

# 水平层状各向异性介质中电磁场并矢 Green 函数的一种高效算法<sup>\*</sup>

陈桂波<sup>1)†</sup> 汪宏年<sup>1)</sup> 姚敬金<sup>2)</sup> 韩子夜<sup>2)</sup> 杨守文<sup>1)</sup>

1) 吉林大学物理学院, 长春 130021)

2) 中国地质科学院地球物理地球化学勘探研究所, 廊坊 065000)

(2007 年 11 月 11 日收到, 2008 年 8 月 17 日收到修改稿)

利用高阶窗函数结合连分式展开等技术研究并建立一种水平层状各向异性介质中电磁场并矢 Green 函数的快速有效算法. 首先借助于高阶窗函数将构成并矢 Green 函数的 Sommerfeld 积分转化成广义快速下降路径上积分, 并给出高阶窗函数 Hankel 变换的一种新的更高阶幂级数展开式以及严格的 Lommel 函数表达式, 以满足在全空间上高精度计算并矢 Green 函数的要求. 在此基础上, 用 Bessel 函数的零点将积分路径划分成一系列小区间并通过改进的自适应 Gauss 求积公式确定各个小区间上的积分值, 然后引入连分式展开法对各个区间上的积分值求和, 从而使整个积分的收敛效率得到大大提高. 最后通过数值结果验证本方法的有效性.

关键词: 高阶窗函数, 连分式展开, 并矢 Green 函数, 层状各向异性介质

PACC: 4110H, 0350D

## 1. 引 言

在地球物理勘探、遥测遥感、微波与天线等诸多应用物理学领域, 经常需要解决水平层状各向异性介质中的三维电磁散射问题, 虽然有限差分<sup>[1,2]</sup>或有限元算法<sup>[3]</sup>是求解三维电磁散射问题较为有效的方法, 但在使用过程中需要在全空间对 Maxwell 方程进行离散化处理, 其整个计算工作量往往较大. 如果采用积分方程法<sup>[4,5]</sup>求解该问题, 由于只需要对目标体表面或其内部的 Maxwell 方程进行离散化处理, 其求解区域和未知量个数均能有效降低, 使得该算法在计算有限大小目标体的三维电磁散射问题时具有更强的优势. 然而, 由于需要计算大量的并矢 Green 函数以便对散射场方程进行离散化处理, 使得积分方程法的离散化过程非常耗时, 往往成为实际应用中的瓶颈. 水平层状各向异性介质中的并矢 Green 函数一般是由复杂核函数的 Sommerfeld 积分组成<sup>[6,7]</sup>, 被积函数本身的高振荡和慢衰减性质影响了数值积分的精度和效率, 因此如何高效计算并矢 Green 函数是积分方程法的一项关键技术. 目前, 国内外许多

学者对于该问题已开展了深入研究并提出了几种快速算法. 例如在地球物理学领域中应用较多的快速 Hankel 变换法<sup>[8,9]</sup>, 虽然该算法的效率较高, 但其计算精度对接收点位置等参数变化非常敏感, 在近场或高频情况下其计算精度很低甚至有时会导致错误的计算结果. 离散复镜像法在微波与天线领域的应用较多<sup>[10,11]</sup>, 其计算速度也较快, 但发射源的工作频率必须限定在某一范围内且源和接收点需要位于同一介质层中, 这种苛刻条件也限制了其应用范围. Cui 等人利用最陡下降法和首项近似得到一种层状介质中 Sommerfeld 积分的快速算法<sup>[12]</sup>, 但由于在多层介质中很难确定最陡下降路径<sup>[13]</sup>, 使得该方法一般只限于简单的半空间模型.

本文将在 Cai 等人提出的高阶窗函数<sup>[14]</sup>的基础上建立一种水平层状各向异性介质中电磁场并矢 Green 函数的快速有效算法. 首先利用高阶窗函数将 Sommerfeld 积分转化成广义快速下降路径上积分, 并给出高阶窗函数 Hankel 变换的一种新的高阶幂级数展开式以及严格的 Lommel 函数表达式, 从而可以高精度计算出全空间上的并矢 Green 函数值. 在此基础上, 用 Bessel 函数的零点将积分路径划分

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金(批准号: 40374044)和中国地质科学院重点开放实验室专项基金(批准号: KL05-26)资助的课题.

<sup>†</sup> E-mail: guiboche5976@yahoo.com.cn

成一系列小区间并通过改进的自适应 Gauss 求积公式确定各个小区间上的积分值,然后为了提高整个积分的收敛效率,采用连分式展开技术对各个区间上的积分值求和.最后给出数值计算结果.

## 2. 水平层状各向异性介质中的并矢 Green 函数

图 1 为  $N$  层水平层状各向异性介质模型(为简单起见,本文只考虑单轴各向异性大地介质),层界面位置用  $d_n(n=2,3,\dots,N)$  表示,复介电常数和磁导率分别用对角张量  $\bar{\epsilon}_n^* = \text{diag}(\epsilon_{nh}^*, \bar{\epsilon}_{nh}^*, \epsilon_{nv}^*)$  和  $\bar{\mu}_n = \text{diag}(\mu_{nh}, \mu_{nh}, \mu_{nv})$  ( $n=1,2,\dots,N$ ) 表示,其中  $\epsilon_{nh}^*, \bar{\epsilon}_{nh}^*$  分别是第  $n$  层介质的横向和纵向复介电常数,而  $\mu_{nh}, \mu_{nv}$  分别是第  $n$  层介质的横向和纵向磁导率.复介电常数  $\bar{\epsilon}_n^*$  的两个分量由  $\epsilon_{np}^* = \epsilon_0 \epsilon_{np} + (i\omega R_{np})^{-1}$  ( $p=h,n$ ) 确定,其中  $\epsilon_{nh}, \epsilon_{nv}$  分别为横向和纵向相对介电常数, $R_{nh}, R_{nv}$  分别为横向和纵向电阻率.

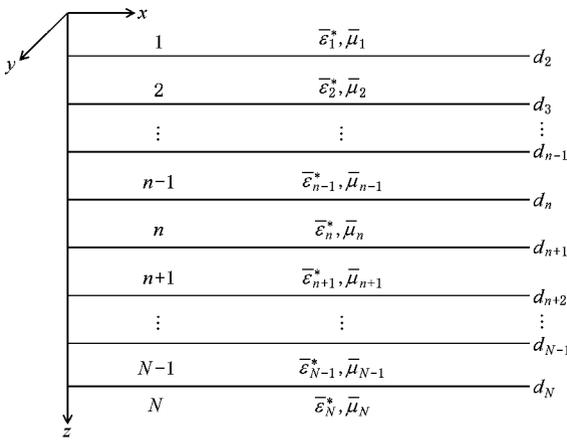


图 1 水平层状各向异性介质模型示意图

在水平层状介质中,任意空间分布的电流源和磁流源( $\mathbf{J}, \mathbf{M}$ )产生的电磁场满足 Maxwell 方程(假定时间因子为  $e^{i\omega t}$ )

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= -i\omega \bar{\boldsymbol{\mu}} \cdot \mathbf{H} - \mathbf{M}, \\ \nabla \times \mathbf{H} &= i\omega \bar{\boldsymbol{\epsilon}}^* \cdot \mathbf{E} + \mathbf{J}, \end{aligned} \quad (1)$$

如果引入水平层状介质中的并矢 Green 函数,则(1)式的解可表示为<sup>[5]</sup>

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \int \bar{\mathbf{G}}^{\text{JE}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \\ &+ \int \bar{\mathbf{G}}^{\text{ME}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}', \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{r}) &= \int \bar{\mathbf{G}}^{\text{JH}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \\ &+ \int \bar{\mathbf{G}}^{\text{MH}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}', \end{aligned} \quad (2)$$

其中  $\bar{\mathbf{G}}^{\text{JE}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \bar{\mathbf{G}}^{\text{ME}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  为空间域电场并矢 Green 函数,  $\bar{\mathbf{G}}^{\text{JH}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \bar{\mathbf{G}}^{\text{MH}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  为空间域磁场并矢 Green 函数,  $\mathbf{r}$  和  $\mathbf{r}'$  分别是接收点和源点位置.

