第 58 卷 第 4 期 2009 年 4 月
1000-3290/2009/58(04)/2121-06

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.58,No.4,April,2009

构造变系数非线性发展方程精确解的一种方法*

套格图桑† 斯仁道尔吉

(内蒙古师范大学数学科学学院,呼和浩特 010022)

(2008 年 2 月 29 日收到;2008 年 9 月 19 日收到修改稿)

给出构造变系数非线性发展方程精确解的一种函数变换,并和第二种椭圆方程相结合,借助符号计算系统 Mathematica,以带强迫项变系数组合 KdV 方程为例,得到了该方程新的类 Jacobi 椭圆函数精确解以及退化后的类孤子解和三角函数解.

关键词:辅助方程,函数变换,变系数非线性发展方程,精确解

PACC:0230,0340,0290

1. 引 言

构造非线性发展方程的精确解是孤立子理论的重要研究课题之一.对于常系数的非线性发展方程,已提出构造精确解的许多方法[1—9].人们为了准确地描述物质运动的规律,研究了变系数的非线性发展方程,并获得了许多研究成果[10—20].例如文献[14]用一种变换得到了变系数的 KdV-mKdV 方程的类孤子解.文献[15—19]用 Jacobi 椭圆函数展开法,截断展开法和辅助方程法等方法,讨论了下列变系数 KdV 方程的精确解.

$$u_t + \alpha(t) u u_x + \beta(t) u_{xxx} = 0, \tag{1}$$

$$u_t + (\alpha(t) + \mu(t) x) u_x + \alpha(t) u u_x + \beta(t) u_{xxx} + \nu(t) u = 0, \tag{2}$$

$$u_t + (\alpha(t) + \beta(t) x) u_x - 3m\gamma(t) u u_x + \gamma(t) u_{xxx} + 2\beta(t) u = 0. \tag{3}$$

文献[20]用两个新的 Riccati 方程,得到了带强迫项变系数组合 KdV 方程(4)的下列 $u_{(3,1)}(x,t)$—$u_{(3,4)}(x,t)$类孤子解和三角函数解.

$$u_t + \alpha(t) u u_x + m(t) u^2 u_x + \beta(t) u_{xxx} = R(t), \tag{4}$$

其中 $\alpha(t)$,$m(t)$,$\beta(t)$是满足一定关系的 t 的函数,$R(t)$是 t 的任意函数.

$$u_{(3,1)}(x,t) = M + \int R(t)\mathrm{d}t \pm \frac{J}{L\cosh(V\xi) + X\sinh(V\xi) + Y},$$

$$u_{(3,2)}(x,t) = M + \int R(t)\mathrm{d}t \pm \frac{L\cosh(V\xi) + X\sinh(V\xi)}{L\cosh(V\xi) + X\sinh(V\xi) + Y},$$

$$u_{(3,3)}(x,t) = M + \int R(t)\mathrm{d}t \pm \frac{J}{L\cos(V\xi) + X\sin(V\xi) + Y},$$

$$u_{(3,4)}(x,t) = M + \int R(t)\mathrm{d}t \pm \frac{-L\cos(V\xi) + X\sin(V\xi)}{L\cos(V\xi) + X\sin(V\xi) + Y},$$

其中 M,J,L,X,Y,V 是常数.

当 $R(t)=0$,$m(t)=0$ 时,方程(4)变成方程(1).

当 $R(t)=0$,$m(t)$,$\alpha(t)$,$\beta(t)$为常数时,方程(4)变成等离子体物理、固体物理、原子物理、流体力学等物理当中被广泛应用的组合 KdV-mKdV 方程.

当 $m(t)=0$,$R(t)=0$,$\alpha(t)$,$\beta(t)$为常数时,方程(4)转化为 KdV 方程,它是非线性色散波方程的典型代表.

