

应力未饱和粮仓系统中器壁与颗粒的摩擦阻力^{*}

彭 政^{1)†} 李湘群¹⁾ 蒋 礼¹⁾ 符力平¹⁾ 蒋亦民¹⁾²⁾

1) 中南大学物理科学与技术学院, 长沙 410083)

2) 中南大学粉末冶金国家重点实验室, 长沙 410083)

(2008 年 8 月 20 日收到, 2008 年 10 月 28 日收到修改稿)

对于仓壁不固定的粮仓系统, 其底部压力会随颗粒高度线性增加. 由于没有 Janssen 应力饱和现象, 其力学状态与通常粮仓系统显然不同. 通过上拉和下压这种应力未饱和粮仓系统的仓壁, 实验研究了不同顶部负载时颗粒介质与仓壁的最大静摩擦阻力. 结果显示阻力随颗粒质量的增加在上拉时呈线性增长关系, 但在下压时呈指数增长关系, 下压阻力强度比上拉时大一个量级以上. 此外阻力与顶部负载呈线性变化关系. 这些测量很好地符合了基于应力转向比为常数的假设 (即 Janssen 假设) 下给出的连续力学理论计算, 表明该假设对于此应力未饱和粮仓系统依然适用.

关键词: 颗粒物质, 粮仓, 静摩擦, 应力转向比

PACC: 8270, 4630P, 4610

1. 引 言

粮仓效应是颗粒物质最著名的静态性质之一^[1,2]. 当向一个圆筒仓内填充颗粒 (如粮食) 时, 筒仓底部感受到的压力 F 不会像填充液体一样随着填充高度 h 线性增加, 而是在填充到一定高度以后达到一个饱和值 F_{sat} . 这一有趣的现象来源于颗粒介质与仓壁之间的切向摩擦力, 它使得仓壁能承受颗粒介质的重量, 并使仓底的压力达到饱和. 定量分析粮仓效应的连续介质模型最早由 Janssen 给出^[3,4], 他的一个最主要的假设是颗粒介质的横向 (水平方向) 应力 σ_{rr} 和纵向 (垂直方向) 应力 σ_{zz} 之间存在一个简单比例关系 $\sigma_{rr} = \kappa\sigma_{zz}$, 其中应力转向系数 κ 为与空间位置 r, z 无关的常数. 尽管还没有这个假设的直接实验验证 (就我们所知), Janssen 模型仍然得到了广泛的认可^[1,2], 直到今天仍是粮仓工程设计的力学分析基础^[5]. 近年的实验显示, 它还能用来计算将一根插入粮仓中轴的探测棒拔出时所需的提拉力^[6,7]. 特别值得强调的是, 由于其对颗粒系统中静应力的简单而深刻的概括, 古老的 Janssen 假设对于今天的颗粒物理研究仍有着重要意义, 下列的

一些与其有关的问题目前仍有待研究和澄清: 1) 尽管人们普遍接受转向系数 κ 是常数的说法, 但对它的值却有很大分歧. 在物理文献中曾有转向系数为 0.74 的报道^[8], 而工程师则大多认为转向系数是 0.4 左右^[5]. 2) κ 是一个仅由颗粒物质决定的材料系数, 还是一个也随着仓壁材料或应力的不同而有所变化的参数? 对此, 工程师大多认可 κ 与库仑内摩擦角 φ 之间有 Jaky 提出的经验公式 $\kappa = 1 - \sin\varphi$ ^[5], 意味着 κ 是颗粒材料系数. 3) 除了地面上的一桶沙子或侧仓壁固定的实验装置那样的通常粮仓以外, Janssen 假设是否还适用于一些更广泛的静止颗粒系统, 如本文将考虑的仓壁不固定的应力未饱和粮仓^[9] 或任何具有库埃特 (Couette) 几何的颗粒系统. 值得提到的是, 在十几年前的文献中, 一些学者曾尝试将其推广到沙堆那样的侧面为自由边界的圆锥形状系统^[10]. 我们倾向认为它可能对库埃特几何系统是一个很不错的假设. 4) Janssen 模型的精确程度. 近年来, 对通常粮仓底部压力的一些研究发现, 实验数据与 Janssen 模型计算结果有一定的偏差, 为此研究者提出了一些新的拟合公式^[8,11]. 但该偏差是因为 κ 不完全是常数, 还是因为颗粒与仓壁的边界条件不同, 或其他原因, 仍有待澄清. 5) 支持 Janssen 模型的实验大多是间接的, 主要是底部压力的测量数

^{*} 国家自然科学基金 (批准号: 30674181) 资助的课题.