为了由(2)式计算已知发射源( $\mathbf{J}, \mathbf{M}$ )产生的电磁场,必须首先计算空间域并矢 Green 函数.根据 Michalski 等人<sup>[6]</sup>的结果,空间域并矢 Green 函数的各个分量一般由 Sommerfeld 积分

$$\begin{aligned} g(\rho; iz, iz') &= S_n[\tilde{\mathbf{G}}(k_\rho; iz, iz')] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \tilde{\mathbf{G}}(k_\rho; iz, iz') J_n(k_\rho \rho) k_\rho^{n+1} dk_\rho \end{aligned} \quad (3)$$

组成,其中  $J_n(k_\rho \rho)$  为  $n$  阶 Bessel 函数,  $\tilde{\mathbf{G}}(k_\rho; iz, iz')$  表示频率域并矢 Green 函数(见附录 A).这里需要指出的是,与电场和磁场并矢 Green 函数相比,混合势并矢 Green 函数<sup>[6]</sup>由于具有低阶奇异性而更易于数值计算,因此混合势积分方程(MPIE)广泛用于 PECO(Perfect electrically conducting object)表面散射问题的求解<sup>[7]</sup>,但 MPIE 却不适于非均匀介质中体散射的计算,因此本文只研究电场和磁场并矢 Green 函数的计算问题.

## 3. 并矢 Green 函数的高效计算

### 3.1. Sommerfeld 积分转化为广义快速下降路径积分

为有效计算(3)式右端的 Sommerfeld 积分,首先引入尺度因子为  $a$  的径向对称  $m(m > 0)$  阶窗函数:

$$\varphi(x, y) = \varphi(\rho) = \begin{cases} \left[1 - \left(\frac{\rho}{a}\right)^2\right]^m, & \rho \leq a \\ 0, & \text{其他,} \end{cases} \quad (4)$$

式中  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ .将(3)式中的 Green 函数与(4)式中的  $\varphi$  做褶积,可得

$$\frac{1}{2\pi} g(\rho; iz, iz') * \varphi(\rho) = S_0[\tilde{\mathbf{G}}(k_\rho; iz, iz') \Psi_0(k_\rho)], \quad (5)$$

其中  $\Psi_0(k_\rho) = S_0[\varphi(\rho)]$  为窗函数(4)的 Hankel 变换.若将(5)左边的褶积进行泰勒展开并与(3)式结合,则可得到(3)式右端积分的新公式<sup>[15]</sup>:

$$g(\rho, iz, iz') = \begin{cases} \frac{1}{C_0} S_0 [ \tilde{G}(k_\rho, iz, iz') \Psi_0(k_\rho) ] + O(a^2), \rho > a, \\ \frac{1}{R^2 C_0} [ R^2 W_0(\rho, iz, iz') - 2\rho W_1(\rho, iz, iz') + W_2(\rho, iz, iz') ] + O(a^2), \rho \leq a, \end{cases} \quad (6)$$

其中  $R = \sqrt{\rho^2 + (z - z')^2}$ ,  $C_0 = \frac{a^2}{\chi(m+1)}$ ,

$$\begin{aligned} W_0(\rho, iz, iz') &= S_0 [ \tilde{G}(k_\rho, iz, iz') \Psi_0(k_\rho) ], \\ W_1(\rho, iz, iz') &= S_1 [ \tilde{G}(k_\rho, iz, iz') \Psi_1(k_\rho) / k_\rho ], \\ W_2(\rho, iz, iz') &= S_0 [ \tilde{G}(k_\rho, iz, iz') \Psi_2(k_\rho) ]; \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \Psi_0(k_\rho) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^a \varphi(\rho) J_0(k_\rho \rho) \rho d\rho, \\ \Psi_1(k_\rho) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^a \varphi(\rho) J_1(k_\rho \rho) \rho^2 d\rho, \\ \Psi_2(k_\rho) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^a \varphi(\rho) J_0(k_\rho \rho) \rho^3 d\rho. \end{aligned} \quad (8)$$

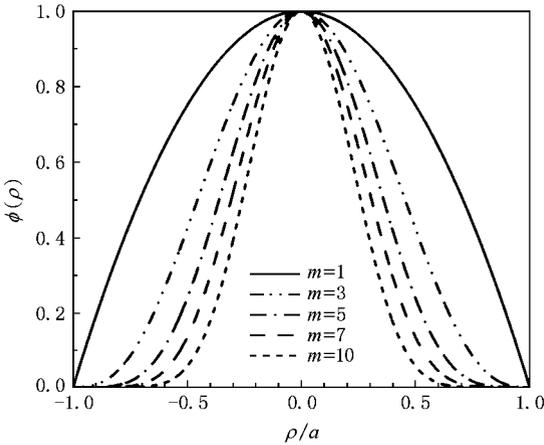


图 2 高阶窗函数 ( $m = 1, 3, 5, 7, 10$ )

由于高阶窗函数(4)在空间域中较为平滑(图2),而在频率域中下降很快(图3),因此(7)式中  $W_0, W_1$  和  $W_2$  的被积函数将快速衰减,这也相当于建立了一条新的广义快速下降路径,其数值积分将比直接利用(3)式计算具有更高的收敛速度.为了说明这一点,考虑图4所示的具有五层各向异性介质的模型1,假定整个模型为非磁性的并且空间中任意点的磁导率都等于真空中的  $\mu_0$ ,各介质层的电阻率及层边界深度由图中标注.在计算模型1中电场并矢 Green 函数时一般要遇到如下形式的 Sommerfeld 积分的计算:

$$\begin{aligned} g_1(\rho, iz, iz') &= S_0 [ V_i^+(k_\rho, iz, iz') ] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} V_i^+(k_\rho, iz, iz') J_0(k_\rho \rho) k_\rho dk_\rho, \end{aligned} \quad (9)$$

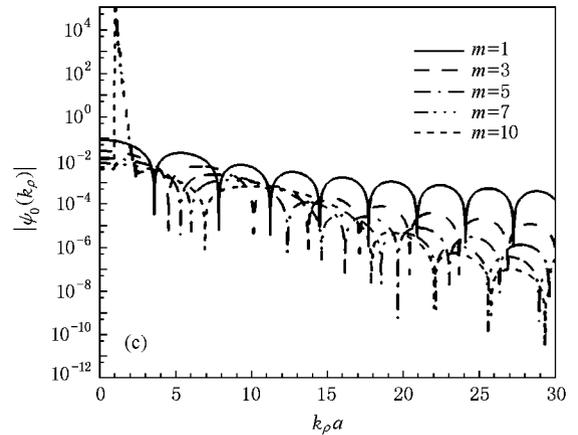
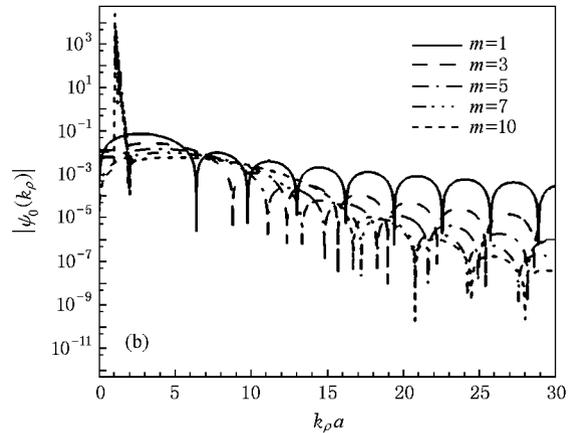
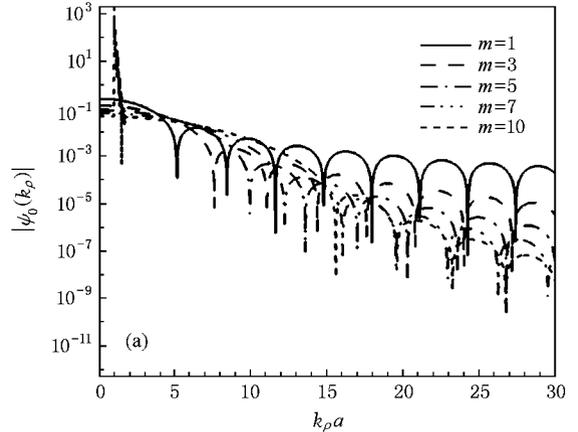


图 3 高阶窗函数 Hankel 变换 ( $a = 1; m = 1, 3, 5, 7, 10$ )