当 $\alpha(t)=0$,$R(t)=0$,$m(t)$,$\beta(t)$为常数时,方程(4)转化为 mKdV 方程,它描述非调和晶格中声波的传播等运动.

一直以来数学和物理学家关注组合 KdV-mKdV 方程、KdV 方程和 mKdV 方程,并获得了许多研究成果[21—27].因此构造方程(4)的精确解具有重要意义.

* 国家自然科学基金(批准号:10461006)、内蒙古自治区高等学校科学研究基金(批准号:NJZZ07031)、内蒙古自治区自然科学基金(批准号:200408020103)和内蒙古师范大学自然科学研究计划(批准号:QN005023)资助的课题.

† E-mail:tgts@imnu.edu.cn

本文以辅助方程法[3]和试探函数法为基础,给出构造变系数非线性发展方程精确解的一种函数变换(7),并和第二种椭圆方程(8)相结合,借助符号计算系统 Mathematica,以系数函数 $\alpha(t)$,$m(t)$,$\beta(t)$满足一定关系的带强迫项变系数组合 KdV 方程[20]为例,得到了该方程新的类 Jacobi 椭圆函数精确解以及退化后的类孤子解和三角函数解.

2. 方法及其应用步骤

对于给定的变系数非线性发展方程(以 $1+1$ 维变系数非线性发展方程为例)

$$H(u,u_x,u_t,u_{xx},u_{xt},u_{tt},\cdots)=0, \tag{5}$$

进行行波变换 $u(x,t)=u(\xi)$,$\xi=p(t)x+q(t)$后,得到下列偏微分方程

$$G(p,p_t,q_t;u,u_\xi,u_{\xi\xi},u_{\xi\xi\xi},\cdots)=0, \tag{6}$$

我们把方程(6)的解取为如下形式

$$u(x,t)=u(\xi)=f_0(t)+\frac{f_1(t)z(\xi)}{f_2(t)+f_3(t)z(\xi)}, \tag{7}$$

其中 $p(t)$,$q(t)$,$f_0(t)$,$f_1(t)$,$f_2(t)$,$f_3(t)$是随时间 t 的待定函数. $z(\xi)$是下列第二种椭圆辅助方程来确定.

$$\begin{aligned}(z'(\xi))^2&=\left(\frac{\mathrm{d}z(\xi)}{\mathrm{d}\xi}\right)^2\\&=az(\xi)+bz^2(\xi)+cz^3(\xi).\end{aligned} \tag{8}$$

我们得到方程(8)的如下解.

