随规模比 r) 的变化曲线.可以看到,网络的平均最短路径长度和集聚系数随规模比 r 的变化并不是单调的.并且,在不同的 p_d 下有不同的变化规律.当 p_d 比较小时,平均最短路径长度随规模比 r 的增加先增大再减小(但减小的幅度很小),集聚系数随规模比 r 的增加单调增加.当 p_d 比较大时,平均最短路径长度随规模比 r 的增加先减小再增大,集聚系数随规模比 r 的增加先增大再减小.因此,当 p_d 比较小时,改变规模比 r 无法使平均最短路径变短的同时让集聚系数提高;当 p_d 比较大时,选择合适的规模比 r 可以使平均最短路径变短的同时让集聚系数提高,也就是获得小世界效应.

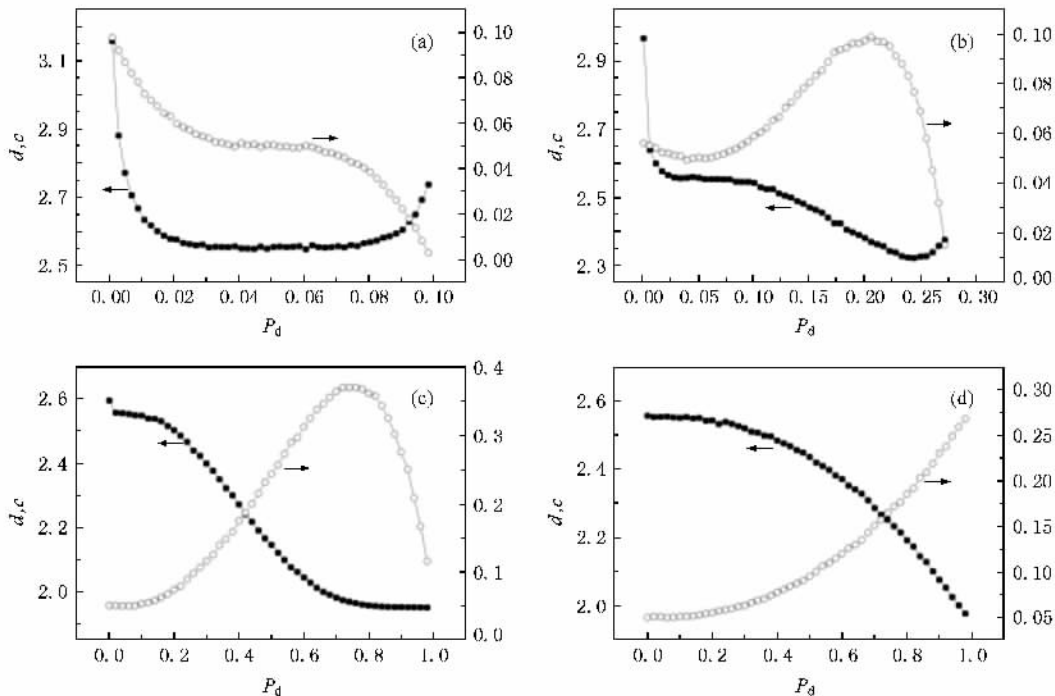


图 2 网络集聚系数和平均最短路径长度随异类节点连接概率 p_d 的变化 (a) $n_1 = 100$ (b) $n_1 = 20$ (c) $n_1 = 5$ (d) $n_1 = 1$; 其他参数为 $n = 200, p = 0.05$.所有的结果都是进行系综平均之后的结果,系综个数为 100.实心方块连线为平均最短路径长度,其纵坐标标度在左边,圆圈连线为集聚系数,其纵坐标标度在右边