其中  $V_i^+(k_\rho, iz, iz')$  为传输线 Green 函数(附录 A).图5给出了  $g_1(\rho, iz, iz')$  的被积函数  $\tilde{g}_1 = V_i^+(k_\rho, iz, iz')$

$J_0(k_{\rho}\rho)k_{\rho}$  与由 (7) 定义的

$$\begin{aligned} &W_0(\rho; iz, iz') \\ &= S_0 [ V_i'(k_{\rho}; iz, iz') \Psi_0(k_{\rho}) ] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} V_i'(k_{\rho}; iz, iz') \Psi_0(k_{\rho}) J_0(k_{\rho}\rho) k_{\rho} dk_{\rho} \quad (10) \end{aligned}$$

的被积函数  $\tilde{W}_0 = V_i'(k_{\rho}; iz, iz') \Psi_0(k_{\rho}) J_0(k_{\rho}\rho) k_{\rho}$  随  $k_{\rho}$  的变化曲线对比, 这里令源和接收点分别位于  $z' = 0.0$  和  $z = 0.01$  m,  $\rho = 1$  m, 发射频率为 20000 Hz. 由图 5 可以看出, 高阶窗函数对 Sommerfeld 积分的收敛性能的提高作用是明显的, 并且  $m$  越大, 被积函数下降得越快, 积分的收敛速度也将越高. 然而注意到当  $m$  较大 ( $m = 10$ ) 时会引起小  $k_{\rho}$  时的函数跳动 (图 3), 反而会影响到最后的计算精度, 我们经过大量的计算发现一般  $m = 5$  时会获得较好的计算精度与效率, 因此本文后面的计算实例中均将  $m$  取为 5.

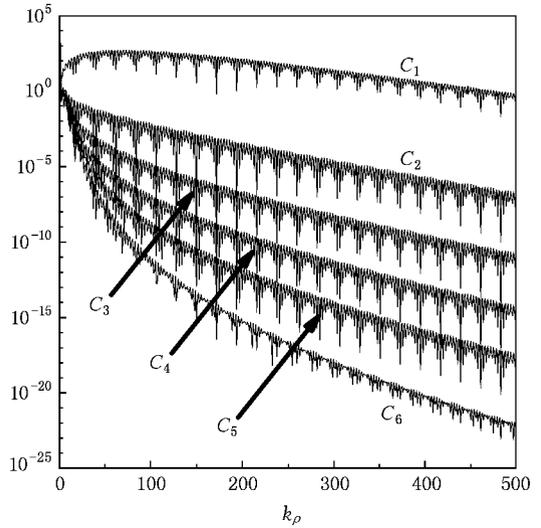


图 5  $g_1$  与  $W_0$  的被积函数性质对比 ( $C_1: |\tilde{g}_1|, C_2: |\tilde{W}_0|_{m=1}, C_3: |\tilde{W}_0|_{m=3}, C_4: |\tilde{W}_0|_{m=5}, C_5: |\tilde{W}_0|_{m=7}, C_6: |\tilde{W}_0|_{m=10}$ )

### 3.2. 积分的快速收敛

由于在地球物理问题中研究的各向异性地层均为有耗介质, 因此 (7) 式中的 Sommerfeld 积分在积分路径上不会有奇点出现. 利用 Bessel 函数的各级零点将整个积分路径划分成一系列子区间, 并且每个子区间用自适应 Gauss 积分公式计算, 则 (7) 式右端积分可转化成各子区间积分值的叠加<sup>[17]</sup> (这里略去常数项  $1/2\pi$ )

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_j S_n^{(j)} \\ &= \sum_j \int_{k_{\rho}^{(j-1)}}^{k_{\rho}^{(j)}} \tilde{F}(k_{\rho}; iz, iz') J_n(k_{\rho}\rho) \mathcal{K}_{\rho}^{n+1} dk_{\rho} \\ &\approx \sum_{j=1}^N \left[ \sum_{i=1}^M w_i [ \tilde{F}(k_{\rho}; iz, iz') J_n(k_{\rho}\rho) \mathcal{K}_{\rho}^{n+1} ]_{k_{\rho}=k_{\rho}^{(i)}} \right]_{k_{\rho}^{(j-1)}}^{k_{\rho}^{(j)}}, \quad (11) \end{aligned}$$

式中  $\tilde{F}(k_{\rho}; iz, iz')$  为 (7) 式中 [ ] 内的函数,  $k_{\rho}^{(j)}$  为  $J_n(k_{\rho}\rho)$  的第  $j$  个零点 ( $k_{\rho}^{(0)} = 0$ ),  $w_i$  为 Gauss 求积系数. 由于传统 Gauss 积分公式在 Gauss 点数发生变化时, 需要重新计算所有被积函数的值, 降低了计算效率. 为此我们采用一种改进的自适应 Gauss 积分公式<sup>[18]</sup>, 当积分节点增加时只需计算新增节点上被积函数的值. 实际计算时先从  $M_1 (= 3)$  点积分公式开始, 依次扩展为  $M_k (= 2M_{k-1} + 1, k = 2, 3, \dots, 7)$  点积分公式, 直至达到预先给定的精度要求, 该积分公式的代数精度为  $(3M_k + 1)/2$ .

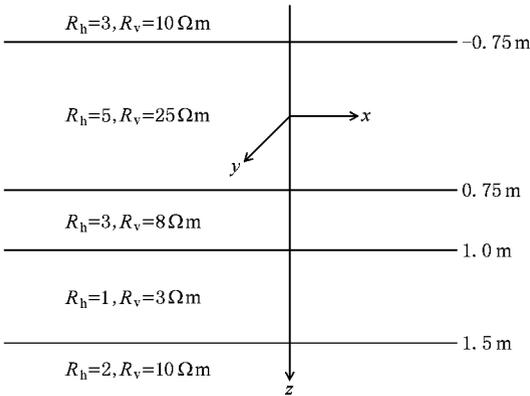


图 4 五层各向异性介质模型 1 的示意图

为快速计算 (7) 式中的各个积分, 还需要 (8) 式中窗函数 Hankel 变换的解析解. 虽然 Yu 等人给出了计算窗函数 Hankel 变换方法与公式, 但我们在重新推导这些公式时, 发现其给出的结果存在一些明显的不足. 例如, 关于  $k_{\rho} < 1$  时  $\Psi_0, \Psi_1, \Psi_2$  近似幂级数展开式, 由于阶次不够而难以满足某些参数条件下高精度计算并矢 Green 函数的要求; 此外, 由 Lommel 函数建立的关于  $k_{\rho} \geq 1$  时  $\Psi_0, \Psi_1, \Psi_2$  表达式由于 Lommel 函数在某些参数条件下没有定义<sup>[16]</sup> 而无法得到更广泛的应用. 经过重新推导有关公式, 我们得到了窗函数 Hankel 变换新的更高阶次的幂级数展开式以及严格的适用于全部参数范围的 Lommel 函数值的计算公式 (附录 B), 并在附录 C 中给出了  $m = 1-8$  时的  $\Psi_0, \Psi_1, \Psi_2$  具体表达式.

由于 Bessel 函数的振荡特性 (11) 式求和序列  $s_n^{(j)}$  中相邻项或相近项往往具有相反的符号, 导致直接求和收敛缓慢甚至难于收敛. 为提高其收敛速度, 本文引入收敛区域较大、收敛速度较快的有限连分式展开技术<sup>[19]</sup>, 将 (11) 式求和序列表示成有限连分式的形式

$$S_n \approx \sum_{j=1}^N s_n^{(j)} = \frac{c_1}{1 + \frac{c_2}{1 + \frac{c_3}{1 + \dots + \frac{c_{N-1}}{1 + c_N}}}}, \quad (12)$$

其中  $c_1, c_2, \dots, c_N$  为连分式系数, 由下面给出的 P-算法<sup>[20]</sup>依次确定:

当  $j \leq 2$  时,  $D_n = s_n^{(j)}, c_j = -D_j/D_{j-1}$  (这里令  $D_0 = -1$ ).

