

自适应同步参数未知的异结构 分数阶超混沌系统*

胡建兵[†] 韩 焱 赵灵冬

(中北大学电子测试技术国家重点实验室 仪器科学与动态测试教育部重点实验室 太原 030051)

(2008 年 7 月 20 日收到 2008 年 8 月 15 日收到修改稿)

基于分数阶系统稳定理论,实现了分数阶超混沌 CYQY 系统与参数未知的分数阶超混沌 Lorenz 系统间的异结构自适应同步.不仅设计了控制器,还设计了参数自适应规则并保留了非线性项.数值仿真实证了自适应控制器的有效性.

关键词:分数阶,超混沌,同步,自适应

PACC:0545

1. 引 言

自 1990 年 Pecora 和 Carrol 实现混沌同步以来^[1],混沌同步由于在保密通信等领域的潜在应用价值而得到广泛研究.人们相继提出了诸如线性和非线性反馈方法,延迟反馈方法,自适应方法,Backstepping 方法等多种整数阶混沌同步方法^[2-7].

1983 年 Mandelbort 指出自然界及许多科学技术领域存在大量分数阶现象且在整数阶系统与分数阶系统间存在自相似现象.并且研究表明,整数阶系统是分数阶系统的特例,是实际系统的理想化处理.研究分数阶系统更具有普遍意义.分数阶非线性系统也存在与整数阶非线性系统相似的混沌现象^[8].

尽管对于整数阶混沌系统研究的如火如荼,而且取得了诸多成果.但对于分数阶系统由于其理论的复杂性及研究起步较晚,进展相对较缓慢.对于分数阶线性系统的稳定问题,文献[9]提出了根据系统系数矩阵的特征值的判定定理.然而,对于非线性系统系数矩阵通常含有变量,其系数矩阵是时变的,因而通常不能直接运用该定理进行判断.针对这一问题文献[10]提出了通过设计控制器让同步误差系统的系数矩阵为定常的负定矩来实现混沌同步.这样做虽然实现了同步,但一方面控制代价较大,另一方

面牺牲了非线性项.文献[11]提出了将分数阶系统近似化为整数阶系统从而实现两分数阶系统的同步.但将阶次近似化为整数阶,近似的阶次值与实际阶次值相比可能偏大,也可能偏小,如果偏大设计的控制器没问题,但是如果偏小则从理论上立不住脚,而作者并没在这方面进行分析.

胡建兵等针对阶次小于 1 的分数阶系统提出了基于 Lyapunov 方程的稳定性判定定理^[12].本文基于该理论,对异结构的参数未知的分数阶超混沌系统设计了控制器及参数辨识规则,实现了两混沌系统的自适应同步.

2. 分数阶系统稳定理论

文献[9,13]研究了分数阶线性系统的稳定性问题并给出了判断分数阶系统稳定性的充要条件.

引理 1 考虑自制系统

$$\frac{d^{\alpha}x}{dt^{\alpha}} = Ax, \quad (1)$$

其中 $x \in R^n (n \in N)$, $A \in R^{n \times n}$.

1) 当系统(1)是渐近稳定的,当且仅当矩阵 A 的任意特征值 λ , $|\arg(\lambda)| > \alpha\pi/2$ 都成立.

2) 当系统(1)是稳定的,当且仅当矩阵 A 的任意特征值 λ , $|\arg(\lambda)| \geq \alpha\pi/2$ 都成立.

* 国家自然科学基金(批准号:60372073)资助的课题.