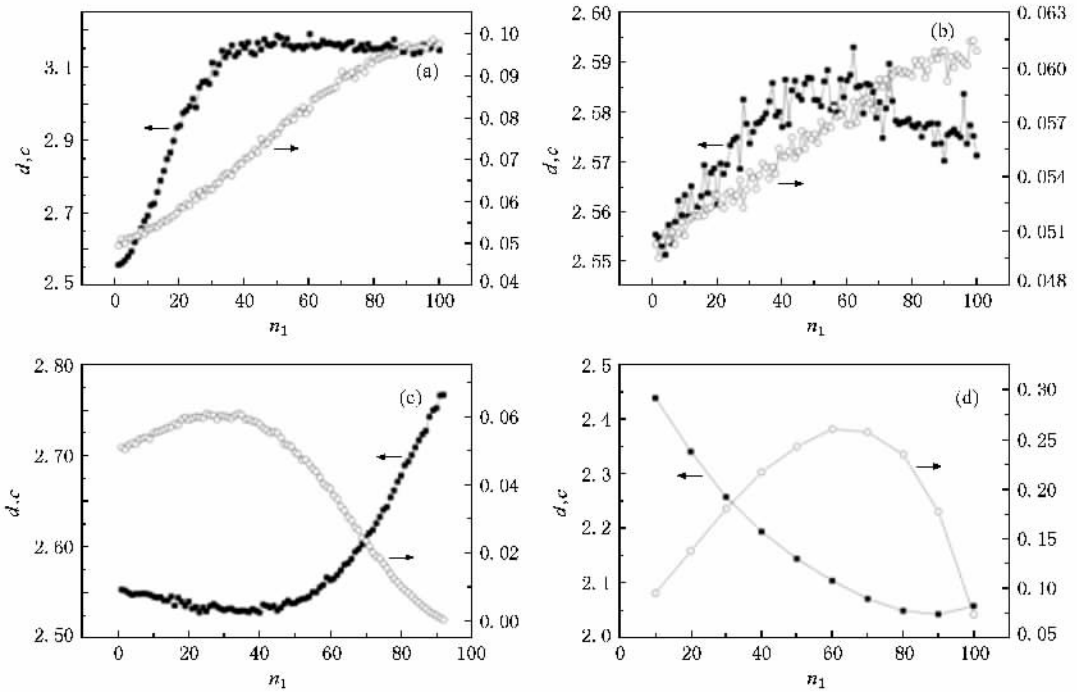


图3 网络集聚系数和平均最短路径长度随 I 类节点规模 n_1 的变化 (a) $p_d = 0.001$ (b) $p_d = 0.02$ (c) $p_d = 0.1$ (d) $p_d = 0.5$; 其他参数为 $n = 200$, $p = 0.05$. 所有的结果都是进行系综平均之后的结果, 系综个数为 100. 实心方块连线为平均最短路径长度, 其纵坐标标度在左边; 圆圈连线为集聚系数, 其纵坐标标度在右边

4.2. 理论分析

我们可以对图 2 中各条曲线作出定性甚至是定量的解释.

首先让我们来看看当两类节点的规模相同, 即 $r = 1$, 也就是 $n_1 = n_2 = n/2$ 时, 稀疏网络集聚系数和最短路径随异类节点连接概率 p_d 的变化. 当 p_d 接近于 0 时, 两类节点形成的社团要通过少数的社团间的连接才能连通, 异类节点连通效率太低, 因此平均最短路径长度比单元随机网要长. 随着异类节点连接概率 p_d 增大, 同类节点连接概率 p_s 减小. 当 p_d 取最大值时, $p_s = 0$, 即同类节点必须借助异类节点才能连通, 同类节点连通效率太低, 因此平均最短路径长度比单元随机网要长. 所以网络平均最短路径长度随 p_d 的变化是一条两头高中间低的曲线, 如图 2(a) 中实心方块连线所示.

注意到当 $p_d = p$ 时, 网络实际上就是单元随机网. 当 $p_d < p$, 两类节点实际上就是两个社团, 社团间连接比较紧密, 社团间连接比较稀疏. 随着 p_d 减小, p_s 不断增大, 因此网络集聚系数不断增大. 当 p_d 为零, 所有连接皆为同类节点间的连接, 网络分为两个非常清晰的社团, 社团规模为网络规模的一半, 社

团间可连边数为网络可连边数的四分之一, 社团间连边数为网络连边数的一半, 故此时 $c = 2c_0 = 2p$, 其中 c_0 为连接概率为 p 单元随机网的集聚系数(因为任意两个邻居之间的连接概率为 p , 所以网络集聚系数为 p). 当 p_d 取最大值时, $p_s = 0$, 所有连接皆为异类节点间的连接. 很容易算出 p_d 的最大值 $p_{dmax} = 2p$. 很显然, 由于每个节点的邻居都是另一类节点, 因此, 网络集聚系数随 p_d 的变化是一条从 $2p$ 到 0 的单调递减曲线, p_d 的取值范围为 $[0, 2p]$, 如图 2(a) 中圆圈连线所示.

