强非局域非线性介质中的旋转涡旋光孤子*

戴继慧 郭 旗*

(华南师范大学光子信息技术广东省高校重点实验室,广州 510631) (2008年7月29日收到2008年9月22日收到修改稿)

利用变分方法,得到了 Snyder-Mitchell 模型的旋转空间调制涡旋光孤子的近似解析解.在传输过程中,这种光孤子具有可观察的旋转特性.在一定的条件下,旋转的空间调制涡旋光孤子将退化为圆对称的涡旋光孤子.

关键词:非局域非线性介质,强非局域性,空间调制涡旋光孤子,变分法 PACC:4265S

1.引 言

涡旋总是与波的相位奇异性相联系.1974 年, Nye 和 Berry 在分析波的波前结构时,提出了波的螺 旋和边缘位移(screw and edge dislocations)概念^[1].在 场的复振幅为零,而相位分布具有奇异性时形成涡 旋.涡旋概念在应用于光学领域后,引起了科技工作 者的强烈兴趣,掀起了光涡旋和奇异光学的研究热 潮.对于 1+1 维光涡旋,光场复振幅的实部与虚部 的零点处是一个点,而 1+2 维光涡旋产生的是一条 沿光传输方向的零强度线.在光涡旋的振幅零点处, 光场的相位不确定,波前具有螺旋形的结构特征,相 位梯度绕奇异点或线的闭合线积分是 2π 的整数倍, 这个 整 数 被 称 作 涡 旋 的 拓 扑 指 数(topological charge).

涡旋光束在非线性介质中传输时,在衍射效应 的作用下光束将展宽,由于非线性自聚焦作用光束 将压缩.当自聚焦刚好补偿衍射效应时,涡旋光束将 稳定传输形成涡旋光孤子,这是空间光孤子的一种 形态.对于非线性非局域介质^[2],它对光场的非线性 响应不仅与该点的光场有关,而且与空间中其他点 的光场有关.Snyder和 Mitchell 在研究光束在非局域 非线性介质中的传输特性时,将非线性薛定谔方程 近似为一个线性方程^[3],大大简化了非局域空间光 孤子的研究.Guo 等从强非局域模型^[4]或 Snyder-Mitchell 模型出发,研究了空间光孤子的传输特性和 相互作用^[5-12],求出了强非局域非线性介质中的圆 对称涡旋光孤子的严格解析解^[13],并运用变分 法^[14-18]得出强非局域和亚强非局域非线性介质中 的高斯解,以及强非局域非线性介质中的厄米高斯 和拉盖尔高斯解^[19].

在研究非线性 Kerr 介质和可饱和介质中涡旋 光束的传输特性时,考虑角向非圆对称情形,即涡旋 在角向的振幅或强度有调制,Desyatnikov 等将这种 空间调制涡旋光孤子称为 Azimuthon^[20].基于高斯型 响应函数的情形,Azimuthon 在非局域非线性介质中 传输特性^[21]以及旋转孤子解都得到了研究^[22-24],并 对 Azimuthon 的稳定性进行了分析,求出了 Azimuthon 的旋转频率.但对于强非局域非线性介质 中,Azimuthon 这种非圆对称涡旋光孤子的旋转解析 表达式迄今为止还没有给出.

基于涡旋的圆环形结构以及旋转特性,本文设 定一个随涡旋旋转的柱坐标系,在此相对涡旋静止 的坐标系中求解 Snyder-Mitchell 模型.运用变分法, 假设试探解后代入变分方程,得到参量的演化方程, 最后求得 Azimuthon 在强非局域非线性介质中的自 相似旋转解析解.当调制深度趋于 0 时,Azimuthon 将退化为圆对称涡旋光孤子.

2. Snyder-Mitchell 模型的变分问题

傍轴光束在强非局域非线性介质中传输时满足 方程(Snyder-Mitchell 模型)^{34]}

^{*} 国家自然科学基金(批准号:10474023 和 10674050) 高等学校博士学科点专项科研基金(批准号:20060574006) 和广东省高等学校科技 创新团队项目(项目编号:06CXTD005)资助的课题.

