

双色噪声驱动非对称双稳系统平均 第一穿越时间研究

王 兵[†] 吴秀清 邵继红

(安徽理工大学理学院, 淮南 232001)

(2008 年 1 月 14 日收到 2008 年 5 月 25 日收到修改稿)

利用统一色噪声近似理论, 研究乘性色噪声和加性色噪声驱动的非对称双稳系统中, 势阱的非对称性和噪声对系统两个方向的平均第一穿越时间 $T_+(x_{s1} \rightarrow x_{s2})$ 和 $T_-(x_{s2} \rightarrow x_{s1})$ 的影响 (x_{s1} 和 x_{s2} 是双稳系统的两个稳定点). 数值结果表明: $T_+(x_{s1} \rightarrow x_{s2})$ 随乘性噪声的自关联时间 τ_1 以及加性噪声的自关联时间 τ_2 的增大而减小, $T_-(x_{s2} \rightarrow x_{s1})$ 随乘性噪声的自关联时间 τ_1 以及加性噪声的自关联时间 τ_2 的增大而增大. 在曲线 $(T_+(x_{s1} \rightarrow x_{s2}), \lambda)$ 和 $(T_-(x_{s2} \rightarrow x_{s1}), \lambda)$ 上都存在单峰. $T_+(x_{s1} \rightarrow x_{s2})$ 随非对称系数 r 的增大而增大, $T_-(x_{s2} \rightarrow x_{s1})$ 随非对称系数 r 的增大而减小.

关键词: 统一色噪声近似, 平均第一穿越时间, 加性色噪声, 乘性色噪声

PACC: 0540, 0250

1. 引 言

噪声对非线性系统的影响近年来一直受到大家的广泛关注. 在对噪声的处理上, 为了简化计算, 常把记忆时间或者宽带很短的激励视为白噪声. 但真正的白噪声并不存在, 所以很多科技工作者已经开始从事非白噪声驱动非线性系统性质的研究工作^[1-17]. Jung 等^[3]在 1987 年提出统一色噪声近似理论, 并对乘性色噪声驱动的染料激光模型进行了研究. Cao 等^[4]在 1995 年推导了关联色噪声驱动的双稳系统的稳态概率密度表达式. 1996 年, Jia 等^[6]研究了色关联噪声驱动的双稳系统的稳态概率密度表达式. 1999 年, Mei 等^[7]研究了色关联噪声驱动的双稳系统中关联时间和关联强度对平均第一穿越时间的影响. Wang 等^[10]在 2003 年详细研究了关联白噪声驱动的双稳系统中两个方向的平均第一穿越时间问题并发现在关联噪声影响下两个方向的平均第一穿越时间不对称. Mei 等^[13]在 2004 年利用投影算子方法推导了色关联噪声驱动的双稳系统的关联函数以及弛豫时间表达式. 2006 年, Li 等^[17]研究了乘性非对称分岔噪声影响下的随机共振问题. 由于很多

实际的物理系统的非对称性, 本文研究白关联的加性色噪声与乘性色噪声驱动的非对称双稳系统的平均第一穿越时间问题.

2. 非对称双稳系统平均第一穿越时间

包含加性噪声和乘性噪声的非对称双稳系统的郎之万方程为

$$\frac{dx}{dt} = x - x^3 - r + x\xi(t) + \Gamma(t), \quad (1)$$

式中乘性噪声 $\xi(t)$, 加性噪声 $\Gamma(t)$ 均为高斯色噪声, 其统计性质分别为

$$\langle \xi(t) \rangle = \langle \Gamma(t) \rangle = 0, \quad (2)$$

$$\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = \frac{D}{\tau_1} \exp\left(-\frac{|t-t'|}{\tau_1}\right), \quad (3)$$

$$\langle \Gamma(t)\Gamma(t') \rangle = \frac{Q}{\tau_2} \exp\left(-\frac{|t-t'|}{\tau_2}\right), \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \langle \xi(t)\Gamma(t') \rangle &= \langle \Gamma(t)\xi(t') \rangle \\ &= 2\lambda \sqrt{DQ} \delta(t-t'), \end{aligned} \quad (5)$$