当  $j > 2$  时, 令  $L = 2 \cdot \text{INT}[(j-1)/2]$  (这里  $\text{INT}[X]$  为  $X$  的整数部分),  $Y(L)$  为初值为零的一维数组, 并引入以下循环式:

$$\begin{aligned} Y(k) &= Y(k-1) + c_{j-1} Y(k-2), \\ k &= L, L-2, \dots, A, \\ Y(2) &= Y(1) + c_{j-1}. \end{aligned} \quad (13)$$

每次循环之后将  $Y$  的奇数项元素与偶数项元素互换:

$$\begin{aligned} Y(2) &\rightarrow Y(1), Y(1) \rightarrow Y(2); \\ Y(4) &\rightarrow Y(3), Y(3) \rightarrow Y(4); \dots \end{aligned} \quad (14)$$

则可得到系数  $c_j$  的计算式

$$c_j = -D_j/D_{j-1}, \quad (15)$$

$$\text{其中 } D_j = s_n^{(j)} + \sum_{l=1}^{L/2} s_n^{(j-l)} Y(2l-1).$$

为了考察连分式展开对积分收敛性能的改进, 我们对 (11) 式的直接求和法和 (12) 式的连分式展开法进行了大量的数值实验和对比, 发现连分式展开算法具有更高的收敛效率. 图 6 是以模型 1 为例并采用两种方法得到的由 (10) 式定义的  $W_0(\rho; iz, z')$  的值与求和项数之间的变化关系曲线, 这里  $z' = 0.0, z = 0.01 \text{ m}, \rho = 1 \text{ m}$ , 发射频率为 20000 Hz. 图中曲线可以清楚的显示出连分式展开算法随着求和项数的增加快速收敛, 而直接求和法的结果却存在着非常明显的振荡, 需要更多的计算区间才能收敛到真值. 由此可见, 引入连分式展开技术大大提高了积分的收敛速度以及整个计算的效率, 特别是对一些慢收敛的积分, 其效果更为明显.

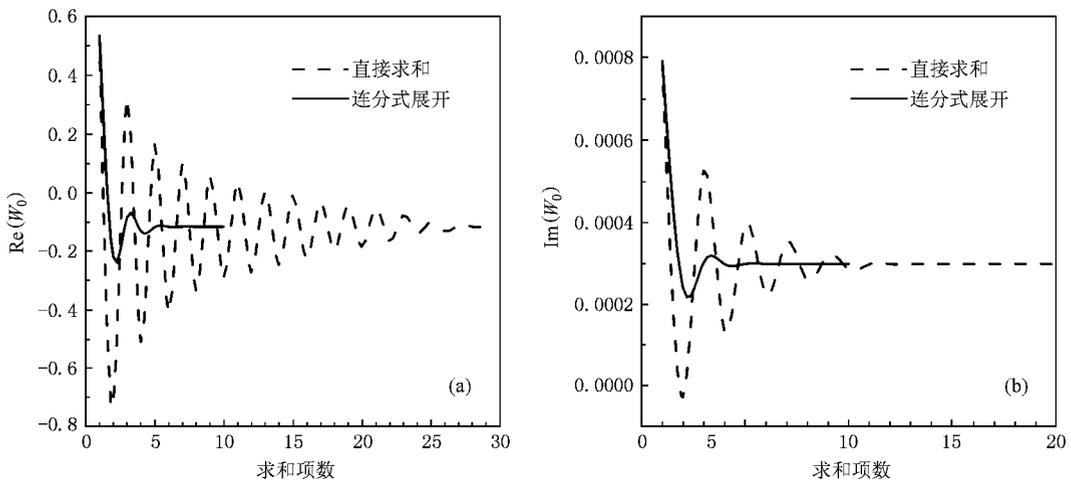


图 6 连分式展开法与直接求和法的收敛性对比

### 4. 数值计算结果

#### 算例 1

首先考虑一个非磁性的半空间模型 2, 如图 7 所示, 大地的横向和纵向电阻率分别为 100 和 200  $\Omega\text{m}$ . 沿  $x$  方向的单位大小的电偶极子位于图中  $xyz$  坐标原点处, 接收点位于 (50, 50, 0 m) 处. 由 (2) 式

可知, 沿  $x$  方向单位大小的电偶极子产生电场的  $x$  和  $y$  向分量在数值上等于电流源电场并矢 Green 函数  $\bar{G}^{\text{IE}}$  的  $xx$  和  $yx$  分量. 图 8 为分别使用本文算法、直接对 (3) 式数值积分的直接积分法、快速 Hankel 变换法以及解析解法<sup>[21]</sup>在  $10^{-1} - 10^6$  Hz 频段计算了接收点处的电场  $E_x$  和  $E_y$  分布曲线. 通过对比可发现快速 Hankel 变换方法在高频时的误差较大, 而其他三种方法的计算曲线则在整个频段内都比较符合. 图 8 的每条曲线都包含 64 个节点, 在 Pentium

3.0 GHz 计算机上,快速 Hankel 变换法的计算时间为 1.1 s,本文方法的计算时间为 3.0 s,而直接积分方法的计算时间为 27.5 s,在保证计算精度的同时,本文方法要比直接积分法的计算效率提高 9 倍多。

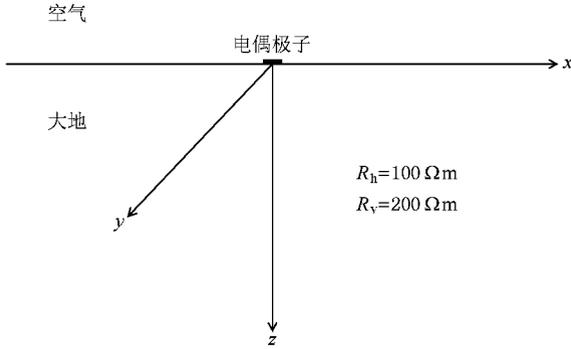
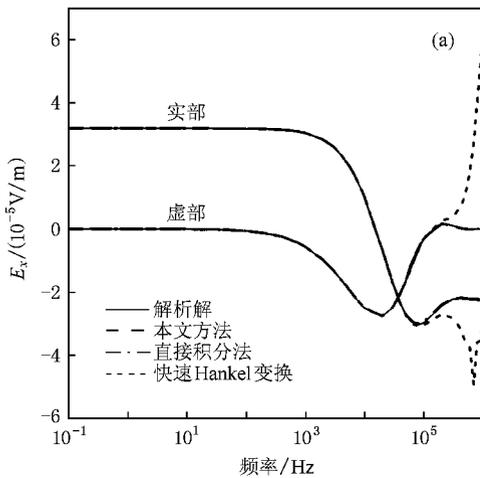


图 7 半空间模型 2 的示意图

## 算例 2

下面再考虑图 4 所示的模型 1,假定发射源为位于  $xyz$  坐标原点处的单位大小的垂直磁偶极子,发射频率为 1000 Hz. 由(2)式可知,单位大小的垂直磁偶极子产生的磁场  $z$  向分量在数值上等于磁流



源磁场并矢 Green 函数  $\tilde{G}^{HJ}$  的  $zz$  分量. 图 9(a)和 (b)为沿着经过  $(y, z) = (0, 0.5 \text{ m})$  且平行于  $x$  轴的直线计算的磁场  $z$  向分量分布,分别采用本文算法、直接对(3)式数值积分的直接积分法、快速 Hankel 变换法以及我们新近开发的基于数值模式匹配技术的半解析算法<sup>[22]</sup>. 由图中曲线可以看出,在横向距离较小时,快速 Hankel 变换法出现了明显的误差,而其他三种方法的计算结果则比较符合. 图 9(a), (b)每条曲线都包含 64 个计算节点,在 Pentium 3.0 GHz 计算机上,快速 Hankel 变换法用时 2.8 s,本文方法用时 8.6 s,直接积分法用时 88.5 s,半解析法用时 3.7 s,可见本文方法与半解析法均具有较高的计算精度与效率. 图 9(c)和 (d)为沿着经过  $(x, y) = (10, 10 \text{ m})$  且平行于  $z$  轴的直线计算的磁场  $z$  向分量分布,同样采用上述四种算法来计算. 由(c)中曲线可以看出,半解析法在  $z = 0$  附近出现了明显误差,而其他三种算法的计算结果则比较符合. 图 9(c)(d)每条曲线都包含 75 个计算节点,在 Pentium 3.0 GHz 计算机上,快速 Hankel 变换方法用时 1.2 s,本文方法用时 3.5 s,直接积分法用时 38.9 s,半解析法用时 1.6 s.