[†] 通讯联系人. E-mail :guoq@scnu.edu.cn

 $i\frac{\partial\psi}{\partial z} + \frac{1}{2}\nabla_{\perp}^{2}\psi - \frac{1}{2}\gamma P_{0}(x^{2} + y^{2})\psi = 0, (1)$ 式中 $\nabla_{\perp}^{2} = \frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}} + \frac{\partial^{2}}{\partial y^{2}}$ 是横向拉普拉斯算符, ψ 是傍轴 光束, P_{0} 为光束的入射功率, γ 为材料常数, 且

$$\gamma = - \left. \frac{\partial^2 R(\mathbf{r}')}{\partial x'_i^2} \right|_{\mathbf{r}'=0} , \qquad (2)$$

这里 r =(x ,y).

由于涡旋具有圆环形结构特征,在圆柱坐标系 求解 Snyder-Mitchell 模型可以简化问题,我们将方程 (1)写成圆柱坐标系(ρ,φ,z)中的形式

$$i\frac{\partial\psi}{\partial z} + \frac{1}{2}\frac{\partial^{2}\psi}{\partial\rho^{2}} + \frac{1}{2\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\rho} + \frac{1}{2\rho^{2}}\frac{\partial^{2}\psi}{\partial\varphi^{2}} - \frac{1}{2}\gamma P_{0}\rho^{2}\psi = 0.$$
(3)

假设方程(3)自相似旋转解^[25,26]的形式如下:

 $\psi(\rho, \varphi, z) = V(\rho, \varphi - \Omega z) \exp(i\Lambda z),$ (4) 式中 Ω 是涡旋光绕 z 轴的旋转角速度.

涡旋光束的传输过程类似于螺旋型或环行楼梯 状,直接在实验室坐标系中求解显得比较复杂.为了 简化分析,我们设定一个相对涡旋光束静止的旋转 坐标系(ρ , θ ,z),它以角速度 Ω 围绕实验室坐标系 (ρ , φ ,z)旋转,两坐标系的z轴保持平行,角向坐标 关系式为 $\theta = \varphi - \Omega z$.此时,

 $\psi(\rho, \theta, z) = V(\rho, \theta) \exp(i\Lambda z),$ (5) 式中 Λ 是旋转坐标系中光束的传播常数.

将(5)式代入方程(3),并考虑旋转坐标与实验 室坐标变换关系,可得到下列方程:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} + \frac{1}{2\rho} \frac{\partial V}{\partial \rho} + \frac{1}{2\rho^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} - i\Omega \frac{\partial V}{\partial \theta} - \Lambda V - \frac{1}{2} \gamma P_0 \rho^2 V = 0.$$
 (6)

对于求解(6)式这种形式的偏微分方程,分离变 量无疑是常用的办法之一,但实际运算中出现的耦 合项将导致分离变量失效.我们在这里运用变分法 求方程(6)的近似解.方程(6)是下列变分问题的欧 拉-拉格郎日方程^{27]}:

$$\delta J = \delta \int_{0}^{\infty} \int_{0}^{2\pi} \Im \left(V , V^{*} \frac{\partial V}{\partial \rho} , \frac{\partial V^{*}}{\partial \rho} , \frac{\partial V}{\partial \theta} \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) d\rho d\theta$$

= 0, (7)

式中拉格朗日函数有下列具体形式:

$$\Im = \frac{i}{2} \Omega \rho \left(V \frac{\partial V^*}{\partial \theta} - V^* \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{2\rho} \left| \frac{\partial V}{\partial \theta} \right|^2 - \frac{1}{2} \rho \left| \frac{\partial V}{\partial \rho} \right|^2 - \frac{1}{2} \gamma P_0 \rho^3 + V |^2 - \Lambda \rho + V |^2. (8)$$

假设变分方程(7)的试探解为

 $V(\rho, \theta) = CQ(\rho) \cos(m\theta) + ip \sin(m\theta)],(9)$ 式中 *C* 为归一化常数, $Q(\rho)$ 是径向振幅, *m* 是涡旋的拓扑指数. *p* 称为调制参量 $0 \le p \le 1$. 调制深度定义为^[28]

$$\sigma = \frac{|\max \operatorname{Re} V - \max \operatorname{Im} V|}{\max |V|}.$$
 (10)

