

# 非高斯噪声激励下 FHN 神经元系统的 定态概率密度与平均首次穿越时间\*

赵 燕 徐 伟† 邹少存

(西北工业大学应用数学系, 西安 710072)

(2008 年 7 月 14 日收到, 2008 年 9 月 1 日收到修改稿)

研究了非高斯噪声激励下的 FHN 神经元系统, 应用路径积分法和统一色噪声近似得到系统的定态概率密度函数和平均首次穿越时间表达式. 发现了加性噪声强度  $Q$  能够诱导非平衡相变的产生, 乘性噪声强度  $D$ 、偏离参数  $p$  及关联时间  $\tau_0$  均不能诱导非平衡相变发生; 非高斯噪声的存在缩短了细胞神经元系统静息态和激发态之间的转化时间, 有利于神经元信息的传递.

关键词: FHN 神经元系统, 非高斯噪声, 定态概率密度, 平均首次穿越时间

PACC: 0540, 0570, 7620

## 1. 引 言

噪声在实际生活中无处不在并有举足轻重的作用. 根据统计性质噪声一般分为高斯噪声和非高斯噪声. 高斯噪声<sup>[1]</sup>便于运算且已形成完整的研究方法和理论体系. 由于非高斯噪声属于非马尔科夫过程不容易处理, 所以研究非高斯噪声的文章还比较少见. 事实上, 非高斯噪声<sup>[2,3]</sup>常常出现在感官神经元系统中. 基于离子通道理论, Hodgkin 和 Huxley 提出了关于神经元系统动作电位变化的著名 H-H 模型, 但 H-H 模型形式比较复杂. FitzHugh 和 Nagumo 在保留 H-H 模型生物特性的基础上对 H-H 模型进行了简化, 提出了二维 FHN 神经元模型. Alarcon 在一定条件下, 对二维 FHN 神经元模型进行了简化得到一维 FHN 系统<sup>[4]</sup>. 神经元细胞处于感官神经元系统中, 因此在神经元细胞所处的环境中认为随机噪声项为非高斯的是合理的. 过去的文章大多是在高斯噪声激励下 FHN 神经元模型的研究<sup>[5-7]</sup>, 非高斯噪声激励下 FHN 神经元模型的研究还很少见. 因此研究非高斯噪声激励下的细胞神经元系统是必要的.

本文主要研究了非高斯噪声激励下简化一维

FHN 系统定态概率密度和平均首次穿越时间<sup>[8,9]</sup>, 应用路径积分法将非高斯噪声处理成高斯色噪声, 根据统一色噪声理论近似得到系统的 FPK 方程和定态概率密度函数. 用平均首次穿越时间的定义得到  $T_+(v_1 \rightarrow v_2)$  和  $T_-(v_2 \rightarrow v_1)$  的表达式, 着重讨论了加性噪声强度  $Q$ , 乘性噪声强度  $D$ 、偏离参数  $p$  及关联时间  $\tau_0$  对定态概率密度和平均首次穿越时间的影响.

## 2. 非高斯噪声的处理

下面介绍路径积分法<sup>[10-12]</sup>处理非高斯噪声. 若  $\chi(t)$  为非高斯噪声则满足

$$\frac{d\chi(t)}{dt} = -\frac{1}{\tau_0} \frac{d}{d\eta} V_p(\eta) + \frac{1}{\tau_0} \epsilon(t), \quad (1a)$$

$$V_p(\eta) = \frac{D}{\tau_0(p-1)} \ln \left[ 1 + \frac{\tau_0}{D} (p-1) \frac{\eta^2}{2} \right] \quad (1b)$$

其中  $p$  表示非高斯噪声  $\chi(t)$  偏离高斯分布的程度, 显然  $p \neq 1$  (若  $p = 1$ , 则  $\chi(t)$  不再是非高斯噪声, 是自相关时间为  $\tau_0$ , 噪声强度为  $D$  的高斯色噪声);  $\epsilon(t)$  是高斯白噪声,  $\epsilon(t) = 0$ ,  $\epsilon(t)\epsilon(t') = 2D\delta(t-t')$ ,  $D$  是其噪声强度. 非高斯噪声的性质:

$$\chi(t) = 0, \quad (2a)$$

\* 国家自然科学基金(批准号:10872165)资助的课题.