a	b	c	$z(\xi)$	编号
4	$-4(1+k^2)$	$4k^2$	$\mathrm{sn}^2(\xi,k)$	(9)
$4(1-k^2)$	$4(-1+2k^2)$	$-4k^2$	$\mathrm{cn}^2(\xi,k)$	(10)
$4(-1+k^2)$	$4(2-k^2)$	-4	$\mathrm{dn}^2(\xi,k)$	(11)
$4k^2$	$-4(1+k^2)$	4	$\mathrm{ns}^2(\xi,k)$	(12)
$-4k^2$	$4(-1+2k^2)$	$-4(-1+k^2)$	$\mathrm{nc}^2(\xi,k)$	(13)
-4	$-4(-2+k^2)$	$4(-1+k^2)$	$\mathrm{nd}^2(\xi,k)$	(14)
4	$-4(-2+k^2)$	$-4(-1+k^2)$	$\mathrm{sc}^2(\xi,k)$	(15)
4	$4(-1+2k^2)$	$4k^2(-1+k^2)$	$\mathrm{sd}^2(\xi,k)$	(16)
$-4(-1+k^2)$	$-4(-2+k^2)$	4	$\mathrm{cs}^2(\xi,k)$	(17)
4	$-4(-1+k^2)$	$4k^2$	$\mathrm{cd}^2(\xi,k)$	(18)
$4k^2(-1+k^2)$	$4(-1+k^2)$	4	$\mathrm{ds}^2(\xi,k)$	(19)
$4k^2$	$-4(1+k^2)$	4	$\mathrm{dc}^2(\xi,k)$	(20)
$-(1-k^2)^2$	$2(1+k^2)$	-1	$(k\mathrm{cn}(\xi,k)\pm\mathrm{dn}(\xi,k))^2$	(21)
1	$-2(-1+2k^2)$	1	$(\mathrm{ns}(\xi,k)\pm\mathrm{cs}(\xi,k))^2$	(22)
$1-k^2$	$2(1+k^2)$	$1-k^2$	$(\mathrm{nc}(\xi,k)\pm\mathrm{sc}(\xi,k))^2$	(23)
k^4	$2(-2+k^2)$	1	$(\mathrm{ns}(\xi,k)\pm\mathrm{ds}(\xi,k))^2$	(24)
k^2	$2(-2+k^2)$	k^2	$(\mathrm{sn}(\xi,k)\pm\mathrm{icn}(\xi,k))^2$, $G(\xi)$	(25)
1	$-2(-1+2k^2)$	1	$(k\mathrm{sn}(\xi,k)\pm\mathrm{idn}(\xi,k))^2$	(26)
$1-k^2$	$2(1+k^2)$	$1-k^2$	$\dfrac{\mathrm{cn}^2(\xi,k)}{(1\pm\mathrm{sn}(\xi,k))^2}$	(27)
$-1+k^2$	$2(1+k^2)$	$-1+k^2$	$\dfrac{\mathrm{dn}^2(\xi,k)}{(1\pm k\mathrm{sn}(\xi,k))^2}$	(28)
k^2	$2(-2+k^2)$	k^2	$\dfrac{k^2\mathrm{sn}^2(\xi,k)}{(1\pm\mathrm{dn}(\xi,k))^2}$	(29)
1	$-2(-1+2k^2)$	1	$\dfrac{\mathrm{sn}^2(\xi,k)}{(1\pm\mathrm{cn}(\xi,k))^2}$	(30)
1	$2(-2+k^2)$	k^4	$\dfrac{\mathrm{sn}^2(\xi,k)}{(1\pm\mathrm{dn}(\xi,k))^2}$	(31)
4	$4(2-4k^2)$	4	$\dfrac{\mathrm{sn}^2(\xi,k)\mathrm{dn}^2(\xi,k)}{\mathrm{cn}^2(\xi,k)}$	(32)