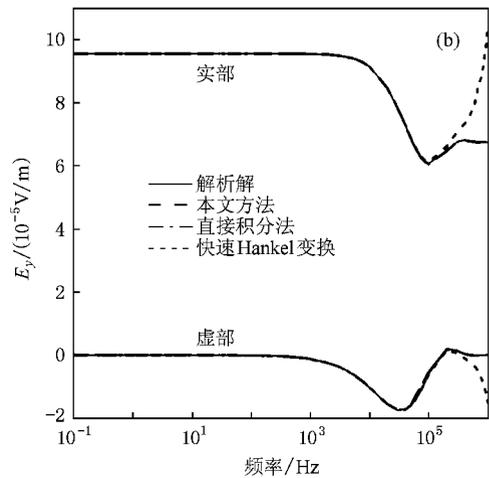


图 8 不同方法计算的电场  $x$  和  $y$  向分量分布图

通过前面的对比分析可知,快速 Hankel 变换法和半解析法具有比其他方法更高的计算效率,但它们的计算精度对某些参数的变化非常敏感. 直接积分方法和本文方法的计算精度受参数条件的限制较小,数值结果较为稳定,而在计算效率方面本文方法要比直接积分法有很大的提高. 因此,与其他几种数值算法相比,本文方法具有适用范围广并且计算效率高等优点.

## 5. 结 论

本文利用高阶窗函数将 Sommerfeld 积分转化为沿广义快速下降路径上的积分,并结合连分式展开技术得到了一种水平层状各向异性介质中空间域并矢 Green 函数的快速有效算法. 高阶窗函数 Hankel 变换的一种新的更高阶次的幂级数展开式以及严格

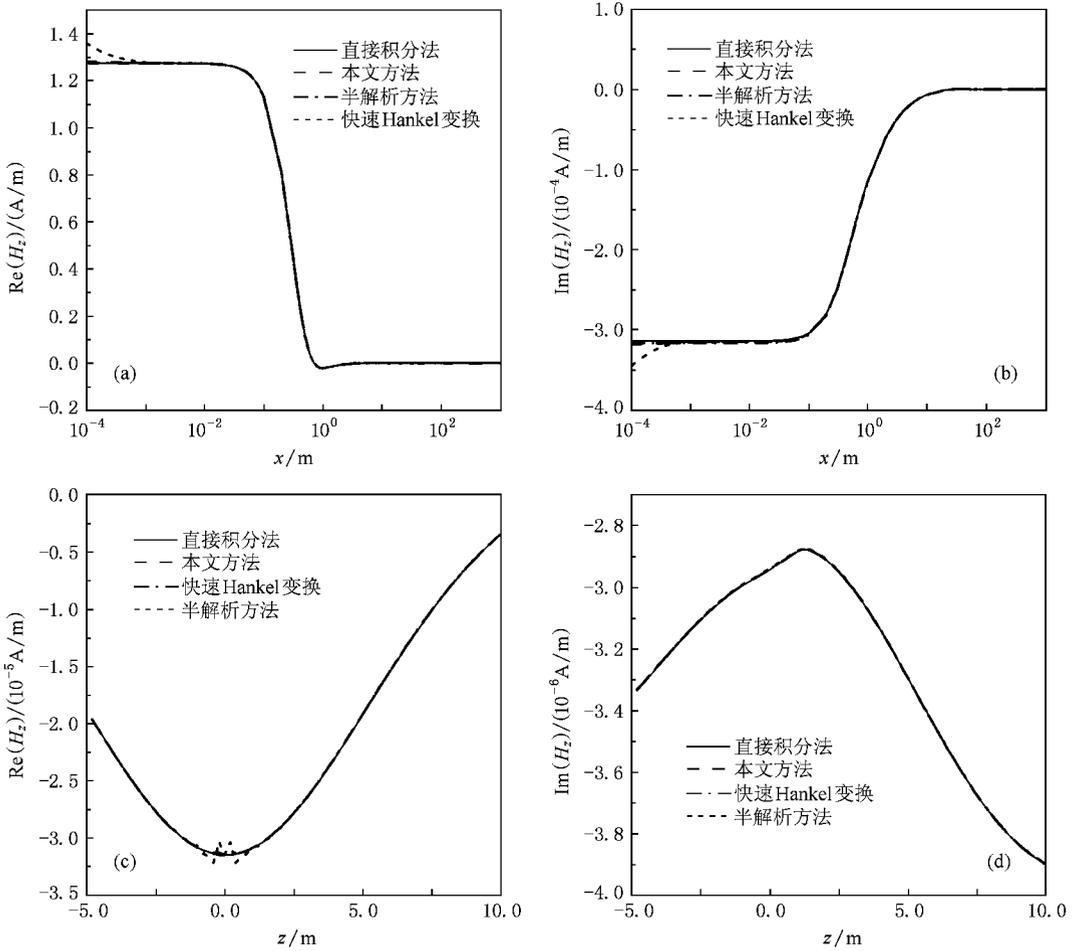


图9 不同方法计算的磁场 z 向分量分布图

的 Lommel 函数表达式有助于提高全空间上并矢 Green 函数的计算精度,而数值结果表明连分式展开技术能够大大提高积分求和的收敛效率.由于该算法具有较好的适用性,可方便用于积分方程求解复杂介质中的三维电磁散射问题.

### 附录 A 频率域与空间域并矢 Green 函数表达式

根据文献[6]的结果,通过付氏变换方法可得到磁流源并矢 Green 函数在频率域中的解

$$\tilde{\mathbf{G}}^{\text{MH}}(k_\rho; iz, iz')$$

$$= \begin{pmatrix} -(k_x^2 I_v^h + k_y^2 I_v^e) \gamma k_\rho^2 & k_x k_y (-I_v^h + I_v^e) \gamma k_\rho^2 & k_x I_v^h / \omega \mu_0 \\ k_x k_y (-I_v^h + I_v^e) \gamma k_\rho^2 & -(k_x^2 I_v^e + k_y^2 I_v^e) \gamma k_\rho^2 & k_y I_v^h / \omega \mu_0 \\ k_x V_v^h / \omega \mu_0 & k_y V_v^h / \omega \mu_0 & -k_\rho^2 V_v^h / \omega^2 \mu_0^2 \end{pmatrix}, \quad (\text{A1})$$

$$\tilde{\mathbf{G}}^{\text{ME}}(k_\rho; iz, iz')$$

$$= \begin{pmatrix} k_x k_y (V_v^e - V_v^h) \gamma k_\rho^2 & -(k_x^2 V_v^e + k_y^2 V_v^h) \gamma k_\rho^2 & k_y V_v^h / \omega \mu_0 \\ (k_x^2 V_v^e + k_y^2 V_v^h) \gamma k_\rho^2 & -k_x k_y (V_v^e - V_v^h) \gamma k_\rho^2 & -k_x V_v^h / \omega \mu_0 \\ -k_y I_v^e / \omega \epsilon_v^* & k_x I_v^e / \omega \epsilon_v^* & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A2})$$

其中  $k_\rho = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ ,  $V_i^p, I_i^p, V_v^p, I_v^p$  ( $p = h, e$ ) 分别表示电流和电位 Green 函数,上角标“h”和“e”分别表示 TE 波和 TM 波,其在第  $n$  层介质中的表达式为

电流 Green 函数:

$$V_i^p(z, z')$$

$$= \begin{cases} A_n^+ e^{-ik_n^p z (z-d_{n+1})} [1 + \tilde{R}_{n,n+1}^{(p,i)} e^{-2ik_n^p (d_{n+1}-z)}], & z > z', \\ A_n^- e^{ik_n^p z (d_n-z)} [1 + \tilde{R}_{n,n-1}^{(p,i)} e^{-2ik_n^p (z-d_n)}], & z < z', \end{cases} \quad p = h, e, \quad (\text{A3})$$

$$I_i^p(z, z') = \frac{dV_i^p(z, z')}{dz} / ik_z^p, \quad p = h, e. \quad (\text{A4})$$

电位 Green 函数:

$I_n^p(z, z')$ 

$$= \begin{cases} A_n^+ e^{-ik_n^p z (z-d_{n+1})} [1 + \tilde{R}_{n, n+1}^{(p, \rho)} e^{-2ik_n^p z (d_{n+1}-z)}], & z > z', \\ A_n^- e^{ik_n^p z (d_n-z)} [1 + \tilde{R}_{n, n-1}^{(p, \rho)} e^{-2ik_n^p z (z-d_n)}], & z < z', \end{cases} \quad p = h, e, \quad (A5)$$

$$V_n^p(z, z') = \frac{1}{-iY_{n, n}^p k_z^p} \frac{d}{dz} I_n^p(z, z'), \quad p = h, e, \quad (A6)$$

其中  $A_n^\pm$  是第  $n$  层中 Green 函数的振幅,  $\tilde{R}_{n, n\pm 1}^{(p, \rho)}$ ,  $\tilde{R}_{n, n\pm 1}^{(p, \rho)}$  为广义反射系数, 其计算方法详见文献 [13].  $k_{nz}^e = \sqrt{k_{nh}^2 - K_{nh}^2}$ ,  $k_{nz}^h = \sqrt{k_{nh}^2 - K_\rho^2}$  为纵向波数分量,  $k_{nh}^e = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_{nh}^*}$ ,  $K_{nh} = \sqrt{\epsilon_{nh}^* / \epsilon_{nv}^*}$ ,  $Z_n^e = \frac{1}{Y_n^e} = \frac{k_{nz}^e}{\omega \epsilon_{nh}^*}$ ,  $Z_n^h = \frac{1}{Y_n^h} = \frac{\omega \mu_0}{k_{nz}^h}$ .