D 和 Q 分别为乘性噪声和加性噪声的噪声强度, λ 为噪声 $\xi(t)$ 和 $\Gamma(t)$ 之间的关联强度, τ_1 和 τ_2 分别为 $\xi(t)$ 和 $\Gamma(t)$ 的自关联时间, 由统一色噪声近似

[†] 通讯联系人 E-mail: wb@163.com

理论可以得到近似的福克-普朗克方程为

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} A(x) P(x, t) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} B(x) P(x, t), \quad (6)$$

其中

$$A(x) = \frac{x - x^3 - r}{1 + 2\tau_1 x^2 - \frac{r\tau_1}{x} - \tau_2(1 - 3x^2)} + \frac{1}{2} B'(x), \quad (7)$$

$$B(x) = \frac{1}{\left(1 + 2\tau_1 x^2 - \frac{r\tau_1}{x} - \tau_2(1 - 3x^2)\right)^2} \times (Dx^2 + 2\lambda\sqrt{DQ}x + Q). \quad (8)$$

令(6)式左边为零,可以得到系统稳态的概率密度函数为

$$P_{st}(x) = \frac{N}{\sqrt{B(x)}} \exp\left(\int \frac{A(x)}{B(x)} dx\right), \quad (9)$$

其中 N 为归一化常数. 广义势函数为

$$\tilde{V}(x) = \frac{1}{4}(2\tau_1 + 3\tau_2)x^4 - \frac{2}{3}(2\tau_1 + 3\tau_2)\lambda\sqrt{\frac{Q}{D}}x^3 + \frac{1}{2}W(\lambda)x^2 + G(\lambda)x + K(x), \quad (10)$$

其中

$$K(x) = \frac{1}{2}H(\lambda) \times \ln \left| x^2 + 2\lambda\sqrt{\frac{Q}{D}}x + \frac{Q}{D} \right| + \frac{Z(\lambda) - M(\lambda)\lambda\sqrt{\frac{Q}{D}}}{\sqrt{\frac{Q}{D} - \lambda^2\frac{Q}{D}}} \operatorname{atan} \frac{x + \lambda\sqrt{\frac{Q}{D}}}{\sqrt{\frac{Q}{D} - \lambda^2\frac{Q}{D}}} - \frac{D}{Q} r^2 \tau_1 \ln |x|,$$

$$W(\lambda) = 4(2\tau_1 + 3\tau_2)\lambda^2 \frac{Q}{D} - \frac{(2\tau_1 + 3\tau_2)}{D} + 1 - 4\tau_2 - 2\tau_1,$$

$$G(\lambda) = (3\tau_1 + \tau_1)r - 8(2\tau_1 + 3\tau_2)\lambda^3 \left(\frac{Q}{D}\right)^{3/2} - 2(1 - 2\tau_1 - 4\tau_2)\lambda\sqrt{\frac{Q}{D}},$$

$$H(\lambda) = 16(2\tau_1 + 3\tau_2)\lambda^4 \left(\frac{Q}{D}\right)^2 + 4(1 - 4\tau_2 - 2\tau_1)\lambda^2 \frac{Q}{D} - 2(3\tau_2 + \tau_1)\lambda\sqrt{\frac{Q}{D}} - 4\lambda^2 \frac{Q^2}{D^2} + I(r),$$

$$I(r) = -\frac{1 - 4\tau_2 - 2\tau_1}{D}Q + \frac{2\tau_1 + 3\tau_2}{D^2}Q^2 + \tau_2 - 1 + \frac{D}{Q}r^2\tau_1,$$

$$M(\lambda) = 16(2\tau_1 + 3\tau_2)\lambda^4 \frac{Q^2}{D^2} + 4(1 - 4\tau_2 - 2\tau_1)\lambda^2 \frac{Q}{D} - 2(3\tau_2 + \tau_1)\lambda\sqrt{\frac{Q}{D}} + J(r, \lambda),$$