[†] 通讯联系人. E-mail: pz177@yahoo.com.cn

据.显然,直接测量 κ 或颗粒对仓壁的作用力,应能解决这些问题,因此值得发展有关实验方法和技术.6)原则上讲,连续力学方程可以计算 κ ,从而为 Janssen 假设提供理论基础.但需要注意的是,由于目前还没有一组颗粒连续力学方程被广泛认可,不同作者在理论分析粮仓时使用了不同的方程.文献 [12] 和文献 [8] 分别报道了用准弹性模型(Quasi-Elastic Model^[11])和 OSL 模型(oriental stress linearity)对通常粮仓底部压力的计算结果.最近文献 [13] 用非线性弹性理论计算了通常粮仓中所有应力分量的空间分布,计算结果表明 κ 的空间变化的确很小,并且符合工程上经常用到的 Jaky 经验公式.由于方程的不确定,目前还不能单用理论来验证 Janssen 假设.在这一情形下,围绕 κ 问题进行的各种测量,将有益于解决这个理论方程不确定的问题.

由此看出,当前人们对粮仓的认识仍相当有限,许多基本问题还没解决.工程上粮仓倒塌的现象时有发生(如 2008 年 2 月 8 日在广州黄浦新港发生的万吨级粮仓无征兆倒塌事故^[14]).倒塌说明仓壁的受力不是很稳定,会突然发生大改变.这种改变往往由粮仓装料、卸料过程的流动引起,也可以由外界温度变化导致的颗粒热膨胀引起^[15],或许还有目前仍不知晓的其他原因.由于应力转向比 κ 与仓壁的法向压力密切相关,因此它也是研究粮仓倒塌问题时的一个重要参数.

实验上很难对三维粮仓颗粒内部的应力作直接测量,可用的方法是通过测量仓壁或仓底的受力(即测量粮仓的力学边界)来探测粮仓内部的应力状态.这些粮仓效应的实验通常是固定仓壁,测量仓底的力.在这类实验中仓壁施加于颗粒介质的摩擦力的方向总是与重力方向相反(竖直向上),大小可能会随粮仓的填充方式不同而变化.文献 [9] 建议了一种在仓壁可移动的粮仓体系中研究纵向应力的实验方法.但由于能在一定范围内改变仓壁摩擦力的大小和方向,该方法能在更大的应力状态范围内研究转向比问题.在这种装置中,仓底受到的压力将等于颗粒的重力与仓壁纵向受力之和.因此,仓底压力随着颗粒堆积高度线性增加,没有通常粮仓的 Janssen 应力饱和现象.为区别起见,我们将用“应力未饱和粮仓”来称呼这类粮仓系统.本工作将针对仓壁受力与重力方向相同和相反的两种情况,测量该系统仓壁摩擦力的最大值随颗粒填充质量和顶部负载的变化关系.最大摩擦力的数据可用来进一步分析转向比,

同时避免边界条件的不确定性带来的影响.此时,由于仓壁与颗粒在任何地方都处于最大静摩擦这一极限情况(或者侧边界附近的颗粒达到了库仑屈服的极限状态),颗粒侧边界的切向与法向应力的比值 $\sigma_{rz}/\sigma_{rr} = \mu_m$ 将是与颗粒和仓壁材料有关的常数.即为颗粒和仓壁间的摩擦系数.通过拟合,我们发现 Janssen 的“转向系数为常数”的假设仍能很好地描述所得到的结果,从而把它的适用范围扩充到包括应力未饱和粮仓在内的更大一类颗粒圆柱系统.

2. 实验装置与实验方法

如图 1 所示,底部固定的不锈钢活塞和一个悬空的 PVC 材质圆筒在注入颗粒介质以后构成了应力未饱和和粮仓实验系统.活塞尺寸 $D_p = 25.9 \text{ mm}$,圆筒内径 $D (= 2R) = 27.2 \text{ mm}$,颗粒为粒径在 2.5—3.0 mm 之间的玻璃珠.由于颗粒尺寸较大,在实验过程中圆筒与底部活塞之间保持不接触,同时其缝隙不会卡入颗粒.注入颗粒的质量 M 最少为 13 g (此时填充高度 h 约为 15 mm),最多为 130 g,等分为 10 个等级分别填充进行实验.颗粒在圆筒顶部通过漏斗定点注入,注入颗粒以后在颗粒介质顶部附加不同的砝码负载 l (最小 0 g,最大 122.9 g).通过下压和向上提拉仓壁,可实现与重力方向相同和相反的两种仓壁受力情况的测量.