† E-mail: weixu@nwpu.edu.cn

$$\eta^2(t) = \begin{cases} \frac{2D}{\tau_0(5-3p)}, & p \in \left(-\infty, \frac{5}{3}\right), \\ \infty, & p \in \left(\frac{5}{3}, 3\right) \end{cases} \quad (2b)$$

当  $|p-1| \ll 1$  时,用路径积分法可知

$$\frac{1}{\tau_0} \frac{d}{d\eta} V_p(\eta) \approx \frac{\eta}{\tau_1}, \quad (3)$$

$$\tau_1 = \frac{\chi(2-p)}{(5-3p)} \tau_0. \quad (4)$$

将(3)式代入(1)式后,则(1)式可以简化为

$$\frac{d\eta(t)}{dt} = -\frac{\eta}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_1} \varepsilon_1(t), \quad (5)$$

其中  $\varepsilon_1(t)$  为高斯白噪声,  $\varepsilon_1(t) = 0$ ,  $\varepsilon_1(t) \varepsilon_1(t')$   
 $= 2D_1 \delta(t-t')$ ,  $D_1 = \left(\frac{\chi(2-p)}{(5-3p)}\right)^2 D$  以上过程应用路径积分法,将非高斯过近似转化为关联时间为  $\tau_1$ , 噪声强度为  $D_1$  的高斯色噪声.

### 3. 非高斯噪声驱动的 FHN 模型的近似定态概率密度

文献 2 玩量纲的 FHN 模型有如下的表达式:

$$\frac{dv}{dt} = \alpha(a-v)(v-1) - w + I_a, \quad (6a)$$

$$\frac{dw}{dt} = bv - \gamma w, \quad (6b)$$

其中,  $v$  代表快变的膜电压变量,  $0 < a < 1$  是阈值,  $b$  和  $\gamma$  均是正常数.  $w$  是慢变的回复变量.  $I_a$  表示外部激励电流. 当  $I_a = 0$  时,文献 2 简化的一维 FHN 神经元系统模型为

$$\frac{dv}{dt} = \alpha(a-v)(v-1) - \frac{b}{\gamma}v + \xi(t). \quad (7)$$

$\xi(t)$  是高斯白噪声具有以下统计性质:  $\xi(t) = 0$ ,  $\xi(t)\xi(t') = 2Q\delta(t-t')$ ,  $Q$  是其噪声强度. 简化模型比原 FHN 神经元少了慢变的恢复变量  $w$ , 多了弱的白噪声  $\xi(t)$ , 注意这里的白噪声  $\xi(t)$  代表在近似  $w = \frac{b}{\gamma}v$  附近的扰动没有实际意义, 仅仅是近似过程的一个扰动变量, 因此简化模型中  $\xi(t)$  是不能被忽略的.

方程(7)的势函数为

$$U(v) = \frac{1}{4}v^4 - \frac{a+1}{3}v^3 + \frac{a+b/\gamma}{2}v^2,$$

当参数满足  $\frac{b}{\gamma} < \left(\frac{a-1}{2}\right)^2$  时,势函数有两个稳定点  $v_1 = 0$ , 代表了细胞的神经元处于静息态;  $v_2 = \frac{a+1+\sqrt{(a-1)^2-4b/\gamma}}{2}$  表示细胞神经元处于激发态. 和一个不稳定点  $v_0 = \frac{a+1-\sqrt{(a-1)^2-4b/\gamma}}{2}$ .

现实中,神经元的膜电压从激发态迅速趋于静息态的过程,可以认为系统内部具有某种噪声,在生物系统中,噪声假设为非高斯噪声是合理的. 考虑在简化的一维 FHN 神经元模型中加入乘性非高斯噪声的模型为

$$\frac{dv}{dt} = \alpha(a-v)(v-1) - \frac{b}{\gamma}v + v\gamma(t) + \xi(t), \quad (8)$$

其中,  $\gamma(t)$  是非高斯噪声,  $\xi(t)$  是高斯白噪声. 应用路径积分法,将  $\gamma(t)$  近似为关联时间为  $\tau_1$ , 噪声强度为  $D_1$  的高斯色噪声. 再利用统一色噪声近似<sup>[13]</sup> 求解出近似的 FPK 方程表达式:

$$\frac{\partial p(v,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial v} A(v)p(v,t) + \frac{\partial^2}{\partial v^2} B(v)p(v,t), \quad (9a)$$