$$J(r, \lambda) = -4\lambda^2 \frac{Q^2}{D^2} - \frac{(1 - 2\tau_1 - 4\tau_2)Q}{D} + \frac{(2\tau_1 + 3\tau_2)Q^2}{D^2} + \frac{D\tau_1 r^2}{Q} + \tau_2 - 1,$$

$$Z(\lambda) = (1 + \tau_1 - \tau_2)r + 2\lambda\tau_1 r^2 \sqrt{\frac{D}{Q}} - \left\{ \tau_1 + 3\tau_2 - 8(2\tau_1 + 3\tau_2)\lambda^3 \left(\frac{Q}{D}\right)^{3/2} - 2\lambda(1 - 2\tau_1 - 4\tau_2)\sqrt{\frac{Q}{D}} \right\} \frac{Q}{D}.$$

由(1)式可以看出,系统的确定性势函数为 $V(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + rx$ 其中 r 为非对称系数,表明势阱的非

对称性. 在 $-\frac{2\sqrt{3}}{9} < r < \frac{2\sqrt{3}}{9}$ 的条件下, $V(x)$ 表示一个非对称双稳势函数. 通过解方程 $V'(x) = 0$ 可以得到它的一个不稳定点 x_u 和两个稳定点 x_{s1}, x_{s2} 分别为

$$x_u = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \cos\left(\frac{1}{3} \arccos\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}r\right) + \frac{\pi}{3}\right) \quad (11)$$

$$x_{s1} = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \cos\left(\frac{1}{3} \arccos\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}r\right) - \frac{\pi}{3}\right) \quad (12)$$

$$x_{s2} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cos\left(\frac{1}{3} \arccos\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}r\right)\right). \quad (13)$$

利用平均第一穿越时间的定义和最速下降法可以得到两个不同方向的平均第一穿越时间的表达式为

$$\begin{aligned}
 & T_+(x_{s1} \rightarrow x_{s2}) \\
 &= \int_{x_{s2}}^{x_{s1}} \frac{dx}{B(x)P(x)} \int_{-\infty}^x P(y) dy \\
 &= \frac{2\pi}{\sqrt{B(x_{s1})|V'(x_u)V'(x_{s1})|}} \\
 &\quad \times \exp\left(\frac{\tilde{V}(x_u) - \tilde{V}(x_{s1})}{D}\right), \quad (14)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & T_-(x_{s2} \rightarrow x_{s1}) \\
 &= \int_{x_{s1}}^{x_{s2}} \frac{dx}{B(x)P(x)} \int_x^{+\infty} P(y) dy \\
 &= \frac{2\pi}{\sqrt{B(x_{s2})|V'(x_u)V'(x_{s2})|}} \\
 &\quad \times \exp\left(\frac{\tilde{V}(x_u) - \tilde{V}(x_{s2})}{D}\right). \quad (15)
 \end{aligned}$$

3. 双色噪声以及非对称性对平均第一穿越时间的影响

利用两个不同方向的平均第一穿越时间 T_+ , T_- 的表达式(14)和(15)讨论乘性噪声的自关联时间 τ_1 和加性噪声的自关联时间 τ_2 , 噪声之间的关联强度 λ 以及非对称系数 r 对 T_+ 和 T_- 的影响.

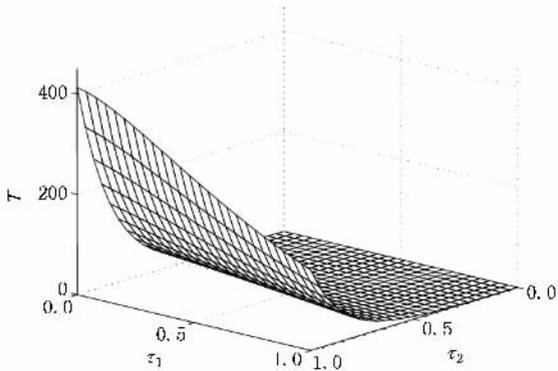


图1 平均第一穿越时间 $T_+(x_{s1} \rightarrow x_{s2})$ 随 τ_1 和 τ_2 的变化图像 (其中 $r=0.3, D=0.2, \lambda=0.3, Q=0.2$)