将试探解(9)代入到方程(7)中,得到相应的平 均变分问题为

$$\delta \int_0^\infty \Im d\rho = 0 , \qquad (11)$$

式中平均拉格朗日函数为

$$\mathfrak{F} = \int_0^{2\pi} L \mathrm{d}\theta \,. \tag{12}$$

3. 试探函数参量演化方程

将试探解(9)代入(12)式后,得到平均拉格朗日 函数表达式为

$$\widetilde{\mathfrak{S}} = -\frac{(1+p^2)m^2\pi}{2\rho}G^2 - (1+p^2)\pi\Lambda\rho G^2 + 2mp\pi\Omega\rho G^2 - \frac{1}{2}(1+p^2)\pi\gamma P_0\rho^3 G^2 - \frac{1}{2}(1+p^2)\pi\gamma P_0\rho^3 G^2 - \frac{1}{2}(1+p^2)\pi\rho \left(\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}\rho}\right)^2.$$
(13)

根据平均变分方程(11)的要求:

$$\frac{\delta \Im}{\delta \rho} = \frac{\mathrm{d} \Im}{\mathrm{d} G} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d} \rho} \left[\frac{\mathrm{d} \Im}{\mathrm{d} \left(\frac{\mathrm{d} G}{\mathrm{d} \rho} \right)} \right] = 0. \quad (14)$$

从而导出参量 $Q(\rho)$ 的演化方程为

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 G}{d\rho^2} + \frac{1}{2\rho} \frac{dG}{d\rho} - \left(\Lambda + \frac{1}{2}\gamma P_0 \rho^2 + \frac{m^2}{2\rho^2} - \frac{2mp\Omega}{1+p^2}\right)G = 0.(15)$$

经变量代换等一系列运算^[13],当 $P_0 = P_e = 1/\gamma$ 时,入射光束的功率等于光束保持稳定传输时的临界功率^[4],涡旋光的自聚焦效应与衍射效应取得平衡,形成涡旋光孤子.我们得到方程(15)的解为

$$G(\rho) = W_{\kappa \frac{m}{22}}(\rho^2) / \rho , \qquad (16)$$

式中

$$\kappa = 1 + m + \frac{\Lambda}{2} - \frac{mp\Omega}{1 + p^2}$$
, (17)

 $W_{\kappa,\frac{n}{2}}(\rho^2)$ 是惠特克方程的解,称为惠特克函数^[29]. 惠特克函数定义式为

$$W_{\kappa,n}(\zeta) = -\exp(-\zeta/2)\zeta^{\kappa} \frac{\Gamma\left(\kappa + \frac{1}{2} - n\right)}{2\pi i}$$

$$\times \int_{\infty}^{(0+)} \exp(-tQ - t)^{\kappa - \frac{1}{2} + n} \left(1 + \frac{t}{\zeta}\right)^{\kappa - \frac{1}{2} + n} dt,$$

$$\left(\kappa + \frac{1}{2} - n \neq 0, -1, -2, ...;\right)$$

$$|\arg(\zeta)| < \pi, |\arg(-t)| \leq \pi, \quad (18)$$
式中 $\Gamma\left(\kappa + \frac{1}{2} - n\right)$ 为伽马函数, $n = \frac{m}{2}.$

设参量 $l = \frac{1}{2}(1 + m + \Lambda) - \frac{mp\Omega}{1 + p^2}$,并取为非负的整数,即 l = 0,1,2,...时,我们可以得到用惠特克函数表示的涡旋光孤子的自相似旋转解为

$$\psi(\rho, \varphi, z) = C_{\kappa m} \rho^{-1} W_{\kappa, \frac{m}{2}}(\rho^{2})$$

$$\times \exp(i\Lambda z \mathbf{I} \cos m(\varphi - \Omega z))$$

$$+ i p \sin m(\varphi - \Omega z)], \quad (19)$$

式中 C., 是归一化常数.