其中

$$A(v) = \frac{\alpha(a-v)(v-1) - \frac{b}{\gamma}v}{1 - (a+1)\tau_1 v + 2\tau_1 v^2} + \frac{1}{2}B'(v), \quad (9b)$$

$$B(v) = \frac{1}{[1 - (a+1)\tau_1 v + 2\tau_1 v^2]} \times (D_1 v^2 + Q). \quad (9c)$$

从而得近似的定态概率密度函数为

$$P_{st}(t) = \frac{N}{\sqrt{B(v)}} \exp\left\{-\frac{\tilde{U}(v)}{D_1}\right\}, \quad (10a)$$

其中,  $N$  为归一化常数, 广义势函数  $\tilde{U}(v)$  的表达式如下:

$$\tilde{U}(v) = -\int \frac{[\alpha(a-v)(v-1) - \frac{b}{\gamma}v][1 - (a+1)\tau_1 v + 2\tau_1 v^2]}{v^2 + \frac{Q}{D_1}} dv$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{f_5}{4} v^4 - \frac{f_4}{3} v^3 + \frac{f_3 - f_5 g}{2} v^2 + (f_4 g - f_2) v \\
&\quad + \frac{f_1 + f_5 g^2 - f_3 g}{2} \ln(v^2 + g) + (f_2 \sqrt{g} - f_4 g \sqrt{g}) \arctan\left(\frac{v}{\sqrt{g}}\right), \tag{10b}
\end{aligned}$$

其中  $f_1 = a + \frac{b}{\gamma}$ ;  $f_2 = (a + 1)\left(a + \frac{b}{\gamma}\right)\tau_1 + (a + 1)$ ;  
 $f_3 = 1 + (a + 1)^2 \tau_1 + 2\left(a + \frac{b}{\gamma}\right)\tau_1$ ;  $f_4 = 3(a + 1)\tau_1$ ;  
 $f_5 = 2\tau_1$ ;  $g = \frac{Q}{D_1}$ .

考虑到当  $a$  和  $b$  取一定的值时,简化的神经元系统才有可能具有双稳的结构.因此,根据文献 [2, 14],这里取  $a = 0.5, b = 0.01, \gamma = 1$ ,以下结论都是在这组参数下讨论得出.

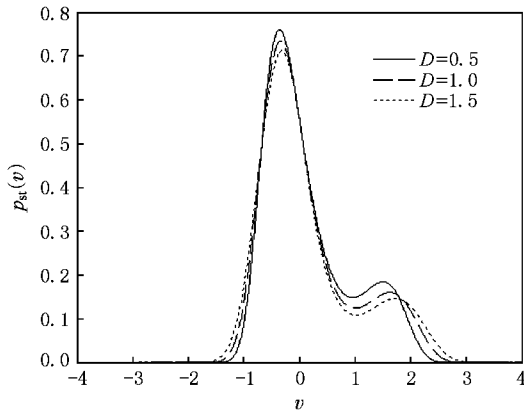


图 1 定态概率密度函数  $p_{st}(v)$  在不同乘性噪声强度  $D$  的变化曲线 ( $Q = 0.5, p = 0.5, \tau_0 = 0.5$ )

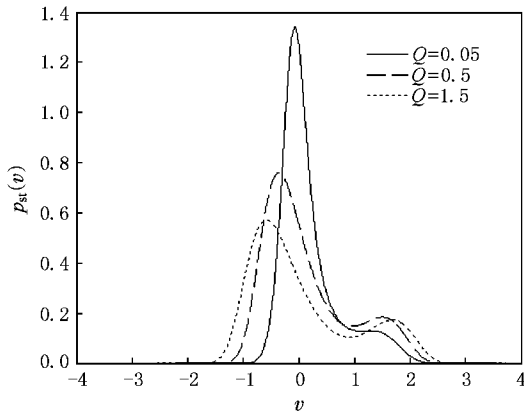


图 2 定态概率密度函数  $p_{st}(v)$  在不同加性噪声强度  $Q$  的变化曲线 ( $D = 0.5, p = 0.5, \tau_0 = 0.5$ )