接下来分析两类节点的规模相差比较大, 即 r 比较小的情况. 假设两类节点的规模分别为 n_1 和 n_2 , $n_1 < n_2$. 为描述方便, 下面我们称规模小的为 I 类节点, 称规模大的为 II 类节点. 当 $p_d < p$, 不管两类节点的规模相差是大还是小, 网络平均最短路径长度和集聚系数随 p_d 的变化本质上并无不同, 即随着 p_d 减小, 网络平均最短路径长度和集聚系数都增大. 不过, 两类节点规模不同的二元网相比于两类节点规模相同的二元网, 同类节点间的可连边数较多而异类节点间的可连边数较少, 而且节点规模差异

越大,同类节点间的可连边数越多.因此 $p_d = 0$ 时,两类节点的规模相差越大(r 越小),连通效率较差的异类节点间的路径数越少,导致平均最短路径也要更短.另一方面, r 越小则同类节点对越多而异类节点对越少,因此网络集聚系数越取决于同类节点间的连接概率.由于同类节点具有相同的实际连边数(即网络总实际连边数)而可连边数却越多,也就是同类节点间的连接概率会随着 r 的减小而减小,导致网络集聚系数越小.这在图 2 中体现为两条曲线的起始值,从(a)到(d)一个比一个小.

当 $p_d > p$,两种网络的平均最短路径长度和集聚系数随 p_d 的变化有本质差别.此时,对 r 比较小的网络而言,随着 p_d 增大不仅异类节点间的联系会更紧密,同时由于 I 类节点起到了类似 hub 的作用,II 类节点之间的连接效率也会提高.由于 II 类节点之间的连接路径占了同类节点之间连接路径的绝大多数,所以整个网络平均最短路径会变短.但是当 p_d 比较大时,增大 p_d 已经不能提高 II 类节点之间的连接效率,而只是使得 II 类节点通过 I 类节点连接的最短路径数增多.这时继续增大 p_d ,不仅不能改善网络效率,反而因为 II 类节点直接连接数目的降低而使得网络平均最短路径变长.因此网络平均最短路径长度随 p_d 的变化曲线是先降低后升高,如图 2(b)中实心方块连线所示.

显然,网络集聚系数由占了绝大多数的 II 类节点的平均集聚系数决定.因为异类节点间的可连边数很少,所以 p_d 的变化对 p_s 的影响很小,即 $\Delta p_s \ll \Delta p_d$.现在我们考虑一个 II 类节点的集聚系数.根据集聚系数的定义,某点的集聚系数为以该点为顶点的三角形实际个数与可能个数(三元组)的比例.三角形有两种情况,另两个顶点为同类节点或异类节点.当另两个顶点为同类节点时,它们形成三角形的概率为 p_s ;当另两个顶点为异类节点时,它们形成三角形的概率为 p_d .由于 p_s 基本保持不变,以 II 类节点为顶点形成三角形的概率会随着 p_d 的增大而增大,即集聚系数增大.所以网络集聚系数随 p_d 的变化曲线是先降低后升高,如图 2(d)中圆圈连线所示.但是同时要注意到另两个顶点为同类节点的三元组的规模为 $m_1 = [p_d n_1(p_d n_1 - 1) + p_s n_2(p_s n_2 - 1)]/2$,另两个顶点为异类节点的三元组的规模为 $m_2 = p_d n_1 p_s n_2$.如果两类节点的规模差别不是非常悬殊, p_d 比较大时 p_s 会很小并接近于零,这时 m_2

$\ll m_1$,故集聚系数由两个顶点为异类节点的三元组形成三角形的概率决定,也就是 p_s ,因此集聚系数会再次随着 p_d 的增加而减小,也就是网络集聚系数随 p_d 的变化曲线是先降低后升高再降低,如图 2(b)和(c)中圆圈连线所示.

另外,如果异类节点规模相差比较悬殊,由于 p_d 不能大于 1,上面所讨论的 p_d 比较大而使得集聚系数和平均最短路径长度随 p_d 的变化曲线发生转折将不能发生,如图 2(c)和(d)所示.可以把这些曲线与图 2(b)的曲线进行对比,看成由于 $p_d \leq 1$ 的限制而被截断.