空间调制涡旋光孤子的旋转角速度或旋转频率 由下面的表达式给出:

$$\Omega = \frac{1+p^2}{2mp} (1+m+\Lambda-2l).$$
 (20)

上式表明,空间调制涡旋光孤子在强非局域非线性 介质中传输时,其旋转角速度 Ω 由传播常数 Λ 和调 制参量p共同决定.在调制参量p取确定值时,孤 子的旋转角速度 Ω 与传播常数 Λ 成线性关系,孤子 的旋转频率受到传播常数的强力影响.

图 1 给出了单拓扑指数(*m* = 1)空间调制涡旋 光孤子(*l*=0)传输过程示意图.当旋转角速度 Ω 取 正值时,涡旋孤子逆时针方向旋转,Ω 取负值,涡旋 顺时针方向旋转.对于单拓扑指数(*m*=1)空间调制 涡旋光孤子,在角向有 2 个强度峰.



图 1 空间调制涡旋光孤子传输过程示意图 $(a)\Omega = 1(b)\Omega = -1$

图 2 给出了单拓扑指数(*m* = 1)涡旋光孤子(*l* = 1)的光强分布示意图.这种空间调制涡旋光孤子

在角向有 2 个强度峰,在径向有 2 个强度峰.图 3 给 出了双拓扑指数(m = 2)涡旋光孤子(l = 0)的光强 分布示意图.这种空间调制涡旋光孤子在角向有4 个强度峰,在径向有1个强度峰.



图 2 单拓扑指数涡旋孤子光强分布图(m=1,l=1)



图 3 双拓扑指数涡旋孤子光强分布图(m=2, l=0)

一般地,由(19)式给出的空间调制旋转涡旋光 孤子,在角向有M = 2m个强度峰,在径向有N = l+1个(m取0或正整数)或N = l + m + 1个(m取 负整数)强度峰.涡旋光孤子的旋转与角速度 Ω 取 值有关,角速度 Ω 正值或负值分别对应于涡旋孤子 逆时针方向或顺时针方向旋转.

4. 旋转解的有关讨论

我们考察空间调制旋转涡旋光孤子的一种特例:当调制参量 $p \rightarrow 1$ 时,即调制深度 $\sigma = (1 - p)$ $\sqrt{1 + p^2} \rightarrow 0$ 时,空间调制涡旋光孤子退化为圆对称 型涡旋光孤子^[13].此时,涡旋光孤子在角向没有强 度变化,对应于拓扑指数取正整数或负整数,在径向 的强度峰仍为 N = l + 1个或 N = l + m + 1个.涡旋 光孤子在传输过程中保持着旋转性质,在实验室坐 标系和旋转坐标系中的传播常数的关系为 $k = A - m\Omega$.图 4 给出的是圆对称涡旋光孤子的单环光强 (径向强度峰为1个)分布图.



图 4 单环圆对称型涡旋孤子光强分布图

另一种特例:当拓扑指数取非负整数,即 m = 0,1,2,...时,用惠特克函数表示的涡旋光孤子的自 相似旋转解简化为用拉盖尔多项式表示为^[13]

$$\begin{split} & \not(\rho, \varphi, z) = C_{lm}\rho^m L_l^m (\rho^2) \exp(-\rho^2/2) \\ & \times \exp(i\Lambda z \mathbf{I} \cos m(\varphi - \Omega z)) \\ & + ip \sin m(\varphi - \Omega z) \mathbf{]}, \end{split} \tag{21}$$
式中 C_{lm} 是归一化常数 , $L_l^m (\rho^2)$ 是拉盖尔多项式 ,其

$$L_{l}^{m}(\zeta) = \frac{\prod(m+1+l)}{l!\prod(m+1)}F(-l,m+1,\zeta).$$

(22)

这是一个 n 次多项式 ,其中 m 是不等于负整数 的任意实数或复数 , $\Gamma(m+1+l)$ 和 $\Gamma(m+1)$ 为伽 马函数 , $F(-l,m+1,\zeta)$ 为库末函数.