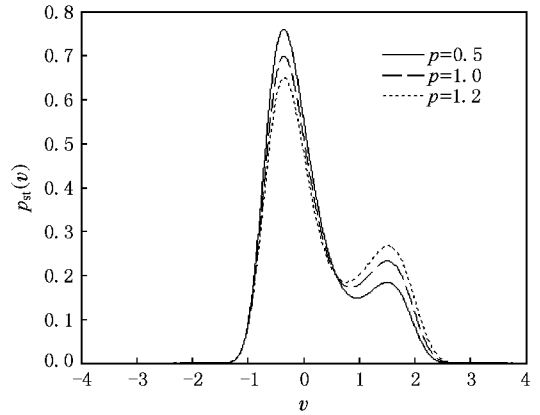


图 3 定态概率密度函数  $p_{st}(v)$  在不同非高斯参数  $p$  的变化曲线 ( $D = 0.5, Q = 0.5, \tau_0 = 0.5$ )

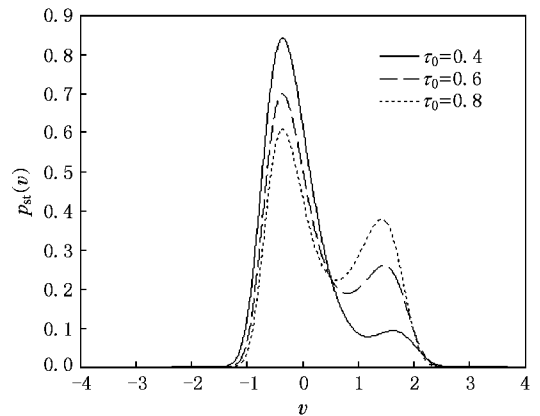


图 4 定态概率密度函数  $p_{st}(v)$  在不同自相关时间  $\tau_0$  的变化曲线 ( $D = 0.5, Q = 0.5, p = 0.5$ )

性噪声强度  $D$  加性噪声强度  $Q$ , 偏离参数  $p$ , 关联时间  $\tau_0$  对稳态概率密度的影响.

图 1—4 分别给出了  $D, Q, p, \tau_0$  取不同值时, 对定态概率密度函数  $p_{st}(v)$  的影响. 从四幅图均可以看出, 在双峰的情况下, 左峰比右峰要高, 表明快变的膜变电压的分布在  $v_1 = 0$  的概率较大. 此结论与细胞神经元系统多数时间总处于静息态是一致的. 随着噪声强度  $D, Q$  的增大,  $p_{st}(v)$  的主峰的峰值减小, 但峰的宽度均变宽. 随着乘性噪声强度  $D$  的增加  $p_{st}(v)$  的两个峰值均有所降低, 但峰的个数

根据定态概率密度函数的表达式(10), 讨论乘

没有发生改变,加性噪声强度  $Q$  对  $p_{st}(v)$  影响较大,峰的位置和峰高均发生较为明显的变化, $p_{st}(v)$  当  $Q=0.5$  时是单峰结构,之后随着  $Q$  的增大,变为双峰结构,即加性噪声强度  $Q$  能够诱导相变;随着偏离参数  $p$  及关联时间  $\tau_0$  增加,看到  $p_{st}(v)$  始终是双峰结构,即  $p$  及  $\tau_0$  不能诱导相变,且  $p_{st}(v)$  的双峰的位置保持不变,左峰的高度在降低,右峰的高度在增高,说明  $p, \tau_0$  的增大使两个稳定点的概率分布趋于平衡. 综上可知,加性噪声强度  $Q$  能够诱导非平衡相变的产生,乘性噪声强度  $D$ 、非高斯噪声的偏离参数  $p$  及关联时间  $\tau_0$  均不能诱导非平衡相变发生.