通过对 (A1) 和 (A2) 式进行付氏逆变换可以得到空间中磁流源并矢格林函数  $\bar{G}^{MH}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  和  $\bar{G}^{ME}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ , 但由于其表达形式较为复杂, 限于篇幅, 这里只给出  $\bar{G}_{xx}^{MH}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  分量表达式

$$\bar{G}_{xx}^{MH}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\sin^2 \theta \cdot S_0 [I_v^e] - \cos^2 \theta \cdot S_0 [I_v^h] - \cos 2\theta \{S_1 [I_v^e / k_\rho^2] - S_1 [I_v^h / k_\rho^2]\} \mathcal{Y} \rho. \quad (A7)$$

其他分量可通过类似的方法得到. (A7) 式中  $S_n [I]$  ( $n=0, 1$ ) 为由 (3) 式定义的 Sommerfeld 积分,

$$\rho = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}, \\ \theta = \arctan[(y-y')/(x-x')].$$

电流源并矢 Green 函数可由对偶原理得到.

## 附录 B Lommel 函数 $s_{\mu, \nu}(z)$ 值的计算公式

I. 当  $\mu + \nu$  和  $\mu - \nu$  都不是负奇整数时,

$$s_{\mu, \nu}(z) = \frac{z^{\mu+1}}{4} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k} \Gamma\left(\frac{\mu-\nu+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\mu+\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu-\nu+3}{2} + k\right) \Gamma\left(\frac{\mu+\nu+3}{2} + k\right)}. \quad (B1)$$

如果  $\mu + \nu$  或  $\mu - \nu$  是正奇整数,  $s_{\mu, \nu}(z)$  可以简化为有限项级数展开式

$$s_{\mu, \nu}(z) = z^{\mu-1} \left\{ 1 - \frac{(\mu-1)^2 - \nu^2}{z^2} + \frac{[(\mu-1)^2 - \nu^2] [(\mu-3)^2 - \nu^2]}{z^4} - \frac{[(\mu-1)^2 - \nu^2] [(\mu-3)^2 - \nu^2] [(\mu-5)^2 - \nu^2]}{z^6} + \dots \right\}. \quad (B2)$$

II. 如果  $\mu + \nu$  或  $\mu - \nu$  是负奇整数, Lommel 函数没有定义, 但等效 Lommel 函数  $S_{\mu, \nu}(z)$  的值可以通过极限方式得到

i.  $\nu > 0$  时,

$$S_{v-2p-1, \nu}(z) = \frac{(-1)^p \Gamma(1-\nu)}{2^{2p} p! \Gamma(p+1-\nu)} \left\{ 2^{v-1} \Gamma(\nu) \left(\ln \frac{z}{2}\right) J_\nu(z) - 2^{v-2} \pi \Gamma(\nu) Y_\nu(z) - 2^{v-2} \Gamma(\nu) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu}}{k! \Gamma(\nu+k+1)} \times [\Psi(\nu+k+1) + \Psi(k+1)] \right\} + \frac{z^{v-2p}}{4p! \Gamma(p-v+1)} \sum_{k=0}^{p-1} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k} \times (p-k-1)! \Gamma(p-k-\nu), \quad (B3)$$

式中  $p$  为零或正整数,  $Y_\nu(z)$  为第二类贝塞尔函数,  $\Psi(k)$  为  $\Psi$  函数.

ii.  $\nu = 0$  时,

$$S_{v-2p-1, \nu}(z) = \frac{(-1)^p}{2^{2p} p! \Gamma(p+1)} \left\{ \frac{\pi^2}{8} J_0(z) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k}}{k!} \times \left[ \left[ \ln\left(\frac{z}{2}\right) - \Psi(k+1) \right]^2 - \frac{1}{2} \Psi'(k+1) \right] \right\} + \frac{1}{4z^{2p} p! \Gamma(p+1)} \times \sum_{k=0}^{p-1} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k} (p-k-1)! \Gamma(p-k). \quad (B4)$$

iii.  $\nu < 0$  时利用恒等式  $S_{\mu, \nu}(z) = S_{\mu, -\nu}(z)$  来得到  $S_{\mu, \nu}(z)$  的值.

## 附录 C $\Psi_0, \Psi_1, \Psi_2$ 的展开式

I.  $k_\rho a < 1$  时,

$$\Psi_0(k_\rho) = \frac{a^2}{2\pi} (\alpha_0^m - \alpha_1^m y^2 + \alpha_2^m y^4 - \alpha_3^m y^6 + \alpha_4^m y^8 - \alpha_5^m y^{10} + \alpha_6^m y^{12} - \alpha_7^m y^{14} + \alpha_8^m y^{16} - \alpha_9^m y^{18}),$$

$$\Psi_1(k_\rho) = \frac{a^3}{2\pi} (\beta_0^m y - \beta_1^m y^3 + \beta_2^m y^5 - \beta_3^m y^7 + \beta_4^m y^9 - \beta_5^m y^{11} + \beta_6^m y^{13} - \beta_7^m y^{15} + \beta_8^m y^{17} - \beta_9^m y^{19}),$$

$$\Psi_2(k_\rho) = \frac{a^4}{2\pi} (\gamma_0^m - \gamma_1^m y^2 + \gamma_2^m y^4 - \gamma_3^m y^6 + \gamma_4^m y^8 - \gamma_5^m y^{10} + \gamma_6^m y^{12} - \gamma_7^m y^{14} + \gamma_8^m y^{16} - \gamma_9^m y^{18}),$$

这里  $m$  表示窗函数 (4) 的阶数,  $y = k_\rho a$ .  $m=1-8$  时的展开系数由下表给出.

$m$	$\alpha_0^m/10^2$	$\alpha_1^m/10^3$	$\alpha_2^m/10^5$	$\alpha_3^m/10^7$	$\alpha_4^m/10^{10}$	$\alpha_5^m/10^{12}$	$\alpha_6^m/10^{15}$	$\alpha_7^m/10^{17}$	$\alpha_8^m/10^{20}$	$\alpha_9^m/10^{22}$
1	25.00000	20.83333	65.10417	108.5069	1130.281	807.3433	4204.913	1668.616	5214.426	1316.774
2	16.66667	10.41667	26.04166	36.16898	322.9373	201.8358	934.4251	333.7233	948.0775	219.4624
3	12.50000	6.250000	11.57407	15.50099	121.1015	67.27861	280.3275	91.01544	237.0194	50.64516
4	10.00000	4.166666	7.440476	7.750496	53.82288	26.91144	101.9372	30.33848	72.92904	14.47005
5	8.333333	2.976191	4.650297	4.305831	26.91144	12.23247	42.47387	11.66865	26.04608	4.823349
6	7.142857	2.232143	3.100198	2.583498	14.67897	6.116237	19.60332	5.000848	10.418434	1.808756
7	6.250000	1.736111	2.170138	1.644044	8.562732	3.293358	9.801662	2.333729	4.558065	0.744782
8	5.555556	1.388889	1.578283	1.096030	5.269374	1.881919	5.227553	1.166865	2.144972	0.331014