续表

a	b	c	$z(\xi)$	编号
4	8	$4k^4$	$\dfrac{\mathrm{sn}^2(\xi,k)\mathrm{cn}^2(\xi,k)}{\mathrm{dn}^2(\xi,k)}$	(33)
$4(-2k^2+k^4+1)$	$4(2+k^2)$	4	$\dfrac{\mathrm{cn}^2(\xi,k)\mathrm{dn}^2(\xi,k)}{\mathrm{sn}^2(\xi,k)}$	(34)
$\dfrac{k^2-2k+1}{A^2}$	$4\left(\dfrac{1+k^2}{2}+3k\right)$	$A^2(k-1)^2$	$\dfrac{\mathrm{cn}^2(\xi,k)\mathrm{dn}^2(\xi,k)}{A^2(1\pm\mathrm{sn}(\xi,k))^2(1\pm k\mathrm{sn}(\xi,k))^2}$	(35)
$\dfrac{k^2+2k+1}{A^2}$	$4\left(\dfrac{1+k^2}{2}-3k\right)$	$A^2(k+1)^2$	$\dfrac{\mathrm{cn}^2(\xi,k)\mathrm{dn}^2(\xi,k)}{A^2(1\pm\mathrm{sn}(\xi,k))^2(1\mp k\mathrm{sn}(\xi,k))^2}$	(36)
$4(\mp 2k^3+k^4+k^2)$	$4(\pm 6k-k^2-1)$	$\mp\dfrac{16}{k}$	$\dfrac{k^2\mathrm{cn}^2(\xi,k)\mathrm{dn}^2(\xi,k)}{(k\mathrm{sn}^2(\xi,k)\pm 1)^2}$	(37)
4	U_1	V_1	$\dfrac{\mathrm{cn}^2(\xi,k)\mathrm{sn}^2(\xi,k)}{(\mathrm{cn}^2(\xi,k)\mp\sqrt{1-k^2}\,\mathrm{sn}^2(\xi,k))^2}$	(38)
U_2	V_2	W_1	$\dfrac{k^4\mathrm{cn}^2(\xi,k)\mathrm{sn}^2(\xi,k)}{(\pm\sqrt{1-k^2}-\mathrm{dn}^2(\xi,k))^2}$	(39)
U_3	V_3	W_2	$\dfrac{k^4\mathrm{cn}^2(\xi,k)\mathrm{sn}^2(\xi,k)}{(\mathrm{sn}^2(\xi,k)+(\pm 1+\sqrt{1-k^2})\mathrm{dn}(\xi,k)-1\mp\sqrt{1-k^2})^2}$	(40)
U_4	V_4	W_3	$\dfrac{\left(\sqrt{\dfrac{B^2-C^2}{B^2-C^2k^2}}+\mathrm{sn}(\xi,k)\right)^2}{(B\mathrm{cn}(\xi,k)+C\mathrm{dn}(\xi,k))^2}$	(41)
U_5	V_5	$C^2k^2+B^2$	$\dfrac{\left(\sqrt{\dfrac{C^2k^2+B^2-C^2}{B^2+C^2k^2}}+\mathrm{cn}(\xi,k)\right)^2}{(B\mathrm{sn}(\xi,k)+C\mathrm{dn}(\xi,k))^2}$	(42)
U_6	$2(k^2-2)$	C^2+B^2	$\dfrac{\left(\sqrt{\dfrac{B^2+C^2-C^2k^2}{B^2+C^2}}+\mathrm{dn}(\xi,k)\right)^2}{(B\mathrm{sn}(\xi,k)+C\mathrm{cn}(\xi,k))^2}$	(43)
U_7	$4(2k^2+2)$	W_4	$\dfrac{(k\mathrm{sn}^2(\xi,k)\mp 1)^2}{B^2(\mathrm{sn}^2(\xi,k)\pm 1)^2}$	(44)
U_8	$4(2k^2-4)$	W_5	$\dfrac{(\sqrt{1-k^2}+\mathrm{dn}^2(\xi,k))^2}{B^2(\mathrm{dn}^2(\xi,k)-\sqrt{1-k^2})^2}$	(45)
U_9	$4(2k^2-4)$	W_6	$\dfrac{B^2(\mathrm{dn}^2(\xi,k)-\sqrt{1-k^2})^2}{(\sqrt{1-k^2}+\mathrm{dn}^2(\xi,k))^2}$	(46)
1	$2(k^2+1)$	$(1-k^2)^2$	$\dfrac{\mathrm{sn}^2(\xi,k)}{(\mathrm{dn}(\xi,k)+\mathrm{cn}(\xi,k))^2}$	(47)
U_{10}	V_6	$4\sqrt{1-k^2}$	$\dfrac{(1+\sqrt{1-k^2})^2\mathrm{sn}^2(\xi,k)}{2(\sqrt{1-k^2}\,\mathrm{sn}^2(\xi,k)+\mathrm{cn}^2(\xi,k)+\mathrm{dn}(\xi,k))^2}$	(48)