#### 4. 非高斯噪声驱动下的 FHN 模型的平均首次穿越时间

根据平均首次穿越时间的定义和最速下降法<sup>[15]</sup>得到两个方向上的平均首次穿越时间:

$$T_+(v_1 \rightarrow v_2) = \frac{2\pi |U'(v_1)U'(v_0)|^{-1/2}}{\sqrt{B(v_1)}} \times \exp\left\{\frac{\tilde{U}(v_0) - \tilde{U}(v_1)}{D_1}\right\}, \quad (11a)$$

$$T_-(v_2 \rightarrow v_1) = \frac{2\pi |U'(v_2)U'(v_0)|^{-1/2}}{\sqrt{B(v_2)}} \times \exp\left\{\frac{\tilde{U}(v_0) - \tilde{U}(v_2)}{D_1}\right\}. \quad (11b)$$

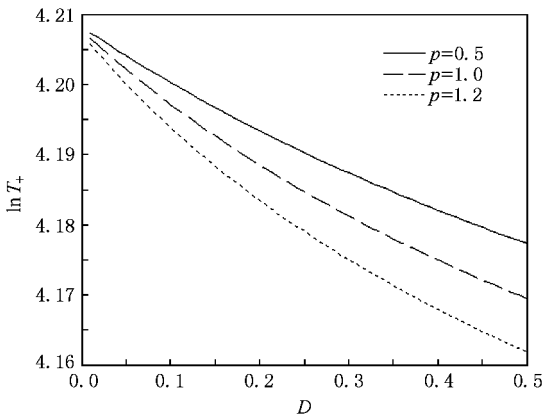


图 5  $T_+$  作为乘性噪声强度  $D$  的函数随不同的偏离参数  $p$  变化的曲线 ( $Q=0.1, \tau_0=0.1$ )

根据平均首次穿越时间的表达式(11),讨论乘性噪声强度  $D$ 、加性噪声强度  $Q$ 、偏离参数  $p$ 、关联

时间  $\tau_0$  对稳态概率密度的影响.

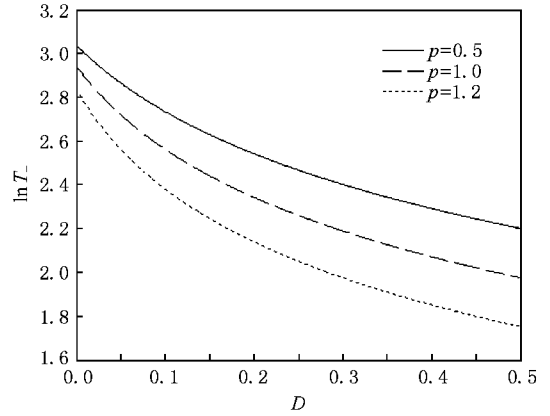


图 6  $T_-$  作为乘性噪声强度  $D$  的函数随不同的偏离参数  $p$  变化的曲线 ( $Q=0.1, \tau_0=0.1$ )

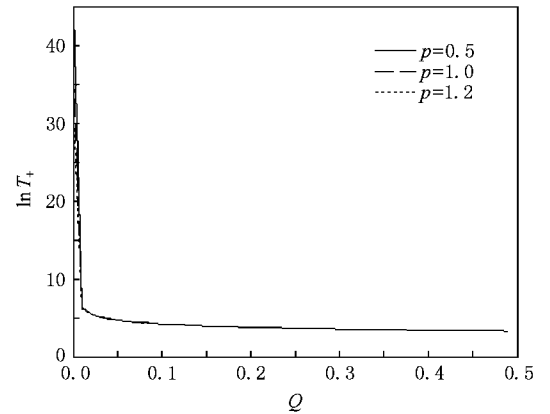


图 7  $T_+$  作为加性噪声强度  $Q$  的函数随不同的偏离参数  $p$  变化的曲线 ( $D=0.1, \tau_0=0.1$ )

图 5 和图 6 分别给出了不同方向上的平均首次穿越时间  $T_+(v_1 \rightarrow v_2)$  和  $T_-(v_2 \rightarrow v_1)$  作为乘性噪声强度  $D$  的函数随不同的偏离参数  $p$  的变化情况. 随着乘性噪声强度  $D$  的增加,平均首次穿越时间  $T_+(v_1 \rightarrow v_2)$  和  $T_-(v_2 \rightarrow v_1)$  均减小. 固定  $D$  值,随着偏离参数  $p$  的增加平均首次穿越时间  $T_+(v_1 \rightarrow v_2)$  和  $T_-(v_2 \rightarrow v_1)$  的值也均减小,说明乘性噪声强度  $D$  和偏离参数  $p$  增大有助于细胞神经元系统两态间的跃迁.