$m$	$\beta_0^m/10^3$	$\beta_1^m/10^5$	$\beta_2^m/10^7$	$\beta_3^m/10^9$	$\beta_4^m/10^{11}$	$\beta_5^m/10^{13}$	$\beta_6^m/10^{16}$	$\beta_7^m/10^{19}$	$\beta_8^m/10^{21}$	$\beta_9^m/10^{24}$
1	416.6667	260.4166	651.0417	904.2245	807.3433	504.5896	2336.063	8343.082	2370.194	5486.559
2	20.83333	104.1666	217.0139	258.3499	201.8358	112.1310	467.2126	1516.924	2531.439	8440.861
3	12.50000	52.08333	93.00595	96.88120	67.27861	33.63931	127.4216	379.2310	91.16130	180.8756
4	8.333333	29.76190	46.50298	43.05831	26.91144	12.23247	42.47387	116.6865	26.04608	48.23349
5	5.952381	18.60120	25.83499	21.52916	12.23247	5.096864	16.33610	41.67374	8.682028	15.07297
6	4.464286	12.40079	15.50100	11.74318	6.116237	2.352399	7.001187	16.66949	3.255761	5.319870
7	3.472222	8.680556	9.864267	6.850186	3.293359	1.176200	3.267221	7.292904	1.340607	2.068838
8	2.777778	6.313131	6.576178	4.215499	1.881919	0.627306	1.633610	3.431955	0.595825	0.871090

$m$	$\gamma_0^m/10^3$	$\gamma_1^m/10^4$	$\gamma_2^m/10^6$	$\gamma_3^m/10^8$	$\gamma_4^m/10^{10}$	$\gamma_5^m/10^{12}$	$\gamma_6^m/10^{15}$	$\gamma_7^m/10^{17}$	$\gamma_8^m/10^{20}$	$\gamma_9^m/10^{22}$
1	83.33333	104.1666	390.6250	723.3796	807.3433	605.5075	3270.488	1334.893	4266.349	1097.312
2	41.66666	41.66666	130.2083	206.6799	201.8358	134.5572	654.0976	242.7078	711.0581	168.8172
3	25.00000	20.83333	55.80357	77.50496	67.27861	40.36717	178.3903	60.67696	164.0903	36.17512
4	16.66660	11.90476	27.90179	34.44665	26.91144	14.67897	59.46342	18.66983	46.88295	9.646698
5	11.90476	7.440476	15.50100	17.22332	12.23247	6.116237	22.87055	6.667798	15.62765	3.014593
6	8.928571	4.960317	9.300595	9.394541	6.116237	2.822879	9.801662	2.667119	5.860369	1.063974
7	6.944444	3.472222	5.918561	5.480149	3.293359	1.411444	4.574109	1.166865	2.413093	0.413768
8	5.555556	2.525253	3.945707	3.372399	1.881919	0.752768	2.287055	0.549113	1.072486	0.174218

II.  $k_\rho a \geq 1$  时,

$$\Psi_0(k_\rho) |_{m=1} = \frac{a^2}{\pi} \left[ -\frac{J_0}{y^2} + \frac{2J_1}{y^3} \right],$$

$$\Psi_0(k_\rho) |_{m=2} = -\frac{4a^2}{\pi} \left[ \frac{J_1}{y^3} + \frac{4J_0}{y^4} - \frac{8J_1}{y^5} \right],$$

$$\Psi_0(k_\rho) |_{m=3} = \frac{24a^2}{\pi} \left[ \frac{J_0}{y^4} - \frac{8J_1}{y^5} - \frac{24J_0}{y^6} + \frac{48J_1}{y^7} \right],$$

$$\Psi_0(k_\rho) |_{m=4} = \frac{192a^2}{\pi} \left[ \frac{J_1}{y^5} + \frac{12J_0}{y^6} - \frac{72J_1}{y^7} - \frac{192J_0}{y^8} + \frac{348J_1}{y^9} \right],$$

$$\Psi_0(k_\rho) |_{m=5} = -\frac{1920a^2}{\pi} \left[ \frac{J_0}{y^6} - \frac{18J_1}{y^7} - \frac{144J_0}{y^8} + \frac{768J_1}{y^9} + \frac{1920J_0}{y^{10}} - \frac{3840J_1}{y^{11}} \right],$$

$$\Psi_0(k_\rho) |_{m=6} = -\frac{23040a^2}{\pi} \left[ \frac{J_1}{y^7} + \frac{24J_0}{y^8} - \frac{288J_1}{y^9} - \frac{1920J_0}{y^{10}} + \frac{9600J_1}{y^{11}} + \frac{23040J_0}{y^{12}} - \frac{46080J_1}{y^{13}} \right],$$

$$\Psi_0(k_\rho) |_{m=7} = \frac{322560a^2}{\pi} \left[ \frac{J_0}{y^8} - \frac{32J_1}{y^9} - \frac{480J_0}{y^{10}} + \frac{4800J_1}{y^{11}} + \frac{28800J_0}{y^{12}} - \frac{138240J_1}{y^{13}} - \frac{322560J_0}{y^{14}} + \frac{645120J_1}{y^{15}} \right],$$

$$\Psi_0(k_\rho) |_{m=8} = \frac{5160960a^2}{\pi} \left[ \frac{J_1}{y^9} + \frac{40J_0}{y^{10}} - \frac{800J_1}{y^{11}} - \frac{9600J_0}{y^{12}} + \frac{86400J_1}{y^{13}} + \frac{483840J_0}{y^{14}} - \frac{2257920J_1}{y^{15}} - \frac{5160960J_0}{y^{16}} + \frac{10321920J_1}{y^{17}} \right],$$

$$\Psi_1(k_\rho) |_{m=1} = \frac{a^3}{\pi} \left[ -\frac{J_1}{y^2} - \frac{4J_0}{y^3} + \frac{8J_1}{y^4} \right],$$

$$\Psi_1(k_\rho) |_{m=2} = \frac{4a^3}{\pi} \left[ \frac{J_0}{y^3} - \frac{8J_1}{y^4} - \frac{24J_0}{y^5} + \frac{48J_1}{y^6} \right],$$

$$\Psi_1(k_\rho)|_{m=3} = \frac{24a^3}{\pi} \left[ \frac{J_1}{y^4} + \frac{12J_0}{y^5} - \frac{72J_1}{y^6} - \frac{192J_0}{y^7} + \frac{384J_1}{y^8} \right],$$

$$\Psi_1(k_\rho)|_{m=4} = -\frac{192a^3}{\pi} \left[ \frac{J_0}{y^5} - \frac{18J_1}{y^6} - \frac{144J_0}{y^7} + \frac{768J_1}{y^8} + \frac{1920J_0}{y^9} - \frac{3840J_1}{y^{10}} \right],$$

$$\Psi_1(k_\rho)|_{m=5} = -\frac{1920a^3}{\pi} \left[ \frac{J_1}{y^6} + \frac{24J_0}{y^7} - \frac{288J_1}{y^8} - \frac{1920J_1}{y^9} + \frac{9600J_1}{y^{10}} + \frac{23040J_0}{y^{11}} - \frac{46080J_1}{y^{12}} \right],$$

$$\Psi_1(k_\rho)|_{m=6} = \frac{23040a^3}{\pi} \left[ \frac{J_0}{y^7} - \frac{32J_1}{y^8} - \frac{480J_0}{y^9} + \frac{4800J_1}{y^{10}} + \frac{28800J_0}{y^{11}} - \frac{138240J_1}{y^{12}} - \frac{322560J_0}{y^{13}} + \frac{645120J_1}{y^{14}} \right],$$

$$\Psi_1(k_\rho)|_{m=7} = \frac{322560a^3}{\pi} \left[ \frac{J_1}{y^8} + \frac{40J_0}{y^9} - \frac{800J_1}{y^{10}} - \frac{9600J_0}{y^{11}} + \frac{86400J_1}{y^{12}} + \frac{483840J_0}{y^{13}} - \frac{2257920J_1}{y^{14}} - \frac{5160960J_0}{y^{15}} + \frac{10321920J_1}{y^{16}} \right],$$

$$\Psi_1(k_\rho)|_{m=8} = -\frac{5160960a^3}{\pi} \left[ \frac{J_0}{y^9} - \frac{50J_1}{y^{10}} - \frac{1200J_0}{y^{11}} + \frac{19200J_1}{y^{12}} + \frac{201600J_0}{y^{13}} - \frac{1693440J_1}{y^{14}} - \frac{9031680J_0}{y^{15}} + \frac{41287680J_1}{y^{16}} + \frac{92897280J_0}{y^{17}} + \frac{185794560J_1}{y^{18}} \right],$$