其中 $G(\xi)=\dfrac{\mathrm{dn}^2(\xi,k)}{(\sqrt{1-k^2}\,\mathrm{sn}(\xi,k)\pm\mathrm{cn}(\xi,k))^2}$，$U_1=4(2\pm 6\sqrt{1-k^2}-k^2)$，$V_1=4(8\pm 8\sqrt{1-k^2}-4k^2+4)$，$U_2=4(2\pm 2\sqrt{1-k^2}-k^2)$，$V_2=(2\pm 6\sqrt{1-k^2}-k^2)$，$U_3=2\pm 2\sqrt{1-k^2}-k^2$，$V_3=4\left(\dfrac{k^2}{2}\mp 3\sqrt{1-k^2}-1\right)$，$W_1=4(\pm 4\sqrt{1-k^2})$，$W_2=2-k^2\mp 2\sqrt{1-k^2}$，$U_4=\dfrac{k^2-1}{(-B^2+C^2k^2)}$，$V_4=2(k^2+1)$，$W_3=C^2k^4-B^2k^2-C^2k^2+B^2$，$U_5=B^2+C^2k^2$，$V_5=2(-2k^2+1)$，$U_6=\dfrac{k^4}{(B^2+C^2)}$，$U_7=4\left(-\dfrac{k^2+2k+1}{B^2}\right)$，$W_4=4(-B^2k^2-B^2\mp 2B^2k)$，$U_8=4\left(\dfrac{-k^2+2\sqrt{1-k^2}+2}{B^2}\right)$，$W_5=4(-B^2(-2+k^2+2\sqrt{1-k^2}))$，$U_9=4(-B^2(-2+k^2+2\sqrt{1-k^2}))$，$W_6=4\left(\dfrac{-k^2+2\sqrt{1-k^2}+2}{B^2}\right)$，$U_{10}=(1+\sqrt{1-k^2})^2$，$V_6=2+6\sqrt{1-k^2}-k^2$.

将(7)，(8)式一起代入(6)式，令 $z^j(\xi)$ ($j=0,1,2,$

$\cdots$)和 $x^s z^i(\xi) z'(\xi)$ ($s=0,1$; $i=0,1,2,\cdots$)的系数为零后得到 $a, b, c, f_0(t), f_1(t), f_2(t), f_3(t), p(t), q(t)$ 为未知量的超定偏微分方程组，用符号计算系统 Mathematica 求出该方程组的解，再把该方程组的每一组解分别同(9)—(48)式一起代入(7)式后，得到变系数非线性发展方程(5)的类 Jacobi 椭圆函数解以及退化后的类孤子解和三角函数波解(其中 A, B, C 是不为零的任意常数).

3. 带强迫项变系数组合 KdV 方程的精确解

下面构造带强迫项变系数组合 KdV 方程(4)的精确解.

将 $u(x,t)=u(\xi)$, $\xi=p(t)x+q(t)$ 代入方程(4)后，得到下列偏微分方程

$$\begin{aligned}&(m(t)u^2(\xi)+u(\xi)\alpha(t))p(t)u'(\xi)\\&+(xp'(t)+q'(t))u'(\xi)\\&+p^3(t)\beta(t)u'''(\xi)=R(t).\end{aligned}\tag{49}$$

我们把方程(49)的解取为(7)式. 将(7)，(8)式一起代入(49)式，令 $z^i(\xi)$ ($i=0,1,2,3,4$)，$x^k z^j(\xi) z'(\xi)$ ($k=0,1$; $j=0,1,2$)的系数为零后得到一个超定偏微分方程组(限于篇幅未列出)，用符号计算系统 Mathematica 求出该方程组的如下解.

$$\begin{aligned}p(t)&=p,\\ f_0(t)&=\int R(t)\mathrm{d}t,\ f_2(t)=f_1(t)=f_3(t),\\ q(t)&=-\int(pf_0^2(t)m(t)+pf_0(t)\alpha(t)\\&\quad-3ap^3\beta(t)+bp^3\beta(t))\mathrm{d}t\\ m(t)&=6(a-b+c)p^2\beta(t),\\ \alpha(t)&=-3p^2(3a-2b+c\\&\quad+4(a-b+c)f_0(t))\beta(t),\end{aligned}\tag{50}$$