图 7 和图 8 分别给出了不同方向上的平均首次穿越时间  $T_+(v_1 \rightarrow v_2)$  和  $T_-(v_2 \rightarrow v_1)$  作为加性噪声强度  $Q$  的函数随不同的偏离参数  $p$  的变化情况. 图 7 中,当  $Q$  非常小时,随  $Q$  的增大,  $T_+(v_1 \rightarrow v_2)$  的值

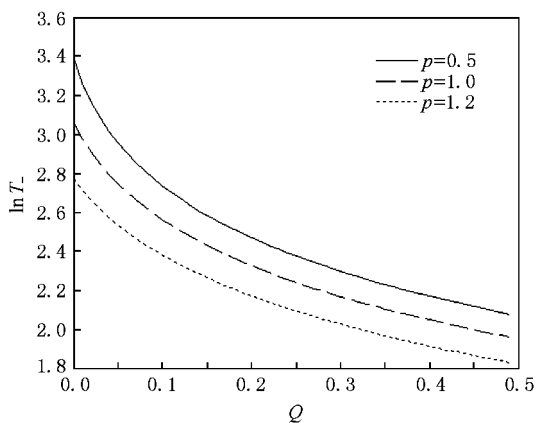


图 8  $T_-$  作为加性噪声强度  $Q$  的函数随不同的偏离参数  $p$  变化的曲线 ( $D=0.1, \tau_0=0.1$ )

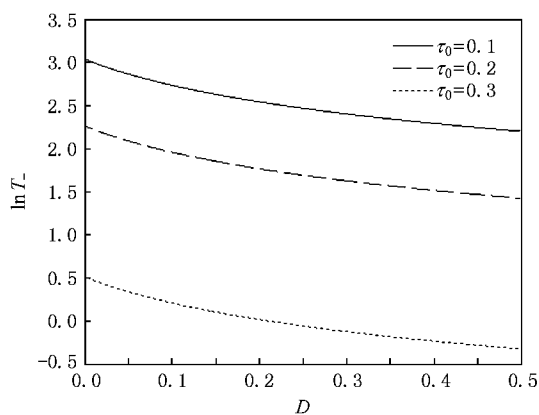


图 10  $T_-$  作为乘性噪声强度  $D$  的函数随不同的自相关时间  $\tau_0$  变化的曲线 ( $Q=0.1, p=0.5$ )

迅速下降,之后随着  $Q$  的增加  $T_+(v_1 \rightarrow v_2)$  的值平缓下降.随着偏离参数  $p$  的增加平均首次穿越时间  $T_+(v_1 \rightarrow v_2)$  几乎保持不变,这与乘性噪声强度  $D$  对  $T_+(v_1 \rightarrow v_2)$  的影响是显然不同的.当偏离参数  $p$  的增加时,  $T_-(v_2 \rightarrow v_1)$  随着加性噪声强度  $Q$  的变化与  $T_-(v_2 \rightarrow v_1)$  随着乘性噪声强度  $D$  的变化大致是相同的.

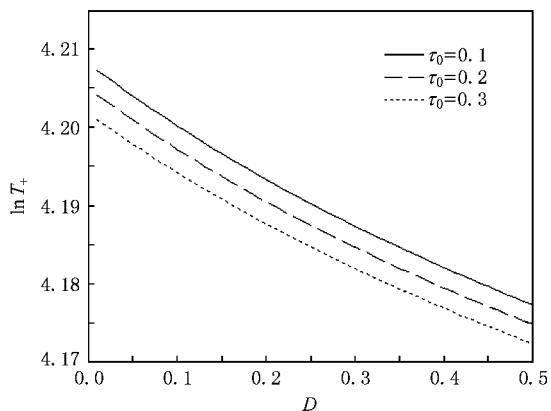


图 9  $T_+$  作为乘性噪声强度  $D$  的函数随不同的自相关时间  $\tau_0$  变化的曲线 ( $Q=0.1, p=0.5$ )