[†] 通讯联系人. E-mail: hjb@nuc.edu.cn

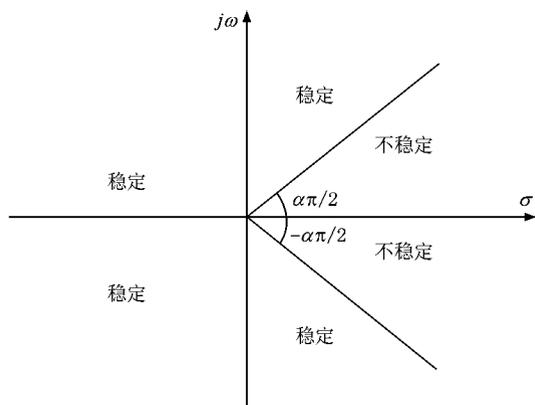


图 1 分数阶系统的稳定区间

α 阶线性系统的稳定区域如图 1 所示,对于分数阶非线性系统如果其在平衡点处的 Jacobian 矩阵的所有特征值都在扇形区域的外部,则该平衡点为稳定的平衡点.如果存在于系统(1)同形的分数阶系统

$$\frac{d^\beta x}{dt^\beta} = Ax. \tag{2}$$

当 $\alpha > \beta$ 时,如果分数阶系统(1)稳定,则分数阶系统(2)一定稳定.相反,当 $\alpha < \beta$ 时,如果分数阶系统(1)稳定,则分数阶系统(2)不一定稳定.因而为了实现系统控制,将分数阶系统近似化为整数阶系统时,从理论上讲只能将阶次做偏大方向的近似化处理.这也是将分数阶系统整数化时需要考虑的问题.

引理 1 给出了分数阶线性系统的稳定性判定定理.然而对于非线性系统系数矩阵 A 中通常含有状态变量,难于直接通过特征值判断系统的稳定性.针对这一问题,文献[12]提出了一个简易的基于 Lyapunov 方程稳定性判定定理.

引理 2 对于分数阶系统(1),当阶数 $\alpha < 1$ 时,如果系统的系数矩阵 A 满足 Lyapunov 方程,即存在实对称正定矩阵 P ,半正定矩阵 Q 使得方程 $AP + PA^H = -Q$ 对于任意的状态变量 x 恒成立,则分数阶系统(1)渐近稳定.

3. 分数阶 CYQY 超混沌系统自适应同步参数未知的分数阶 Lorenz 超混沌系统

王兴元等^[14]通过对 Lorenz 混沌系统添加一个非线性控制器产生了超混沌 Lorenz 系统,其分数阶形式如下:

$$\begin{aligned} \frac{d^\alpha x_1}{dt^\alpha} &= a(x_2 - x_1) + x_4, \\ \frac{d^\alpha x_2}{dt^\alpha} &= cx_1 - x_2 - x_1x_3, \\ \frac{d^\alpha x_3}{dt^\alpha} &= x_1x_2 - bx_3, \\ \frac{d^\alpha x_4}{dt^\alpha} &= -x_1x_3 + rx_4. \end{aligned} \tag{3}$$

研究表明当阶次 $\alpha = 0.93$,系统参数 $a = 10, b = 8/3, c = 28, r = -1$ 时,系统(3)为分数阶超混沌系统^[15].

基于著名的 Lorenz 混沌系统,Chen 等^[16]提出了一个新的超混沌系统,命名为 CYQY 系统,其对应的分数阶形式为

$$\begin{aligned} \frac{d^\alpha y_1}{dt^\alpha} &= -ly_1 + ly_2 + y_2y_3, \\ \frac{d^\alpha y_2}{dt^\alpha} &= ny_1 + y_2 - jy_1y_3 + y_4, \\ \frac{d^\alpha y_3}{dt^\alpha} &= y_1y_2 - my_3, \\ \frac{d^\alpha y_4}{dt^\alpha} &= py_2. \end{aligned} \tag{4}$$

当阶次 $\alpha = 0.93$,系统参数 $l = 35, m = 4.9, n = 25, j = 5, p = 100$ 时,系统(3)为分数阶超混沌系统^[17].