为更清楚地揭示其原因,我们分析其极端情况——I 类节点只有一个.当 $p_d = 0$ 时,网络实际上可以看成单元随机网,因此网络集聚系数为 $c_0 = p$.下面我们估算当 $p_d = 1$ 时网络的集聚系数和平均最短路径长度.某个 II 类节点的同类节点邻居数为 $p_s n_2$,其度值为 $d = p_s n_2 + 1$.三元组个数为

$$n_{\text{triple}} = \frac{d(d-1)}{2}. \tag{12}$$

三角形个数为这些邻居之间的连边数,其中异类节点之间的连边数为 $d-1$,同类节点之间的连边数为 $p_s(d-1)(d-2)/2$,即

$$n_{\text{triangle}} = (d-1) + p_s \frac{(d-1)(d-2)}{2}. \tag{13}$$

所以集聚系数为

$$c = \frac{n_{\text{triangle}}}{n_{\text{triple}}} = p_s + \frac{\chi(1-p_s)}{d} \approx p_s + \frac{2}{d} = p_s + \frac{2}{p_s n_2 + 1}. \tag{14}$$

将 $p_s = [pn(n-1)/2 - (n-1)] / [(n-1)(n-2)/2] = 0.04$, $n_2 \approx n = 200$ 代入可得 $c \approx 0.26$.数值模拟的结果为 $c = 0.27$,与估算值基本符合,见图 2(d).网络上没有直接连接的任意两点都可以通过 I 类节点连接,也就是说,网络上任意两个节点之间的最短距离不大于 2.网络上任意两个节点以概率 p 直接连接,以 $1-p$ 的概率通过 I 类节点连接,因此平均最短路径长度为 $d = p + \chi(1-p) = 1.95$.数值模拟的结果为 $d = 1.95$,与估算值完全符合.

5. 结 论

二元网比单元网含有更丰富的信息,而且在现实中也有很多案例.事实上,除了前面给出的例子

外,现实中存在大量的二元网,这是因为现实世界往往是两极分化的.比如人有贫富的差别,国家有发达和发展中的差别,一个企业或事业单位的员工有领导和普通员工的差别.这种差别往往会导致节点性质的二元化.在二元网中,同类节点之间的连接概率 p_s 既有可能比异类节点之间的连接概率 p_d 大,也有可能比异类节点之间的连接概率 p_d 小.比如对于一个大型企业而言,领导和领导之间的连接概率比领导和普通员工之间的连接概率要大,而普通员工和普通员工之间的连接概率则要比普通员工和领导之间的连接概率小.另外,由于领导的数量要比普通员工少得多,所以整个二元网的同类节点之间的连接概率 p_s 比异类节点之间的连接概率 p_d 小.

本文对二元网和二分网进行了区分,提出了一种构造二元随机网的方法.该模型可以得到小平均最短路径长度、高集聚系数的网络.而且该网络的平均最短路径能够比单元随机网的平均最短路径还要短.另外还探讨了异类节点之间的连接概率 p_d 以及

两类节点的规模比 r 对网络的平均最短路径长度和集聚系数的影响.发现规模比 r 是二元网的一个重要参量.在一些极限情况下,数值模拟结果和理论估算值相一致.

有很多工作等待进一步的开展.在二元随机网中,可以考虑异类节点具有不同的 p_d 和 p_s ,可以考虑在保持点度分布的同时改变 p_d ,可以考虑异类节点具有不同度分布的情况,还可以考虑异类节点具有不同的动力学性质等等.此外,点的类别可以不止两个,也就是考虑三元网、多元网.像在围棋国际比赛中,基本上都是中日韩三国选手.另外,族谱就是很典型的多元网.考虑父母和子女之间才有连接,不同代人属于不同类别.许多大家族存在这样的情况,辈分有差别但年龄相近的两个远亲最终结合在一起.这样一来,同一代人就有了连接.本来是很好的多分网变成了多元网.我们希望我们的工作能促进这方面工作的开展.