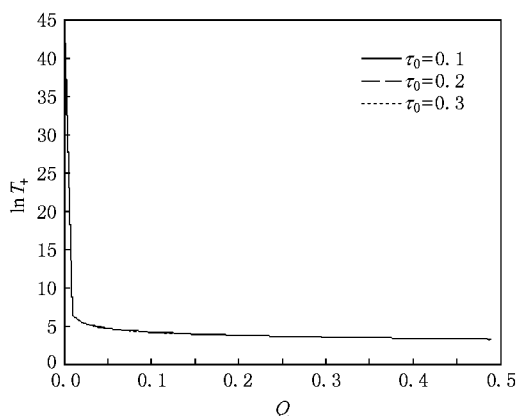


图 11  $T_+$  作为加性噪声强度  $Q$  的函数随不同的自相关时间  $\tau_0$  变化的曲线 ( $D=0.1, p=0.5$ )

图 9 和图 10 分别给出了不同方向的平均首次穿越时间  $T_+(v_1 \rightarrow v_2)$  和  $T_-(v_2 \rightarrow v_1)$  作为乘性噪声强度  $D$  的函数随不同的关联时间  $\tau_0$  的变化情况.观察到平均首次穿越时间  $T_+(v_1 \rightarrow v_2)$  和  $T_-(v_2 \rightarrow v_1)$  均随着乘性噪声强度  $D$  的增加而减小,且固定  $D$  值时,  $T_+(v_1 \rightarrow v_2)$  和  $T_-(v_2 \rightarrow v_1)$  随着关联时间  $\tau_0$  的增大而减小.

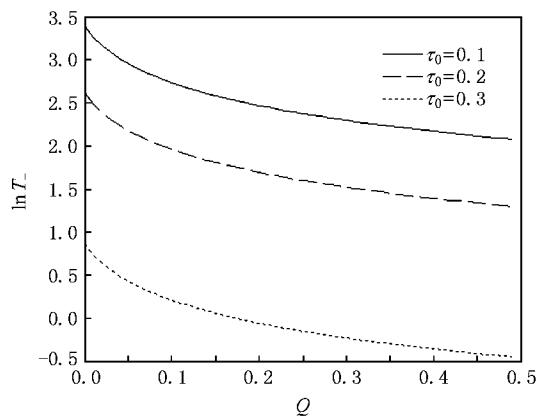


图 12  $T_-$  作为加性噪声强度  $Q$  的函数随不同的自相关时间  $\tau_0$  变化的曲线 ( $D=0.1, p=0.5$ )

穿越时间  $T_+(v_1 \rightarrow v_2)$  和  $T_-(v_2 \rightarrow v_1)$  作为加性噪声强度  $Q$  的函数随不同的关联时间  $\tau_0$  的变化情况.

图 11 和图 12 分别给出了不同方向的平均首次

图 11 与图 7 的几乎相同,随着加性噪声强度  $Q$  的增长,  $T_+(v_1 \rightarrow v_2)$  先骤降后缓降. 固定  $Q$  值, 偏离参数  $p$  及关联时间  $\tau_0$  增长时,  $T_+(v_1 \rightarrow v_2)$  的值基本保持不变. 图 12 与图 8 的变化趋势相同, 随着加性噪声强度  $Q$  的增加,  $T_-(v_2 \rightarrow v_1)$  的值是减小. 固定  $Q$  值, 随着偏离参数  $p$  及关联时间  $\tau_0$  的增长,  $T_-(v_2 \rightarrow v_1)$  的值减小.

图 5 与图 6, 图 7 与图 8, 图 9 与图 10, 图 11 与图 12 对比, 观察到在相同的参数下  $T_+(v_1 \rightarrow v_2)$  总比  $T_-(v_2 \rightarrow v_1)$  大, 这与神经元系统由静息态到激发态转化比较难, 而由激发态到静息态转化比较容易的结论是一致的.