考虑光束功率守恒,这种情况下可求出归一化 常数 *C*_{lm}:

$$P_{0} = \int_{0}^{\infty} \int_{0}^{2\pi} | \psi(\rho, \theta, z) |^{2} \rho d\rho d\theta$$
$$= C_{lm}^{2} \int_{0}^{\infty} \int_{0}^{2\pi} \rho^{2m+1} L_{l}^{m} (\rho^{2}) \exp(-\rho^{2})$$
$$\times [\cos^{2} m\varphi + \rho^{2} \sin^{2} m\varphi] d\rho d\varphi , \quad (23)$$

式中

定义为

$$\int_{0}^{\infty} \rho^{2m+1} L_{l}^{m} (\rho^{2})^{2} \exp(-\rho^{2}) d\rho = \frac{(m+l)!}{2l!}.$$

$$\Re(12\pi) R (\rho^{2})^{2} \exp(-\rho^{2}) d\rho = \frac{(m+l)!}{2l!}.$$

 $C_{lm} = \sqrt{\frac{2l!}{(m+l)!}} P_0 = \sqrt{\frac{2l!}{\gamma(m+l)!}} , (24)$

这里,我们用到孤子形成的临界功率条件 $P_0 = 1/\gamma$.

此时,涡旋光孤子横向光强分布由下列的关系 式决定:

$$| \psi(\rho, \varphi, z)|^{2} = \frac{2l!}{\gamma(m+l)!} \rho^{2m} L_{l}^{m} (\rho^{2})^{2} \exp(-\rho^{2}) \times [\cos^{2} m(\varphi - \Omega z) + \rho^{2} \sin^{2} m(\varphi - \Omega z)]. \quad (25)$$

进一步,当涡旋光孤子旋转角速度为 $\Omega = 0$,即 传播常数 $\Lambda = 2l - m - 1$ 时,孤子不再旋转,空间调 制涡旋光孤子旋转解将退化为涡旋光孤子的拉盖尔 -高斯解^[10,19].

5.结 论

为求解空间调制涡旋光孤子的自相似旋转解, 我们设定一个旋转柱坐标系.在此坐标系中,将求解 Snyder-Mitchell 模型转化为变分问题.通过假设试探 解,导出参量演化方程,得到空间调制涡旋光孤子旋 转解的解析表达式.结果表明,当旋转角速度 Ω 取 正值时,涡旋孤子逆时针方向旋转, Ω 取负值时,涡 旋顺时针方向旋转,而且旋转角速度 Ω 与传播常数 Λ 成线性关系.空间调制涡旋光孤子在角向有 M =2m 个强度峰,当拓扑指数 m 取0或正整数时,在径 向有 N = l + 1 个强度峰,当拓扑指数 m 取负整数 时,在径向有 N = l + m + 1 个强度峰.当调制深度 趋于0时,空间调制涡旋光孤子演变为角向无强度 变化的圆对称型涡旋光孤子;如果拓扑指数取非负 整数且旋转角速度为0,则旋转解将退化为涡旋光 孤子的拉盖尔-高斯解.

- [1] Nye J F , Berry M V 1974 Proc. R. Soc. London Ser. A 336 165
- [2] Krolikowski W, Bang O, Nikolov N I, Neshev D, Wyller J, Rasmussen J J, Edmundson D 2004 J. Opt. B-Quantum S. O. 6 S288
- [3] Snyder A W, Mitchell D J 1997 Science 276 1538
- $\left[\begin{array}{c} 4 \end{array} \right] \quad {\rm Guo} \,\, {\rm Q}$, Luo B , Yi F , Chi S , Xie Y 2004 ${\it Phys} \, . \,\, {\it Rev} \, . \,\, {\rm E} \, 69 \, 016602$
- [5] Xie Y Q, Guo Q 2004 Acta Phys. Sin. 53 3020 (in Chinese) [谢逸群、郭 旗 2004 物理学报 53 3020]
- [6] Xie Y Q , Guo Q 2004 Opt . Quant . Electron . 36 1335
- [7] Guo Q 2004 Optical Transmission, Switching, and Subsystems (Washington: SPIE 5281) p581
- [8] Xu C B, Guo Q 2005 Acta Phys. Sin. 54 5194 (in Chinese)[许 超彬、郭 旗 2005 物理学报 54 5194]
- [9] Zhang X P, Guo Q 2005 Acta Phys. Sin. 54 3178 (in Chinese) [张霞萍、郭 旗 2005 物理学报 54 3178]
- [10] Zhang X P, Guo Q, Hu W 2005 Acta Phys. Sin. 54 5189 (in Chinese) [张霞萍、郭 旗、胡 巍 2005 物理学报 54 5189]
- [11] Qin X J, Guo Q, Hu W, Lan S 2006 Acta Phys. Sin. 55 1237 (in Chinese)[秦晓娟、郭 旗、胡 巍、兰 胜 2006 物理学报 55 1237]
- [12] Shao Y Q, Guo Q 2006 Acta Phys. Sin. 55 2751 (in Chinese)[邵 毅全、郭 旗 2006 物理学报 55 2751]
- [13] Dai J H, Guo Q 2007 Acta Phys. Sin. 56 4642 (in Chinese) [戴 继慧、郭 旗 2007 物理学报 56 4642]
- [14] Wang X H, Guo Q 2005 Acta Phys. Sin. 54 3183 (in Chinese) [王形华、郭 旗 2005 物理学报 54 3183]
- [15] Huang Y , Guo Q 2005 High Power Laser and Particle Beams 17 655