$$\Psi_2(k_\rho)|_{m=1} = \frac{a^4}{\pi} \left[ -\frac{J_0}{y^2} + \frac{6J_1}{y^3} + \frac{16J_0}{y^4} - \frac{32J_1}{y^5} \right],$$

$$\Psi_2(k_\rho)|_{m=2} = -\frac{4a^4}{\pi} \left[ \frac{J_1}{y^3} + \frac{10J_0}{y^4} - \frac{56J_1}{y^5} - \frac{144J_0}{y^6} + \frac{288J_1}{y^7} \right],$$

$$\Psi_2(k_\rho)|_{m=3} = \frac{24a^4}{\pi} \left[ \frac{J_0}{y^4} - \frac{16J_1}{y^5} - \frac{120J_0}{y^6} + \frac{624J_1}{y^7} + \frac{1536J_0}{y^8} - \frac{3072J_1}{y^9} \right],$$

$$\Psi_2(k_\rho)|_{m=4} = \frac{192a^4}{\pi} \left[ \frac{J_1}{y^5} + \frac{22J_0}{y^6} - \frac{252J_1}{y^7} - \frac{1632J_0}{y^8} + \frac{8064J_1}{y^9} + \frac{19200J_0}{y^{10}} - \frac{38400J_1}{y^{11}} \right],$$

$$\Psi_2(k_\rho)|_{m=5} = -\frac{1920a^4}{\pi} \left[ \frac{J_0}{y^6} - \frac{30J_1}{y^7} - \frac{432J_0}{y^8} + \frac{4224J_1}{y^9} + \frac{24960J_0}{y^{10}} - \frac{119040J_1}{y^{11}} - \frac{276480J_0}{y^{12}} + \frac{552960J_1}{y^{13}} \right],$$

$$\Psi_2(k_\rho)|_{m=6} = -\frac{23040a^4}{\pi} \left[ \frac{J_1}{y^7} + \frac{38J_0}{y^8} - \frac{736J_1}{y^9} - \frac{8640J_0}{y^{10}} + \frac{76800J_1}{y^{11}} + \frac{426240J_0}{y^{12}} - \frac{1981440J_1}{y^{13}} - \frac{4515840J_0}{y^{14}} + \frac{9031680J_1}{y^{15}} \right],$$

$$\Psi_2(k_\rho)|_{m=7} = \frac{322560a^4}{\pi} \left[ \frac{J_0}{y^8} - \frac{48J_1}{y^9} - \frac{1120J_0}{y^{10}} + \frac{17600J_1}{y^{11}} + \frac{182400J_0}{y^{12}} - \frac{1520640J_1}{y^{13}} - \frac{8064000J_0}{y^{14}} + \frac{36771840J_1}{y^{15}} + \frac{82575360J_0}{y^{16}} - \frac{165150720J_1}{y^{17}} \right],$$

$$\Psi_2(k_\rho)|_{m=8} = \frac{5160960a^4}{\pi} \left[ \frac{J_1}{y^9} + \frac{58J_0}{y^{10}} - \frac{1700J_1}{y^{11}} - \frac{31200J_0}{y^{12}} + \frac{432000J_1}{y^{13}} + \frac{4112640J_0}{y^{14}} - \frac{32739840J_1}{y^{15}} - \frac{167731200J_0}{y^{16}} + \frac{753500160J_1}{y^{17}} + \frac{1672151040J_0}{y^{18}} - \frac{3344302080J_1}{y^{19}} \right].$$

以上各式中  $y = k_\rho a$ ,  $J_n = J_n(y)$ , 其中  $n = 0$  或  $1$ ,  $J_n(y)$  为  $n$  阶 Bessel 函数.

[1] Yang L X, Ge D B, Wei B 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 4509 (in Chinese) [杨利霞、葛德彪、魏兵 2007 物理学报 **56** 4509]

[2] Yang L X, Ge D B, Zhao Y H, Wang G, Yan S 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 2936 (in Chinese) [杨利霞、葛德彪、赵跃华、王刚、阎述 2008 物理学报 **57** 2936]

[3] Wang C Q 2006 *Computational Advanced Electromagnetics* (Beijing: Peking University Press) (in Chinese) [王长清 2006 现代计算电磁学基础 (北京: 北京大学出版社)]

[4] Xiong Z H, Luo Y Z, Wang S T, Wu G Y 1986 *Geophysics* **51** 2235

[5] Wannamaker P E, Hohmann G W, Sanfilippo W A 1984 *Geophysics* **49** 60

[6] Michalski K A, Mosig J R 1997 *IEEE Trans. Antennas and Propag.* **45** 508

[7] Michalski K A, Zheng D L 1990 *IEEE Trans. Antennas and Propag.* **38** 335

[8] Anderson W L 1979 *Geophysics* **44** 1287

- [ 9 ] Anderson W L 1982 *ACM Trans . on Math . Software* **8** 344  
 [ 10 ] Dural G , Aksun M I 1995 *IEEE Trans . Microwave Theory Tech .* **43** 1545  
 [ 11 ] Aksun M I 1996 *IEEE Trans . Microwave Theory Tech .* **44** 651  
 [ 12 ] Cui T J , Chew W C 1998 *J . Electromagnetic Wave Appl .* **12** 607  
 [ 13 ] Chew W C 1990 *Waves and Fields in Inhomogeneous Media* ( New York :Van Nostrand ) p79  
 [ 14 ] Cai W , Yu T J 2000 *J . Comput . Phys .* **165** 1  
 [ 15 ] Yu T J , Cai W 2001 *Radio Science* **36** 559  
 [ 16 ] Luke Y L 1962 *Integrals of Bessel Functions* ( New York :McGRAW-HILL Book Company ) p73  
 [ 17 ] Chave A D 1983 *Geophysics* **48** 1671  
 [ 18 ] Patterson T N 1968 *Mathematics of Computation* **22** 847  
 [ 19 ] Baker G A 1981 *Pade Approximants* ( Massachusetts : Addison-Wesley Publishing Company ) p103  
 [ 20 ] Hanggi P 1978 *Z . Naturforsch* **33a** 402  
 [ 21 ] Wait J R 1982 *Geo-electromagnetism* ( New York :Academic Press )  
 [ 22 ] Wang H N , Tao H G , Yao J J , Chen G B 2008 *IEEE Trans . on Geosci . and Remote Sensing* **46** 1525

## An efficient algorithm of the electromagnetic dyadic green's function in a horizontal-layered anisotropic medium \*

Chen Gui-Bo<sup>1)†</sup> Wang Hong-Nian<sup>1)</sup> Yao Jing-Jin<sup>2)</sup> Han Zi-Ye<sup>2)</sup> Yang Shou-Wen<sup>1)</sup>

1) ( School of Physics , Jilin University , Changchun 130021 , China )

2) ( Institute of Geophysical and Geochemical Exploration of CAGS , Langfang 065000 , China )

( Received 11 November 2007 ; revised manuscript received 17 August 2008 )

### Abstract

In this paper , we advance an efficient algorithm of electromagnetic spatial dyadic Green's function in a horizontal-layered anisotropic medium through high order window function and so on . First , we use the high order window function to transform the Sommerfeld integrals of dyadic Green's function into integrals along a generalized steep descent path . And we give a new and higher order of power series of expansion expression of Hankel transforms of the window function and an accurate formula of Lommel function so that the dyadic Green's function can be precisely computed either near or far from the transmitter . Then , we divide the integral path into a series of subintervals based on the zeros of Bessel function and compute integral per subinterval using an improved adaptive Gauss quadrature . Furthermore , an algorithm of the finite continued fraction expansion is used to sum up the integrals on each subinterval to greatly accelerate the convergence velocity of the numerical integration along the descent path . Finally , our numerical results validated the efficiency of the algorithm .

**Keywords** : high order window function , continued fraction expansion , dyadic Green's function , layered anisotropic medium

**PACC** : 4110H , 0350D

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China ( Grand No. 40374044 ) and the Foundation of Key Laboratory of CAGS ( Grant No. KL05-26 ) .

† E-mail : guibochen5976@yahoo . com . cn