## 5. 结 论

文中得到了由乘性非高斯噪声及加性白噪声共

同驱动的一维 FHN 神经元模型的定态概率密度和平均首次穿越时间的表达式. 发现加性噪声强度  $Q$  能够诱导非平衡相变的产生, 乘性噪声强度  $D$ 、偏离参数  $p$  及关联时间  $\tau_0$  均不能诱导非平衡相变发生. 随着加性噪声强度  $Q$ 、乘性噪声强度  $D$ 、偏离参数  $p$  及关联时间  $\tau_0$  的增加, 平均首次穿越时间  $T_+(v_1 \rightarrow v_2)$  和  $T_-(v_2 \rightarrow v_1)$  的值均呈递减趋势. 非高斯噪声的存在缩短了细胞神经元系统静息态和激发态之间的转换时间, 加快了特定时间内单个神经元的放电节律. 这个事实说明非高斯噪声对神经元信息的传递起到了积极作用而不是消极作用, 即非高斯噪声有利于神经元信息的传递.

- [ 1 ] Jin Y F, Xu W, Ma S J, Li W 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 3480 ( in Chinese) [ 靳艳飞、徐 伟、马少娟、李 伟 2005 物理学报 **54** 3480 ]
- [ 2 ] Wiesenfeld K, Pierson D, Pantazelou E, Dames C, Moss F 1994 *Phys. Rev. Lett.* **72** 2125
- [ 3 ] Nozaki D, Mar D J, Grigg P, Collins J J 1999 *Phys. Rev. Lett.* **82** 2402
- [ 4 ] Alarcon T, Perez-Madrid A, Rubi J M 1998 *Phys. Rev. E* **57** 4979
- [ 5 ] Tuckwell H C, Roger Rodriguez, Wan F Y M 2003 *Neural Computation* **15** 143
- [ 6 ] Acebron J A, Bulsara A R, Rappel W J 2004 *Phys. Rev. E* **69** 026202
- [ 7 ] Hiroyuki Kitajima, Jürgen Kurths 2005 *Chaos* **15** 023704
- [ 8 ] Ning L J, Xu W, Yang X L 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 25 ( in Chinese) [ 宁丽娟、徐 伟、杨晓丽 2007 物理学报 **56** 25 ]
- [ 9 ] Zhang N M, Xu W, Wang C Q 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 5083 ( in Chinese) [ 张娜敏、徐 伟、王朝庆 2007 物理学报 **56** 5083 ]
- [ 10 ] Fuentes M A, Toral R, Wio H S 2001 *Physica A* **295** 114
- [ 11 ] Fuentes M A, Wio H S, Toral R 2002 *Physica A* **303** 91
- [ 12 ] Bouzat S, Wio H S 2005 *Physica A* **351** 69
- [ 13 ] Cao L, Wu D J 1995 *Phys. Rev. E* **52** 3228
- [ 14 ] Yu S N, Jia Y 2000 *Journal of Central China Normal University ( Nat. Sci. )* **34** 281 ( in Chinese) [ 余思宁、贾 亚 2000 华中师范大学学报( 自然科学版) **34** 281 ]
- [ 15 ] Hu G 1994 *Stochastic Forces and Nonlinear Systems* ( Shanghai : Shanghai Scientific and Technological Education Publishing House ) p35—41, p125—138 ( in Chinese) [ 胡 岗 1994 随机力与非线性系统( 上海 : 上海科技教育出版社) 第 35—41, 125—138 页 ]

# The steady state probability distribution and mean first passage time of FHN neural system driven by non-Gaussian noise<sup>\*</sup>

Zhao Yan Xu Wei<sup>†</sup> Zou Shao-Cun

( Department of Applied Mathematics ,Northwestern Polytechnical University ,Xi'an 710072 ,China )

( Received 14 July 2008 ; revised manuscript received 1 September 2008 )

## Abstract

We investigated the FitzHugh-Nagumo neural system driven by non-Gaussian noise. The expressions of the stationary probability distribution and the mean first-passage time are obtained through the path-integral approach and the unified colored noise approximation. The results show that the intensity of additive noise can induce phase transition ,while the intensity of multiplicative noise ,the derivation parameter and the correlation time cannot. The non-Gaussian noise shortens transformation time between resting state and excited state and is beneficial to transmission of information in neural system.

**Keywords** : FitzHugh-Nagumo neural system , non-Gaussian noises , steady probability distribution , mean first-passage time

**PACC** : 0540 , 0570 , 7620

---

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China ( Grant No. 10472091 ).

<sup>†</sup> E-mail : weixu@nwpu.edu.cn