(in Chinese)[黄 毅、郭 旗 2005 强激光与粒子束 17 655]

- [16] Guo Q , Luo B , Chi S 2006 Opt . Commun . 259 336
- [17] Huang Y , Guo Q , Cao J N 2006 Opt . Commun . 261 175
- [18] Wang X H, Guo Q, Xie Y Q 2005 Acta Opt. Sin. 25 848 (in Chinese)[王形华、郭 旗、谢逸群 2005 光学学报 25 848]
- [19] Dai J H, Guo Q 2008 Acta Phys. Sin. 57 5001 (in Chinese)[戴 继慧、郭 旗 2008 物理学报 57 5001]
- [20] Desyatnikov A S, Sukhorukov A A, Kivshar Y S 2005 Phys. Rev. Lett. 95 203904
- [21] Lopez-Aguayo S, Desyatnikov A S, Kivshar Y S 2006 Opt. Expr. 14 7903
- $\left[\ 22 \ \right]$ Lopez-Aguayo S , Desyatnikov A S , Kivshar Y S 2006 Opt . Lett . 31 1100
- [23] Lopez-Aguayo S, Desyatnikov A S, Kivshar Y S, Skupin S, Krolikowski W, Bang O 2006 Opt. Lett. 31 1100
- [24] Skupin S , Grech M , Krolikowski W 2008 Opt . Expr . 16 9118
- [25] Skupin S , Bang O , Edmundson D , Krolikowski W 2006 Phys. Rev. E 73 06603
- [26] Skryabin D V, McSloy J M, Firth W J 2002 Phys. Rev. E 66 055602
- [27] Malomed B A 2002 Progress in optics edited by Wolf E (Amsterdam: North-Holland), Vol. 43 p71
- [28] Soljacic M , Segev M , Menyuk C R 2000 Phys. Rev. E 61 R1048
- [29] Wang Z X, Guo D R 2000 Introduction to Special Function (Beijing: Peking University Press)p291(in Chinese)[王竹溪、郭 敦仁 2000 特殊函数概论(北京 北京大学出版社)第 291页]

Rotating azimuthon in strongly nonlocal nonlinear media*

Dai Ji-Hui Guo Qi[†]

(Laboratory of Photonic Information Technology, South China Normal University, Guangzhou 510631, China)
 (Received 29 July 2008; revised manuscript received 22 September 2008)

Abstract

In strongly nonlocal nonlinear media, the evolution of the optical beam is governed by Snyder-Mitchell model. By applying the variational method, we obtain an approximate analytical solution of Snyder-Mitchell model, i.e., the rotating azimuthon, which has an inherent rotation. Under certain conditions, the rotating azimuthon can be reduced to the radially symmetric optical vortex soliton.

Keywords : nonlocal nonlinear media , strong nonlocality , rotating azimuthon , variationl approach PACC : 4265S

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10474023 and 10674050) and Specialized Research Fund for the Doctoral Program of Higher Education (Grant No. 20060574006) and Program for Innovative Research Team of the Higher Education in Guangdong (Grant No. 06CXTD005).

[†] Corresponding author. E-mail: guoq@scnu.edu.cn