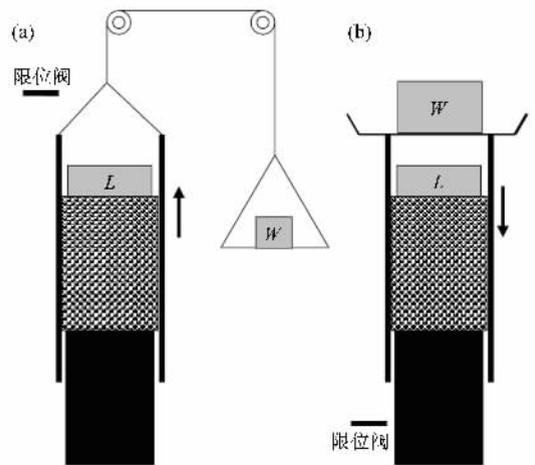


图 1 实验装置示意图 (a)上拉仓壁实验 (b)下压仓壁实验

在提拉实验中(图 1(a)),外圆筒由定滑轮系统通过逐步添加砝码 W 改变竖直向上提拉力,当砝码重量达到 W_1 时,外筒由于拉力超过最大静摩擦力而发生移动,但这种移动会在外筒向上移动一段距

离(约 1 cm 左右 称之为“预位移”)以后由于颗粒系统的摩擦力得到重组和更充分的动员(mobilized)而停止.继续添加砝码至 W_2 ,此时外筒受到的拉力由于超过了颗粒介质重组后给予外筒的最大静摩擦力,外筒无法保持静止将一直滑动至限位阀处(整个过程外筒移动超过 15 cm).由于颗粒系统内部的应力状态以及与界面的摩擦状态都和颗粒系统的初始排布有关,即使每次以同样的方法制备“粮仓”,颗粒系统的初始状态也不可能完全相同,故每次实验得到的 W_1 和 W_2 是不同的.尽管如此,多次实验得到的 W_2 的最大值 W_m 应是唯一的,因为 W_m 对应了颗粒系统在所有可能的无规排布下与筒壁能达到的静摩擦力最大的状态,即 Janssen 模型中假设的理想的最大静摩擦力状态,应该与制备历史无关.在实验中,对于同样的颗粒填充质量 M 和加载 L ,我们并不每次重新制备“粮仓”,而是直接将外筒拉回至初始位置多次重复实验,同时适当加减砝码 W 以找到最大的 W_2 .由于外筒多次上下移动对颗粒系统的搅动,实际上已经破坏了制备历史,多次尝试后得到的 W_m 与制备历史无关.将 W_m 减去滑轮系统的系统摩擦力以及外筒的自重以后,就得到了外筒给予颗粒系统的向上最大静摩擦力 F_+ (拉力).

在下压实验中(图 1(b)),直接在外圆筒上方加载砝码 W 向下压,对于固定的填充颗粒 M 以及固定的负载 L ,同样有“预位移”现象出现,和提拉实验中的处理过程一样,通过多次移动外筒回初始位置找到 W_2 的最大值 W_m ,也与制备历史无关. W_m 加上外筒自重即外筒作用于颗粒系统的向下最大静摩擦力 F_- (压力).

3. 实验结果

图 2 和图 3 为颗粒介质受到侧壁的最大拉力 F_+ 和最大压力 F_- 随负载 L 的变化关系.由图可见,对于各种不同的颗粒质量 M , F_+ 和 F_- 均随 L 线性增加,但是对于同样的 M 和 L , F_- 的数值普遍要比 F_+ 大一个量级以上,且这种压力与拉力的差别还会随着 M 的增大而迅速加大,例如当 $M = 104$ g 时,这种差别已经接近两个数量级.对于图 3 中的下压实验数据 F_- ,由于首先需要一定高度的颗粒介质才能支撑住外筒的自重,故下压实验中采用的最小颗粒质量 M 为 52 g.此外,由于 F_- 随 M 增加

很快,而受实验加载条件所限(提供的最大加载在 14 kg 左右),因此对于 M 较大的 F_- 数据,颗粒顶部的加载 L 只加到 50.9 g.尽管如此,数据增长的趋势已经十分明显.