其中 $a, b, c, p\neq 0$ 均为常数. 将(50)式分别与(9)—(13)式一起代入(7)式后，得到带强迫项变系数组合 KdV 方程(4)的下列形式的类 Jacobi 椭圆函数精确解(限于篇幅其余解这里不一一列出).

$$u_{(1,1)}(x,t)=\int R(t)\mathrm{d}t+\frac{\mathrm{sn}^2(\xi,k)}{1+\mathrm{sn}^2(\xi,k)},$$

这里 $\xi=px-\int(pf_0^2(t)m(t)+pf_0(t)\alpha(t)-12p^3\beta(t)-4(1+k^2)p^3\beta(t))\mathrm{d}t$, $f_0(t)=\int R(t)\mathrm{d}t$, $m(t)=48(1+k^2)p^2\beta(t)$, $\alpha(t)=-3p^2(20+12k^2+32(1+k^2)f_0(t))\beta(t)$.

$$u_{(1,2)}(x,t)=\int R(t)\mathrm{d}t+\frac{\mathrm{cn}^2(\xi,k)}{1+\mathrm{cn}^2(\xi,k)},$$

这里 $\xi=px-\int(pf_0^2(t)m(t)+pf_0(t)\alpha(t)-12(1-k^2)p^3\beta(t)+4(-1+2k^2)p^3\beta(t))\mathrm{d}t$, $f_0(t)=\int R(t)\mathrm{d}t$, $m(t)=48(1-2k^2)p^2\beta(t)$, $\alpha(t)=-3p^2(20-32k^2+32(1-2k^2)f_0(t))\beta(t)$.

$$u_{(1,3)}(x,t)=\int R(t)\mathrm{d}t+\frac{\mathrm{dn}^2(\xi,k)}{1+\mathrm{dn}^2(\xi,k)},$$

这里 $\xi=px-\int(pf_0^2(t)m(t)+pf_0(t)\alpha(t)-12(-1+k^2)p^3\beta(t)-4(-2+k^2)p^3\beta(t))\mathrm{d}t$, $f_0(t)=\int R(t)\mathrm{d}t$, $m(t)=48(-2+k^2)p^2\beta(t)$, $\alpha(t)=-3p^2(-32+20k^2+32(-2+k^2)f_0(t))\beta(t)$.

$$u_{(1,4)}(x,t)=\int R(t)\mathrm{d}t+\frac{1}{1+\mathrm{sn}^2(\xi,k)},$$

这里 $\xi=px+\int 4p^3(1+4k^2+3(3+5k^2)f_0(t)+12(1+k^2)f_0^2(t))\beta(t)\mathrm{d}t$, $f_0(t)=\int R(t)\mathrm{d}t$, $m(t)=48(1+k^2)p^2\beta(t)$, $\alpha(t)=-12p^2(3+5k^2+8(1+k^2)f_0(t))\beta(t)$.

$$u_{(1,5)}(x,t)=\int R(t)\mathrm{d}t+\frac{1}{1+\mathrm{cn}^2(\xi,k)},$$

这里 $\xi=px-\int 4p^3(-1+5k^2+3(-3+8k^2)f_0(t)+12(-1+2k^2)f_0^2(t))\beta(t)\mathrm{d}t$, $f_0(t)=\int R(t)\mathrm{d}t$, $m(t)=-48(-1+2k^2)p^2\beta(t)$, $\alpha(t)=12p^2(-3+8k^2+8(-1+2k^2)f_0(t))\beta(t)$.

$k=1$ 和 $k=0$ 时，Jacobi 椭圆函数分别转化为下列情况. $\mathrm{sn}(\xi,k)\to\tanh(\xi)$, $\mathrm{cn}(\xi,k)\to\mathrm{sech}(\xi)$, $\mathrm{dn}(\xi,k)\to\mathrm{sech}(\xi)$ 和 $\mathrm{sn}(\xi,k)\to\sin(\xi)$, $\mathrm{cn}(\xi,k)\to\cos(\xi)$, $\mathrm{dn}(\xi,k)\to 1$. 这样，以上得到 Jacobi 椭圆函数分别转化为相应的类孤子解和三角函数解(这里未列出).