- [1] Watts D J ,Strogatz S H 1998 *Nature* **393** 440
- [2] Albert-lászlóBarabási ,Albert R 1999 *Science* **286** 509
- [3] Albert R ,Barabasi A L 2002 *Reviews of Modern Physics* **74** 47
- [4] Dorogovtsev S N ,Mendes J F 2002 *Advances in Physics* **51** 1079
- [5] Boccaletti S ,Latora V ,Moreno Y *et al* 2006 *Physics Reports* **424** 175
- [6] Wu J S ,Di Z R 2004 *Prog. Phys.* **24** 18 (in Chinese) [吴金闪、狄增如 2004 物理学进展 **24** 18]
- [7] He Y ,Zhang P P ,Xu T *et al* 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 1710 (in Chinese) [何 阅、张培培、许 田等 2004 物理学报 **53** 1710]
- [8] Li J ,Wang B ,Jiang P Q *et al* 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 4051 (in Chinese) [李 季、汪秉宏、蒋品群等 2006 物理学报 **55** 4051]
- [9] Liu H K ,Zhou T 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 106 (in Chinese) [刘宏鲲、周 涛 2007 物理学报 **56** 106]
- [10] Xu D ,Li X ,Wang X F 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 1313 (in Chinese) [许 丹、李 翔、汪小帆 2007 物理学报 **56** 1313]
- [11] Wu Y ,Xiao J H ,Wu Z Y *et al* 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 2037 (in Chinese) [吴 晔、肖井华、吴智远等 2007 物理学报 **56** 2037]
- [12] Zheng Z ,Feng X ,Ao B *et al* 2006 *Frontiers of Physics in China* **1** 458
- [13] Li W ,Zhang X ,Hu G 2007 *Phys. Rev. E* **76** 45102
- [14] Park K ,Huang L ,Lai Y C 2007 *Phys. Rev. E* **75** 26211
- [15] Yin C Y ,Wang B H ,Wang W X *et al* 2008 *Phys. Rev. E* **77** 27102
- [16] Wu J ,Gao Z ,Sun H 2007 *Chin. Phys. Lett.* **16** 47
- [17] Guillaume J L ,Latapy M 2004 *Information Processing Letters* **90** 215
- [18] Zhou T ,Ren J ,Medo M *et al* 2007 *Phys. Rev. E* **76** 46115
- [19] Guillaume J L ,Latapy M 2006 *Physica A* **371** 795
- [20] Barber M J 2007 *Phys. Rev. E* **76** 66102
- [21] Lind P G ,Gonzalez M C ,Herrmann H J 2005 *Phys. Rev. E* **72** 56127
- [22] Ohkubo J ,Tanaka K ,Horiguchi T 2005 *Phys. Rev. E* **72** 036120
- [23] Estrada E ,Rodriguez-velazquez J A 2005 *Phys. Rev. E* **72** 46105
- [24] Holme P ,Liljeros F ,Edling C R *et al* 2003 *Phys. Rev. E* **68** 056107
- [25] Liljeros F ,Edling C R ,Amaral L A *et al* 2001 *Nature* **411** 907
- [26] Jeong H ,Tombar B ,Albert R *et al* 2000 *Nature* **407** 651
- [27] Fu L H ,Guo J F ,Zhu J Y 2004 *Journal of The China Society for Scientific and Technical Information* **23** 571 (in Chinese) [傅林华、郭建峰、朱建阳 2004 情报学报 **23** 571]
- [28] Newman M E 2004 *Phys. Rev. E* **69** 066133
- [29] Newman M E 2004 *European Physical Journal B* **38** 321
- [30] Newman M E ,Girvan M 2004 *Phys. Rev. E* **69** 026113
- [31] Girvan M ,Newman M E 2002 *Pans* **99** 7821
- [32] Lambiotte R ,Ausloos M 2005 *Phys. Rev. E* **72** 66107
- [33] Cano P ,Celma O ,Koppenberger M *et al* 2006 *Chaos* **16** 013107-6
- [34] Newman M E 2001 *Phys. Rev. E* **64** 025102
- [35] Klemm K ,Eguiluz V M 2002 *Phys. Rev. E* **65** 036123
- [36] Klemm K ,Eguiluz V M 2002 *Phys. Rev. E* **65** 057102
- [37] Zhou T ,Yan G ,Wang B H 2005 *Phys. Rev. E* **71** 046141

Bielemental random networks^{*}

Chen Hong-Bin¹⁾ Fan Ying²⁾ Fang Jin-Qing³⁾ Di Zeng-Ru^{2)†}

¹⁾ College of Information Science and Engineering, Huaqiao University, Xiamen 361021, China)

²⁾ Department of Systems Science, School of Management, Beijing Normal University, Beijing 100875, China)

³⁾ China Institute of Atomic Energy, Beijing 102413, China)

(Received 13 June 2008 ; revised manuscript received 2 September 2008)

Abstract

On the basic of bipartite networks, bielemental networks are defined as networks which include two kinds of vertexes, and connections between different kinds of vertexes are permitted. In this article, a bielemental random network model is founded, and the structure of the bielemental random network is studied. Small-world effect can be found in such model, furthermore, the average shortest path length is smaller than that of unipartite random networks. And the proportion of the numbers of two kinds of vertexes is a very important factor.

Keywords : complex network, bipartite network, bielemental network, small-world

PACC : 0520, 0590

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 70431002, 70771011).

[†] Corresponding author. E-mail: zdi@bnu.edu.cn