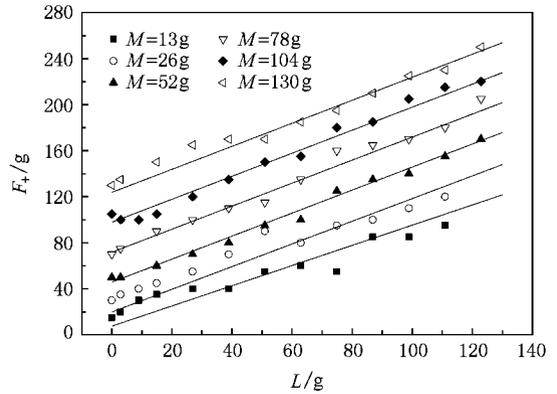


图 2 对于不同颗粒填充质量 M , 拉力 F_+ 随负载 L 的变化关系 (图中实线为理论公式(3)的拟合曲线)

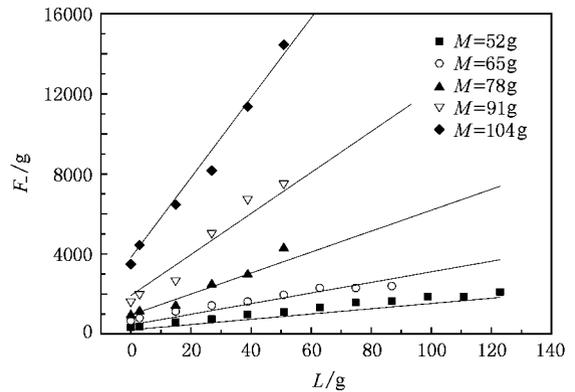


图 3 对于不同颗粒填充质量 M , 压力 F_- 随负载 L 的变化关系 (图中实线为理论公式(6)的拟合曲线)

图 4 和图 5 所示为 F_+ 和 F_- 随 M 的变化关系.在图 4 中,对于各种负载 L , F_+ 在 M 较大时随 M 线性增加,仅在 M 较小且 L 较大时略微偏离线性.而在图 5 中, F_- 随 M 的增长速度严重偏离线性,呈现高于线性的快速增长.图 2 至图 5 中的各条实线是用理论分析公式(见下文)对所有上拉(下压)数据进行最小二乘法拟合得到的拟合曲线,其中图 2 和图 4 的所有上拉数据进行统一拟合,图 3 和图 5 的所有下压数据进行统一拟合,在拟合过程中仅有一个拟合参量 m_0 ,得到图 2 和图 4 的 $m_0 = 6.2$ g,图 3 和图 5 的 $m_0 = 19.6$ g.由于颗粒介质顶部负载 L 和拉压加载 W 均为砝码,为简单明了,图 2 至图 5 中 F_+

与 F_+ 的单位直接采用了质量单位 g .

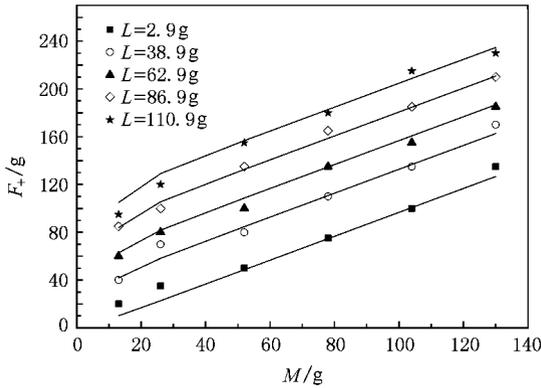


图 4 对于不同的顶部负载 L 拉力 F_+ 随颗粒质量 M 的变化关系(图中实线为理论公式(3)的拟合曲线)