图1给出了平均第一穿越时间 $T_+(x_{s1} \rightarrow x_{s2})$ 随 τ_1 和 τ_2 变化的三维图像. 由图可以看出, 固定 τ_2 , $T_+(x_{s1} \rightarrow x_{s2})$ 随乘性噪声的自关联时间 τ_1 的增大而减小. 固定 τ_1 , $T_+(x_{s1} \rightarrow x_{s2})$ 随加性噪声的自关联时间 τ_2 的增大也是减小的. 这表明 τ_1 和 τ_2 对系统从稳态 x_{s1} 到另一稳态 x_{s2} 所起的作用相同; 即 τ_1 或 τ_2 越大, 系统从稳态 x_{s1} 到另一稳态 x_{s2} 所用的平均

时间越短.

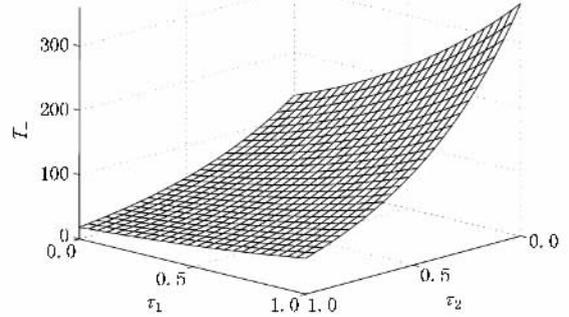


图2 平均第一穿越时间 $T_-(x_{s2} \rightarrow x_{s1})$ 随 τ_1 和 τ_2 的变化图像 (其中 $r=0.3, D=0.2, \lambda=0.3, Q=0.2$)

图2给出了平均第一穿越时间 $T_-(x_{s2} \rightarrow x_{s1})$ 随 τ_1 和 τ_2 变化的三维图像. 由图可以看出, 固定 τ_2 , $T_-(x_{s2} \rightarrow x_{s1})$ 随乘性噪声的自关联时间 τ_1 的增大而增大; 固定 τ_1 , $T_-(x_{s2} \rightarrow x_{s1})$ 随加性噪声自关联时间 τ_2 的增大而增大. 对比图2和图1可见, τ_1, τ_2 对系统从稳态 x_{s1} 到另一稳态 x_{s2} 的影响和对系统从稳态 x_{s2} 到稳态 x_{s1} 的影响正好相反, τ_1 或 τ_2 越大, 系统从稳态 x_{s2} 到另一稳态 x_{s1} 所需的平均时间越长.

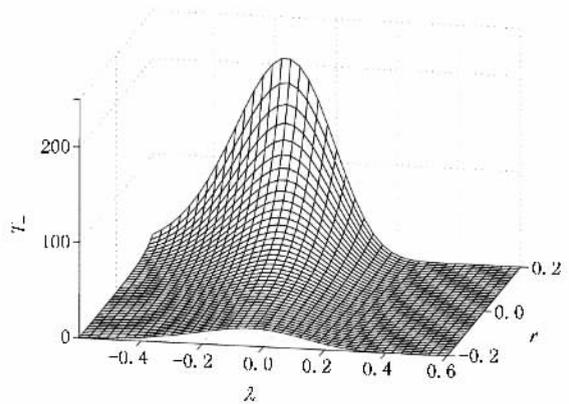


图3 平均第一穿越时间 $T_+(x_{s1} \rightarrow x_{s2})$ 随 λ 和 r 的变化图像 (其中 $D=0.4, \tau_1=1.4, \tau_2=1.4, Q=0.4$)