4. 结　论

本文给出第二种椭圆方程和函数变换相结合的一种方法，并构造了带强迫项变系数组合 KdV 方程(4)新的类 Jacobi 椭圆函数精确解以及类孤子解和三角函数解(限于篇幅只列出部分精确解).

当 $R(t)=0, m(t)=0$ 和 $f_2(t)=1, f_3(t)=0$ 时，该方法得到文献[16—18]给出的方程(1)的精确解.

当 $k=1$ 时，(35)，(50)式代入(7)式后得到的解是文献[20]给出的形如 $u_{(3,1)}(x,t)$ 结果.

当 $k=1, R(t)=0, \alpha(t), m(t), \beta(t)$ 常数时，(17)，(50)式代入(7)式后得到的解是文献[21,22]给出的一种结果.

当 $m(t)=0, R(t)=0, f_2(t)=1, f_3(t)=0, \alpha(t), \beta(t), f_0(t), f_1(t)$ 为常数时，该方法得到文献[25,27]给出的 KdV 方程的精确解.

当 $a=c=0, b>0$ 时，辅助方程(8)存在解 $z(\xi)=\exp(\sqrt{b}\xi)=\sinh(\sqrt{b}\xi)+\cosh(\sqrt{b}\xi)$. 这时该方法得到带强迫项变系数组合 KdV 方程(4)的下列精确解.

$$u_{(1,4)}(x,t)=M+\int R(t)\mathrm{d}t + \frac{\cosh(\sqrt{b}\xi)+\sinh(\sqrt{b}\xi)}{\cosh(\sqrt{b}\xi)+\sinh(\sqrt{b}\xi)+1},$$

其中 $\xi = px - \int (pf_0^2(t)m(t) + pf_0(t)\alpha(t) + bp^3\beta(t))\mathrm{d}t$, $m(t) = -6bp^2\beta(t)$, $\alpha(t) = 6bp^2(1+2g_0(t))\beta(t)$, $f_0(t)=\int R(t)\mathrm{d}t$, $b, p\neq 0$ 的常数. 这是文献[20] 给出的形如 $u_{(3,2)}(x,t)$ 的解.

当 $b=c=0, a>0$ 时，辅助方程(8) 存在解 $z(\xi)=\frac{a}{4}\xi^2$. 这时该方法得到带强迫项变系数组合 KdV 方程(4) 的有理形式精确解(未列出). 文献[20] 只得到了形如 $u_{(3,1)}(x,t)$—$u_{(3,4)}(x,t)$ 的精确解，未能得到本文给出的类 Jacobi 椭圆函数精确解. 该方法也得到方程(2) 和(3) 等，其他变系数非线性发展方程新的精确解.

---

[1] Wang M L 1995 *Phys. Lett.* A **199** 169

[2] Wang M L 1996 *Phys. Lett.* A **213** 279

[3] Sirendaoreji, Sun J 2003 *Phys. Lett.* A **309** 387

[4] Parkes E J, Duffy B R 1996 *Comput. Phys. Commun.* **98** 288

[5] Chen Y, Li B 2004 *Commun. Theor. Phys.* (Beijing) **41** 1

[6] Li H M 2005 *Chin. Phys.* **14** 251

[7] Fu Z T, Liu S K, Liu S D 2004 *Commun. Theor. Phys.* (Beijing) **42** 343

[8] Li H M 2003 *Commun. Theor. Phys.* (Beijing) **39** 395

[9] Zhao X Q, Zhi H Y, Zhang H Q 2006 *Chin. Phys.* **15** 2202

[10] Zhu Z N 1993 *Phys. Lett.* A **180** 409

[11] Zhu Z N 1993 *Phys. Lett.* A **182** 277

[12] Hong W, Jung Y D 1999 *Phys. Lett.* A **257** 149

[13] Wang M L 2001 *Phys. Lett.* A **287** 211

[14] Yan Z Y, Zhang H Q 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 1957 (in Chinese) [闫振亚、张鸿庆 1999 物理学报 **48** 1957]