以分数阶超混沌 CYQY 系统(4)作为响应系统同步参数未知的分数阶超混沌 Lorenz 系统(3).对响应系统(4)设计控制器

$$\begin{aligned} \frac{d^\alpha y_1}{dt^\alpha} &= -ly_1 + ly_2 + y_2y_3 - u_1(t), \\ \frac{d^\alpha y_2}{dt^\alpha} &= ny_1 + y_2 - jy_1y_3 + y_4 - u_2(t), \\ \frac{d^\alpha y_3}{dt^\alpha} &= y_1y_2 - my_3 - u_3(t), \\ \frac{d^\alpha y_4}{dt^\alpha} &= py_2 - u_4(t). \end{aligned} \tag{5}$$

由于驱动系统参数 a, b, c, r 未知,以 $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}, \tilde{r}$ 作为未知参数 a, b, c, r 的估计值.则参数估计误差

$$\begin{aligned} e_a &= \tilde{a} - a, \\ e_b &= \tilde{b} - b, \\ e_c &= \tilde{c} - c, \\ e_r &= \tilde{r} - r. \end{aligned} \tag{6}$$

系统(5)和系统(3)的同步误差为

$$\begin{aligned} \frac{d^\alpha e_1}{dt^\alpha} &= -\tilde{a} e_1 + \tilde{a} e_2 + e_4 \\ &+ (-x_1 + x_2)e_a - (l - \tilde{a})y_1 \\ &+ (l - \tilde{a})y_2 + y_2 y_3 - y_4 - u_1(t), \\ \frac{d^\alpha e_2}{dt^\alpha} &= (\tilde{c} - y_3)e_1 - e_2 - x_1 e_3 \\ &+ x_1 e_c + (n - \tilde{c})y_1 \\ &+ 2y_2 + (1 - j)y_1 y_3 + y_4 - u_2(t), \\ \frac{d^\alpha e_3}{dt^\alpha} &= y_2 e_1 + x_1 e_2 - \tilde{b} e_3 - x_3 e_b \\ &+ (\tilde{b} - m)y_3 - u_3(t), \\ \frac{d^\alpha e_4}{dt^\alpha} &= -y_3 e_1 - x_1 e_3 + \tilde{r} e_4 \\ &+ py_2 - \tilde{r} y_4 - u_4(t). \end{aligned} \tag{7}$$

同步的目的就是通过设计合适的控制器 $U = (u_1(t), u_2(t), u_3(t), u_4(t))^T$ 及参数自适应更新规则使响应系统与驱动系统间的同步误差渐近趋于 0, 即 $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$.

定理 1 当系统的阶次 $\alpha < 1$ 时, 如果设计的控制器满足

$$u_i(t) = (1 - \tilde{a})e_1 + (\tilde{a} + \tilde{c} - y_3)e_2$$

$$\begin{aligned} &+ y_2 e_3 + (1 - y_3)e_4 - (l - \tilde{a})y_1 \\ &+ (l - \tilde{a})y_2 + y_1, \\ u_2(t) &= (n - \tilde{c})y_1 + 2y_2 \\ &+ (1 - \tilde{j})y_1 y_3 + y_4, \\ u_3(t) &= (1 - \tilde{b})e_3 - x_1 e_4 \\ &+ (-m + \tilde{b})y_3, \\ u_4(t) &= (1 + \tilde{r})e_4 + \tilde{p} y_2 - \tilde{r} y_4, \end{aligned} \tag{8}$$

和参数自适应辨识规则

$$\begin{aligned} \frac{d^\alpha \tilde{a}}{dt^\alpha} &= k_1(-x_1 + x_2)e_1, \\ \frac{d^\alpha \tilde{b}}{dt^\alpha} &= -k_2 x_3 e_3, \\ \frac{d^\alpha \tilde{c}}{dt^\alpha} &= k_3 x_1 e_1, \\ \frac{d^\alpha \tilde{r}}{dt^\alpha} &= k_4 x_4 e_4, \end{aligned} \tag{9}$$

其中 $k_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 为正常数, 则分数阶误差系统 (7) 渐近稳定.