在图3中, 我们给出 $T_+(x_{s1} \rightarrow x_{s2})$ 随噪声关联强度 λ 和非对称系数 r 变化的三维图像. 在图中可以看到, 固定 r , 曲线 $(T_+(x_{s1} \rightarrow x_{s2}), \lambda)$ 上存在极大值 (如, 当 $r=0.2$ 时, 曲线 $T_+(x_{s1} \rightarrow x_{s2})-\lambda$ 在 $\lambda = -0.18$ 处, 极大值 $T_+(x_{s1} \rightarrow x_{s2})_{\max} = 206.1$; 当 $r=0$ 时, 曲线 $T_+(x_{s1} \rightarrow x_{s2})-\lambda$ 在 $\lambda = -0.09$ 处, 极大值 $T_+(x_{s1} \rightarrow x_{s2})_{\max} = 33.9$) 这表明系统从稳态 x_{s1} 到稳

态 x_{s_2} 出现了抑制现象;在图中还能看出,平均第一穿越时间 $T_+(x_{s_1} \rightarrow x_{s_2})$ 随非对称系数 r 的增大而增大,且大 r 值对应的曲线 ($T_+(x_{s_1} \rightarrow x_{s_2}), \lambda$) 上存在更明显的极大值(即,大 r 值时,抑制现象越显著).

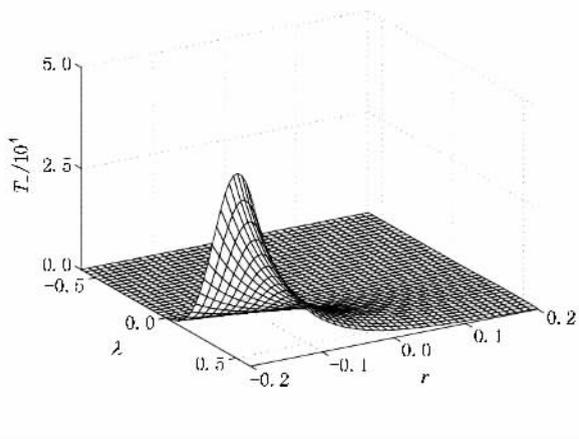


图4 平均第一穿越时间 $T_-(x_{s_2} \rightarrow x_{s_1})$ 随 λ 和 r 的变化图像(其中 $D=0.4, \tau_1=1.4, \tau_2=1.4, Q=0.4$)

图4给出平均第一穿越时间 $T_-(x_{s_2} \rightarrow x_{s_1})$ 随噪声关联强度 λ 和非对称系数 r 变化的三维图像.由图可见,与 $T_+(x_{s_1} \rightarrow x_{s_2})$ 相似,固定 r ,在曲线 (T_-

($x_{s_2} \rightarrow x_{s_1}), \lambda$) 上存在极大值(如,当 $r=0.2$ 时,在 $\lambda=0.42$ 处,极大值 $T_-(x_{s_2} \rightarrow x_{s_1})_{\max} = 324.0$;当 $r=0$ 时,在 $\lambda=0.45$ 处,极大值 $T_-(x_{s_2} \rightarrow x_{s_1})_{\max} = 2603$),即,系统从稳态 x_{s_2} 到稳态 x_{s_1} 出现了抑制现象.对比图3和图4,与 $T_+(x_{s_1} \rightarrow x_{s_2})$ 随 r 的增大而增大相反, $T_-(x_{s_2} \rightarrow x_{s_1})$ 随 r 的增大而减小.

4. 结 论

本文研究了乘性色噪声和加性色噪声驱动的非对称双稳系统的平均第一穿越时间问题.在得到两个方向的平均第一穿越时间的表达式的基础上,讨论了双色噪声以及非对称性对平均第一穿越时间的影响.研究发现 $T_+(x_{s_1} \rightarrow x_{s_2})$ 随乘性噪声自关联时间 τ_1 以及加性噪声的自关联时间 τ_2 的增大而减小. $T_-(x_{s_2} \rightarrow x_{s_1})$ 随乘性噪声自关联时间 τ_1 以及加性噪声的自关联时间 τ_2 的增大而增大.曲线 ($T_+(x_{s_1} \rightarrow x_{s_2}), \lambda$) 和 ($T_-(x_{s_2} \rightarrow x_{s_1}), \lambda$) 均出现极大值. $T_+(x_{s_1} \rightarrow x_{s_2})$ 随非对称系数 r 的增大而增大,但 $T_-(x_{s_2} \rightarrow x_{s_1})$ 随非对称系数 r 的增大而减小.