[15] Fu Z T, Liu S D, Liu S K, Zhao Q 2004 *Appl. Math. Mech.* **25** 67 (in Chinese) [付遵涛、刘式达、刘式适、赵 强 2004 应用数学和力学 **25** 67]

[16] Liu S K, Fu Z T, Liu S D, Zhao Q 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1923 (in Chinese) [刘式适、付遵涛、刘式达、赵 强 2002 物理学报 **51** 1923]

[17] Liu C S 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 4506 (in Chinese) [刘成仕 2005 物理学报 **54** 4506]

[18] Zhang J F, Chen F Y 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1648 (in Chinese) [张解放、陈芳跃 2001 物理学报 **50** 1648]

[19] Li D S, Zhang H Q 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1569 (in Chinese) [李德生、张鸿庆 2003 物理学报 **52** 1569]

[20] Lu D C, Hong B J, Tian L X 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 5617 (in Chinese) [卢殿臣、烘宝剑、田立新 2006 物理学报 **55** 5617]

[21] Zhao Q, Liu S K, Fu Z T 2005 *Commun. Theor. Phys.* (Beijing) **43** 615

[22] Shi Y R, Lü K P, Duan W S, Hong X R, Zhao J B, Yang H J 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2074 (in Chinese) [石玉仁、吕克璞、段文山、洪学仁、赵金保、杨红娟 2001 物理学报 **50** 2074]

[23] Pan J T, Gong L X 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 5585 (in Chinese) [潘军廷、龚伦训 2007 物理学报 **56** 5585]

[24] Shi Y R, Guo P, Lü K P, Duan W S 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 3265 (in Chinese) [石玉仁、郭 鹏、吕克璞、段文山 2004 物理学报 **53** 3265]

[25] Liu S K, Fu Z T, Liu S D, Zhao Q 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2068 (in Chinese) [刘式适、付遵涛、刘式达、赵 强 2001 物理学报 **50** 2068]

[26] Liu S K, Chen H, Fu Z T, Liu S D 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1842 (in Chinese) [刘式适、陈 华、付遵涛、刘式达 2003 物理学报 **52** 1842]

[27] Fu Z T, Liu S K, Liu S D 2003 *Commun. Theor. Phys.* (Beijing) **39** 531

A method for constructing exact solutions of nonlinear evolution equation with variable coefficients *

Taogetusang† Sirendaoerji

(*College of Mathematical Science*, *Inner Mongolia Normal University*, *Huhhot* 010022, *China*)

(Received 29 February 2008; revised manuscript received 19 September 2008)

Abstract

A function transformation method for constructing exact solutions of the variable coefficient nonlinear evolution equations is proposed. The method together with the the second kind of elliptic equation and the symbolic computation system Mathematica is used to construct the new exact Jacobi elliptic function solutions, the degenerated soliton-like solutions and trigonometric function solutions of the composed KdV equation with forced variable coefficients.

Keywords: auxiliary equation, function transformation, nonlinear evolution equation with variable coefficients, exact solution

PACC: 0230, 0340, 0290

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10461006), the Science Research Foundation of Institution of Higher Education of Inner Mongolia Autonomous Region, China (Grant No. NJZZ07031), the Natural Science Foundation of Inner Mongolia Autonomous Region, China (Grant No. 200408020103) and the Natural Science Research Program of Inner Mongolia Normal University, China (Grant No. QN005023).

† E-mail: tgts@imnu.edu.cn