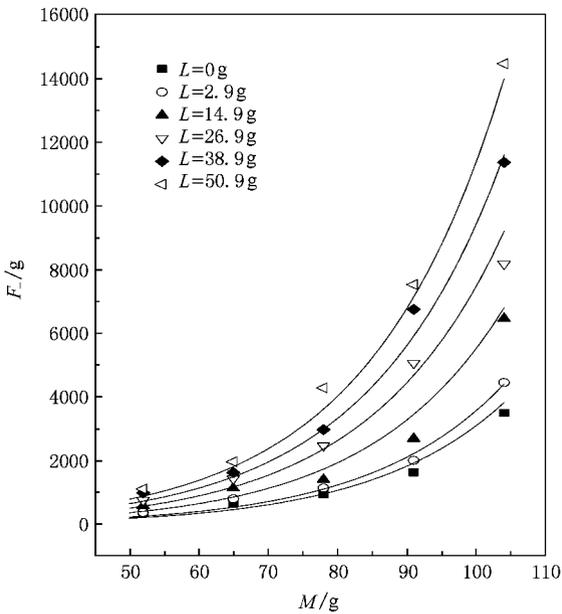


图 5 对于不同的顶部负载 L 压力 F_- 随颗粒质量 M 的变化关系(图中实线为理论公式(6)的拟合曲线)

4. 分析与讨论

由于在所有实验中颗粒介质与侧筒壁均达到了最大静摩擦的边界条件,侧边界的切法向应力比 $\sigma_{rz}/\sigma_{rr} = \mu_m$ 将总是等于由系统材料确定的最大静摩擦系数.这时,如果转向系数 κ 也是常数,解力平衡方程能得到下面的关于最大提拉力 F_+ 和最大下压力 F_- 随加载 L 颗粒质量 M 变化的理论公式.

4.1. 上拉实验

在拉力实验中,筒壁对颗粒介质的摩擦力方向与通常的粮仓效应一致,都是与重力方向相反,因此有相同的力平衡分析.对于颗粒介质体积微元的力平衡方程为^[1,2]

$$\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{\lambda} P = \rho g, \quad (1)$$

其中 $\lambda = R/2\mu_m \kappa$, $P(z)$ 为颗粒介质竖直方向压强, ρ 为颗粒介质的平均密度, g 为重力加速度.我们的拉力实验与通常的粮仓实验的差别在于纵向的边界条件,实验中颗粒介质顶部有负载砝码 L ,即边界条件为 $z = 0$ 时 $P_0 = \frac{Lg}{\pi R^2}$.结合边界条件,由方程(1)

解得

$$P = \rho g \lambda (1 - e^{-z/\lambda}) + P_0 e^{-z/\lambda}. \quad (2)$$

当颗粒顶端负载 $L = 0$ 时(2)式就是常见的粮仓效应底部压强公式.对于填充高度为 h 填充质量为 $M (= \rho \pi R^2 h)$ 的颗粒介质,其对外筒壁的最大静摩擦力为

$$\begin{aligned} F_+ &= \int_0^h 2\pi R \mu_m \kappa P dz \\ &= \rho g \pi R^2 [h + \lambda(e^{-h/\lambda} - 1)] - Lg(e^{-h/\lambda} - 1) \\ &= (L - m_0) \lambda (1 - e^{-M/m_0}) g + Mg, \end{aligned} \quad (3)$$

式中 $m_0 = \rho \pi R^2 \lambda = \frac{\rho \pi R^3}{2\mu_m \kappa}$, 为粮仓效应中的饱和质量,是与系统参量有关的常数.

由(3)式可知,对于固定的 M , F_+ 与 L 呈线性关系,如图 2 所示.而对于固定的 L ,在 M 较大时由于(3)式右边第一项中的指数项可以忽略,因而 F_+ 与 M 呈线性关系,而对于 M 较小时(3)式右边第一项中指数项的影响不可忽略,因此 $F_+ - M$ 关系在小 M 段会略微偏离线性.由(3)式可知这种偏离在 L 较大时会更加明显,这些变化都很好地反应在图 4 的实验数据中.图 2 和图 4 的所有数据用(3)式进行了统一拟合,得到最佳拟合参数 $m_0 = 6.2 g$.拟合曲线用实线标示在图中.由拟合数据的良好程度可见(3)式很好地描述了上拉实验过程外筒壁受到的颗粒介质最大静摩擦力.