[1] Masoliver J, West B J, Lindenberg K 1987 *Phys. Rev. A* **35** 3086
 [2] Leibler T, Marchesoni F, Risken H 1988 *Phys. Rev. A* **38** 983
 [3] Jung P, Hanggi P 1987 *Phys. Rev. A* **35** 4464
 [4] Cao L, Wu D J, Kw S Z 1995 *Phys. Rev. E* **52** 3228
 [5] Wei X Q, Cao L, Wu D J 1995 *Phys. Lett. A* **207** 338
 [6] Jia Y, Li J R 1996 *Phys. Rev. E* **53** 5786
 [7] Mei D C, Xie G Z, Cao L, Wu D J 1999 *Phys. Rev. E* **59** 3880
 [8] Mei D C, Xie G Z, Cao L, Wu D J 1999 *Chin. Phys. Lett.* **16** 327
 [9] Li J H, Luczka J, Hanggi P 2001 *Phys. Rev. E* **64** 011113
 [10] Wang J, Cao L, Wu D J 2003 *Phys. Lett. A* **308** 23

[11] Xie C W, Mei D C 2003 *Chin. Phys.* **12** 1208
 [12] Xie C W, Mei D C 2003 *Chin. Phys. Lett.* **20** 813
 [13] Mei D C, Xie C W, Xiang Y L 2004 *Phys. A* **343** 167
 [14] Liang G Y, Cao L, Wu D J 2004 *Phys. A* **335** 371
 [15] Han L B, Cao L, Wu D J, Wang J 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2127 (in Chinese) [韩立波、曹力、吴大进、王俊 2004 物理学报 **53** 2127]
 [16] Xu D S, Cao L, Wu D J 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 0692 (in Chinese) [许德胜、曹力、吴大进 2006 物理学报 **55** 0692]
 [17] Li J H, Han Y X 2006 *Phys. Rev. E* **74** 051115



The mean first-passage time for an asymmetric bistable system driven by two colored noises

Wang Bing[†] Wu Xiu-Qing Shao Ji-Hong

(Department of Physics and Mathematics ,Anhui University of Science and Technology ,Huainan 232001 ,China)

(Received 14 January 2008 ; revised manuscript received 25 May 2008)

Abstract

By means of an extended colored-noise approximation ,we investigated the effects of asymmetry of the potential and noises on the mean first-passage time $T_+(x_{s1} \rightarrow x_{s2})$ and $T_-(x_{s2} \rightarrow x_{s1})$ in two opposite directions in an asymmetric bistable system (here x_{s1} and x_{s2} are stable points of the asymmetric bistable system). Numerical results show that $T_+(x_{s1} \rightarrow x_{s2})$ decreases with increasing of τ_1 (the correlation time of multiplicative noise) and τ_2 (the correlation time of additive noise). $T_-(x_{s2} \rightarrow x_{s1})$ increases with increasing of τ_1 and τ_2 . The curves of $T_+(x_{s1} \rightarrow x_{s2})$ versus λ and $T_-(x_{s2} \rightarrow x_{s1})$ versus λ are single-peaked . $T_+(x_{s1} \rightarrow x_{s2})$ will increase when r increases ,but $T_-(x_{s2} \rightarrow x_{s1})$ will decrease when r increases .

Keywords : extended colored-noise approximation , the mean first-passage time , multiplicative colored noise , additive colored noise

PACC : 0540 , 0250

[†] Corresponding author. E-mail : hnitwb@163.com