证明 根据定理 1, 对误差系统 (7) 构造 Lyapunov 方程. 将设计的控制器及参数自适应规则代入误差系统 (7) 得

$$\begin{bmatrix} \frac{d^\alpha e_1}{dt^\alpha} \\ \frac{d^\alpha e_2}{dt^\alpha} \\ \frac{d^\alpha e_3}{dt^\alpha} \\ \frac{d^\alpha e_4}{dt^\alpha} \\ \frac{d^\alpha e_a}{dt^\alpha} \\ \frac{d^\alpha e_b}{dt^\alpha} \\ \frac{d^\alpha e_c}{dt^\alpha} \\ \frac{d^\alpha e_r}{dt^\alpha} \end{bmatrix} = A(x, y) \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_a \\ e_b \\ e_c \\ e_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -(\tilde{c} - y_3) & -y_2 & y_3 & -x_1 + x_2 & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{c} - y_3 & -1 & -x_1 & 0 & 0 & 0 & x_1 & 0 \\ y_2 & x_1 & -1 & x_1 & 0 & -x_3 & 0 & 0 \\ -y_3 & 0 & -x_1 & -1 & 0 & 0 & 0 & x_4 \\ k_1(x_1 - x_2) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_2 x_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_3 x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k_4 x_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_a \\ e_b \\ e_c \\ e_r \end{bmatrix}. \tag{10}$$

令正定矩阵 P 为

- Chinese)[王铁邦、陈光旨、覃团发 2001 物理学报 **50** 851]
- [4] Tao C H, Lu J A, Lü J H 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 5497 (in Chinese)[陶朝海、陆君安、吕金虎 2002 物理学报 **51** 5497]
- [5] Yin X H, Ren Y, Shan X M 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1949 (in Chinese)[尹逊和、任勇、山秀明 2002 物理学报 **51** 1949]
- [6] Li G H, Xu D M, Zhou S P 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 379 (in Chinese)[李国辉、徐得名、周世平 2004 物理学报 **53** 379]
- [7] Min F H, Wang Z H 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 4026 (in Chinese)[闵富红、王执铨 2005 物理学报 **54** 4026]
- [8] Mandelbort B B 1983 *The fractal Geometry of Nature* (New York: Freeman)
- [9] Matignon D 1996 *Computational Engineering in System Application* **2** 963
- [10] Zhang C F, Gao J F, Xu L 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 5124 (in Chinese)[张成芬、高金峰、徐磊 2007 物理学报 **56** 5124]
- [11] Wang F Q, Liu C X 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3922 (in Chinese)[王发强、刘崇新 2006 物理学报 **55** 3922]
- [12] Hu J B, Han Y, Zhao L D 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 7522 (in Chinese)[胡建兵、韩焱、赵灵冬 2008 物理学报 **57** 7522]
- [13] Ahmed E, El-Sayed A M A, Elsaka H A A 2007 *J. Math. Anal. Appl.* **325** 542
- [14] Wang X Y, Wang M J 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 5136 (in Chinese)[王兴元、王明军 2007 物理学报 **56** 5136]
- [15] Ahmed E, El-Sayed A M A, Elsaka H A A 2006 *Phys. Lett. A* **358** 1
- [16] Chen Z, Yang Y, Qi Y, Yuan Z 2007 *Phys. Lett. A* **360** 696
- [17] Huang J 2008 *Phys. Lett. A* **372** 4799
- [18] Yan J P, Li C P 2004 *Chaos, Solitons and Fractals* **22** 443
- [19] Wang J W, Xiong X H, Zhang Y B 2006 *Physica A* **370** 279

Adaptive synchronization between different fractional hyperchaotic systems with uncertain parameters^{*}

Hu Jian-Bing[†] Han Yan Zhao Ling-Dong

(National Key Laboratory For Electronic Measurement Technology, Key Laboratory of Instrumentation Science & Dynamic Measurement of Ministry of Education, North University of China, Taiyuan 030051, China)

(Received 20 July 2008; revised manuscript received 15 August 2008)

Abstract

This paper addresses parameter identification and the adaptive synchronization between fractional CYQY hyperchaotic system and fractional Lorenz hyperchaotic system with uncertain parameters. Based on fractional stability theory, an adaptive controller and the parameter updating rule are designed. Numerical simulation shows the effectiveness of the adaptive controller.

Keywords: fractional, hyperchaotic, synchronization, adaptive

PACC: 0545

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 60372073).

[†] Correspondence author. E-mail: hjb@nuc.edu.cn