4.2. 下压实验

在下压实验中,筒壁对颗粒介质的摩擦力方向与通常的粮仓相反,即与重力方向相同且达到最大

静摩擦. 这时在颗粒介质体积微元的力平衡方程中关于摩擦力的项需要反号, 即

$$\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{1}{\lambda} P = \rho g. \quad (4)$$

在边界条件 $z=0$ 时 $P_0 = \frac{Lg}{\pi R^2}$ 下解得

$$P = \rho g \lambda (e^{z/\lambda} - 1) + P_0 e^{z/\lambda}. \quad (5)$$

对于填充高度为 h , 填充质量为 $M (= \rho \pi R^2 h)$ 的颗粒介质, 其对外筒壁的最大静摩擦力为

$$\begin{aligned} F_- &= \int_0^h 2\pi R \mu_m \kappa P dz \\ &= \rho g \pi R^2 [-h + \lambda (e^{h/\lambda} - 1)] + Lg (e^{h/\lambda} - 1) \\ &= (L + m_0) g (e^{h/\lambda} - 1) + Lg, \end{aligned} \quad (6)$$

其中 $m_0 = \rho \pi R^2 \lambda = \frac{\rho \pi R^3}{2\mu_m \kappa}$, 与 (3) 式中的物理含义相同. 注意这里的最大阻力公式 (3) (6) 与文献 [9] 的计算结果是一样的. 由 (6) 式可知, 对于固定的 M , F_- 与 L 呈线性关系, 如图 3 所示. 而对于固定的 L , F_- 随着 M 增加呈现 e 指数增长, 如图 5 所示. 图 3 和图 5 的所有数据用 (6) 式统一拟合得到较好的结果, 最佳拟合参数 $m_0 = 19.6 \text{ g}$.

注意到除连续介质的前提外 (3) 式和 (6) 式只有“转向比为常数”这一个假设, 因此理论公式与实验数据良好的符合 (间接) 支持了这一假设的正确性. 由于不清楚 μ_m 的值, 目前还不能从公式中出现的唯一的拟合参数 $m_0 = \frac{\rho \pi R^3}{2\mu_m \kappa}$ 推出 κ 的确切大小, 但通过对比下压实验的 $m_0 (= 19.6 \text{ g})$ 和上拉实验的 $m_0 (= 6.2 \text{ g})$, 得上拉过程的 κ 大约是下压过程 κ 的三倍. 仅仅因为边界上受到的摩擦力方向的不同就导致转向系数三倍的变化, 这一结论不仅违反工程上广泛接受的 Jaky 经验公式, 同时也违反文献 [13] 的非线性弹性理论计算结果. 因此这个差别应该是尺寸效应造成的, 不能用连续介质模型解释. 由于在实验中为避免颗粒卡缝, 我们所采用的颗粒尺寸较大, 容器直径与颗粒直径之比仅为 10 左右, 尺寸效应完全可能带来影响. 在提拉实验中 m_0 较小 (即 κ 较大), 意味着侧壁对颗粒的支撑作用更明显, 这很可能是尺寸效应中的成拱阻塞造成的. 如果的确是这样的话, 增大容器尺寸应该会缓解这种成拱阻塞, 从而减小提拉实验中反常的 κ . 为验证这一解释, 我们换了一个较大尺寸的外筒 ($D = 34 \text{ mm}$, 容器直径与颗粒直径之比增加到 12 左右), 保持其余条件不变, 重做了上拉和下压实验. 实验结果 (未给出图) 仍

然能用 (3) 式和 (6) 式很好拟合, 上拉和下压的 m_0 分别为 28.9 g 与 40.6 g . 因为 $\kappa \propto \frac{R^3}{m_0}$, 通过换算以后, 得大容器 ($D = 34 \text{ mm}$) 下压过程的 κ 与小容器 ($D = 27.2 \text{ mm}$) 下压过程的 κ 基本相符 (差别约 6%) 并且大容器提拉过程的 κ 与下压过程的 κ 的差距不到两倍, 这比小容器情形的三倍差距有了明显缩小. 这说明上拉实验中 κ 反常大的现象的确与尺寸效应有关. 我们将在另一文章中, 专门讨论这个尺寸效应. 这里需要指出的是, 尺寸效应主要对提拉实验有显著影响, 且只改变 m_0 的值, 并不影响 (3) 式 (或“应力转向比为常数”这一假设) 的适用性.

为比较应力未饱和粮仓和通常粮仓的转向系数, 我们还在同样实验条件 (同样的颗粒尺寸与容器尺寸, 同样的材料, $D = 27.2 \text{ mm}$) 下测量了通常粮仓的饱和质量 m_0 . 实验过程同样尽量保证颗粒介质与侧壁达到最大静摩擦状态, 方法是通过在底部扰动粮仓使得底部测量到的压力最小, 这意味着最多的颗粒重量被器壁支撑而达到最大静摩擦状态. 此方法得到的实验数据与 Janssen 公式符合很好 (未给出图), 拟合得到的饱和质量 $m_0 = 22.2 \text{ g}$. 这表明通常粮仓的 κ 与应力未饱和粮仓下压实验的 κ 基本符合, 只有上拉实验的 m_0 (或 κ) 是异常的. 由于通常粮仓中颗粒介质摩擦力的方向与上拉实验相同而与下压实验相反, 这一结果表明并不是摩擦力的方向直接导致了 κ 的反常.

本文实验的测量精度可能会受到下面一些因素的影响. 首先, 装置的垂直程度、活塞与筒壁间缝隙的大小、加载 (特别是大加载) 造成的圆筒变形、提拉实验中滑轮的系统摩擦力等, 都可能影响测量结果的精确程度. 尽管目前看来这些装置因素对实验结果和主要结论的影响不大, 我们仍将通过进一步改进装置来验证这一点. 其次, 本文在分析实验数据时, 曾假设颗粒物质密度均匀 (即 ρ 为常数), 但实际样品在实验过程中或多或少会出现密度不均匀的现象. 由于目前从实验上测量局域密度的不均匀性还很困难, 我们将在今后通过理论计算来估算密度不均匀对本实验结果的影响程度. 样品的平均密度可直接由实验测得, 它是否会对转向比或摩擦系数产生一定影响, 也是今后实验将注意和考察的内容. 最后, 由于本实验中采用的是在圆筒上施加恒定作用力的实验方法, 而非其他提拉实验 (例如文献 [6] 和 [7]) 中常用的施加恒定提拉速度的方法, 因此, 当

上拉(或下压)的恒定力介于 w_1 和 w_2 (见本文第二节讨论)之间时,系统可能会出现非稳状态,如圆筒的慢速蠕动、滑阻运动(stick-slip)等.仔细观测此时圆筒的运动情况和行为,是进一步提高本实验精度的关键,也将是我们今后实验中重点考虑的内容.

5. 结 论

对仓壁不固定的应力未饱和粮仓,通过对仓壁逐步施加向上(向下)的拉(压)力,测量了能够保持仓壁保持静止的拉力和压力的最大值,即仓壁受到的颗粒介质的最大静摩擦阻力.在实验所使用装置的几何,以及施加力和填充颗粒质量的变化范围内,得到了下面几点结论:1)下压最大静摩擦阻力比上拉最大静摩擦阻力大一到两个量级.2)下压阻力随着填充颗粒质量的增加呈指数增大,而上拉阻力的这个变化基本上是线性的.3)下压和上拉阻力随着颗粒顶部加载的增加而增大,并且都是线性关系.4)在 Janssen 转向系数为常数的假设下,连续介质分析能很好地描述这些上拉或下压数据,间接表明该假设对仓壁静态阻力达到最大的应力未饱和粮仓系统仍然适用.5)当圆筒容器直径与颗粒直径之比 γ 为 10 左右时,上拉应力转向系数比下压的要大 3 倍左右,但如果 γ 增加到 12 左右,这个差别会明显缩小至 2 倍以下,表明这种转向系数的差别来自容器尺

寸效应的影响.6)当 γ 分别为 10 和 12 左右时,用下压数据得到的转向系数几乎相等,并且与用通常粮仓测得的转向系数符合,表明尺寸效应只对上拉情况产生明显的影响(其原因目前还不清楚).

综合上述结果,本工作倾向于支持这样的看法,即任何径向受到管道状几何限制的轴对称静止颗粒系统(简称 Couette 几何系统),都相当精确地满足 Janssen 提出的转向系数为常数的猜测.另外一个有意思和值得提到的现象是,在这个应力未饱和粮仓实验中,100 g 左右的颗粒就可以导致器壁上 10 kg 的下压阻力,而同时上拉阻力仍然很小(100 g 的量级).这种单向阻力行为很类似机械中常见的棘齿效应(结构).而应力未饱和粮仓结构至少有一般棘齿轮(棘齿结构)所不具备的如下优点:由于下压阻力随颗粒质量指数增加,因此可以通过加减颗粒来轻易调节“棘齿程度”的大小,不用担心过载的影响.应力未饱和粮仓效应中的过载只能出现在下压过程,而过载无非是将颗粒破坏成粒径更小的颗粒,从而增大容器与颗粒的尺寸比.从目前的实验看来,提高两者尺寸比,不会改变下压过程的 m_0 ,即下压阻力不受影响.而提高尺寸比则甚至会提高上拉过程的 m_0 ,这更会减小上拉阻力,从而更突出阻力的单向性.颗粒物质在应力未饱和粮仓系统中体现出的这种单向阻力行为也许能在机械和工程上找到重要的应用.

- [1] de Gennes P G 1999 *Rev. Mod. Phys.* **71** S374
- [2] Lu K Q, Liu J X 2004 *Physics* **33** 629 (in Chinese) [陆坤权、刘寄星 2004 物理 **33** 629]
- [3] Janssen H A 1895 *Z. Ver Deutch. Ing.* **39** 1045
- [4] Sperl M 2006 *Granular Matter* **8** 59
- [5] National Standard of P. R. China GBJ77-85 1988 reinforced concrete silo design specification (Geijing: China Planning Press) 中华人民共和国国家标准 GBJ 77-85 1988 钢筋混凝土筒仓设计规范 (北京:中国计划出版社)
- [6] Hu L, Yang P, Xu T, Jiang Y, Xu H J, Long W, Yang C S, Zhang T, Lu K Q 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 879 (in Chinese) [胡林、杨平、徐亭、江阳、须海江、龙为、杨昌顺、张、陆坤权 2003 物理学报 **52** 879]
- [7] Kong W S, Hu L, Du X N, Zhang X G, Wang W M and Wu Y 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 2318 (in Chinese) [孔维妹、胡林、杜学能、张兴刚、王伟明、吴宇 2007 物理学报 **56** 2318]
- [8] Vanel L, Claudin P, Bouchaud J P, Cates M E, Wittmer J P 2000 *Phys. Rev. Lett.* **84** 1439
- [9] Jiang Y M, Zheng H P 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 7360 (in Chinese) [蒋亦民、郑鹤鹏 2008 物理学报 **57** 7360]
- [10] Bouchaud J P, Cates M E, Claudin P 1995 *J. Phys. I. France.* **5** 639
- [11] Vanel L, Clement E 1999 *Eur. Phys. J. B* **11** 525
- [12] Evesque P, de Gennes P G 1998 *C. R. Acad. Sci. Paris* **326** Serie II b 761
- [13] Brauer K, Pflitzner M, Krimer D O, Mayer M, Jiang Y M, Liu M 2006 *Phys. Rev. E* **74** 061311
- [14] Southern Metropolis Daily, Million-ton Silo Collapse in Xingang Huangpu Guangzhou, Feb. 9 2008 [南方都市报, 广州黄埔新港万吨级粮仓倒塌, 2008 年 2 月 9 日 <http://news.sina.com.cn/c/2008-02-09/022714917947.shtml>]
- [15] de Gennes P G 1999 *C. R. Acad. Sci. Paris* **327** Serie II b 267

Friction force between wall and granular matter for a silo with unsaturated stress^{*}

Peng Zheng^{1)†} Li Xiang-Qun¹⁾ Jiang Li¹⁾ Fu Li-Ping¹⁾ Jiang Yi-Min¹⁾²⁾

¹⁾ *School of Physics Science and Technology, Central South University, Changsha 410083, China*

²⁾ *State Key Laboratory for Powder Metallurgy, Central South University, Changsha 410083, China*

(Received 20 August 2008 ; revised manuscript received 28 October 2008)

Abstract

For a silo with unfixed wall, the pressure on its bottom will increase linearly with the height of granular material filled in it. Because no Janssen stress saturation occurs, its mechanic states differ from that of usual silo. By vertically pulling and pushing the wall of the silo, we measured the maximum static friction force of the wall, as functions of the load applied on the silo top and the mass filled in the silo. It is observed that the force increases with the mass, linearly for the pulling case, while exponentially for the pushing case, of which value for the latter may be one order of magnitude larger than that for the former. The force also increases with the load, linearly for both cases. The measurements can be well fitted with the theoretical results of continuous mechanics, assuming that ratio between horizontal and vertical stresses keeps the same everywhere inside the silo. The results support that the assumption made by Janssen for usual silo also suitable for the silo which has no stress saturation.

Keywords : granular matter, silo, friction force, Janssen stress ratio

PACC : 8270, 4630P, 4610

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10674181).

[†] E-mail : pz177@yahoo.com.cn