

双稳系统演化的时间尺度与随机共振的加强^{*}

林 敏[†] 方利民

(中国计量学院计量测试工程学院 杭州 310018)
(2008 年 7 月 20 日收到 2008 年 10 月 14 日收到修改稿)

噪声作用下的双稳系统存在着单一势阱内的随机波动和两势阱之间的概率跃迁,这两种不同层级的运动具有不同的时间尺度,且低层级的势阱内的波动影响着高层级的势阱间的跃迁.当外作用周期信号的时间尺度与噪声诱导的势阱间概率跃迁达到随机同步时,则能产生随机共振.给系统再加第二驱动周期信号,使其时间尺度与低层级的势阱内的波动相匹配,则存在着频率吸收现象,并能增强双稳系统的随机共振效应.

关键词:随机共振,双稳系统,层级,时间尺度

PACC: 0250, 0545, 0540

1. 引 言

一个系统受到外界作用时,如果作用与系统的固有振动频率相等或相近,就会使之产生大幅度的振动.共振就是利用频率相等或相近来有效积聚能量,使微弱的作用产生显著的效果.随机共振是以噪声作为媒介引起微弱周期信号与双稳系统协同作用的非线性现象.它描述了在一定量的噪声背景中,非线性双稳系统对微弱的周期信号能产生强烈的输出响应,存在着噪声能量向信号能量转移的机制.自 1981 年 Benzi 等提出随机共振^[1]以来,人们对随机共振的规律及其在自然科学各个领域的表现已经有了较为全面的认识^[2-7],在自然界广泛存在随机共振这一事实已被普遍接受.但这些研究大多只涉及噪声对共振的影响.为了增强双稳系统输出功率谱在输入信号频率处的谱值, Gammaitoni 等首次提出了控制随机共振的方法^[8].随后, Löcher 等针对不同的系统相继提出了各种不同的随机共振控制方法^[9-13].

双稳系统中噪声的非线性作用十分典型,而且是多方面的.在噪声的作用下,双稳系统两个势阱中的运动不再互相独立,处于某一势阱内的系统会在不同时间以不同的概率进入另一势阱.本文根据非线性双稳系统在噪声作用下的演化特性,分析了双

稳系统存在着不同时间尺度的层级运动.通过给双稳系统施加双周期驱动信号,并使两驱动信号的时间尺度分别与双稳系统固有的特征时间相匹配,则在双稳系统中将产生频率吸收和随机共振加强等新现象.

2. 双稳系统演化的层级与时间尺度

2.1. 双稳系统随机共振模型

作为研究随机共振的经典模型,考虑一维动力学系统

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{dV(x)}{dx} + A \cos(\omega_0 t) + N(t), \quad (1)$$

式中 $V(x) = -\frac{1}{2}ax^2 + \frac{x^4}{4}$ 是双势阱函数, $N(t)$ 是均值为零、自相关函数 $\langle N(t)N(0) \rangle = 2D\delta(t)$ 的高斯白噪声,其中 D 代表噪声强度.(1)式描述了处于双势阱中的粒子受到随机力和周期信号作用时,在过阻尼条件下的运动方程.当 $A = D = 0$ 时,系统在 $x_m = \pm\sqrt{a}$ 处有两个稳态.当(1)式中不存在周期力($A = 0$)而仅有噪声($D \neq 0$)作用时,粒子在双稳系统中运动的演化过程可分解为两个层级,一是粒子在单一势阱平衡点附近的随机波动,这是局部的、低层级的运动;二是粒子越过势垒在双稳系统的两势阱之间的跃迁运动,这是全局的、高层级运动.这两种运

^{*} 国家自然科学基金(批准号 50675214)和浙江省自然科学基金(批准号 Y7080111)资助的课题.

[†] E-mail: linm@cjl. edu. cn

动具有不同的特征时间尺度.

2.2. 单势阱近似下的时间尺度

系统响应速度反映了系统跟随信号变化的能力,它的倒数就是系统的特征时间.对于(1)式,当不存在周期力($A=0$)而仅有噪声($D \neq 0$)作用且噪声强度 D 足够小时,粒子只在单一势阱的稳定平衡点 x_m 附近波动,此时势函数^[14]可用

$$V(x) \approx V(x_m) + \frac{1}{2} \frac{d^2 V(x)}{dx^2} \Big|_{x_m} (x - x_m)^2, \quad (2)$$

代替,动力学方程(1)式可简化为如下形式的一阶系统

$$\dot{x} = 2a(x - x_m) + N(t), \quad (3)$$

令 $T_1 = 1/(2a)$, 则 T_1 具有时间的量纲,是双稳系统单一势阱内随机波动的特征时间尺度.(3)式表明,在单一势阱内随机波动的 $x(t)$ 其时域、频域特性不同于 $N(t)$, $x(t)$ 不再是白噪声,而是在时域存在着相关性,相关所及的时间尺度为 T_1 ;在频域表现为频谱能量不再是均匀分布,而是向低频区集中,所占据的频带为 $[0, 1/T_1]$.

2.3. 两势阱间跃迁的时间尺度

根据 Kramers 逃逸率理论,在大阻尼情形下粒子在两个势阱间逃逸率为

$$r_k(D) = \frac{a}{\gamma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{a}{4D}}, \quad (4)$$

其中 γ 是阻尼系数,对应于系统(1)有 $\gamma=1$, 则

$$r_k = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{a}{4D}}, \quad (5)$$

两势阱间跃迁的特征时间尺度为

$$T_k = 2/r_k = \frac{2\sqrt{2\pi}}{a} e^{\frac{a}{4D}}, \quad (6)$$

可见, $T_k > T_1$, 即两势阱间跃迁的时间尺度大于单一势阱内波动的时间尺度.

因此,双稳系统在噪声作用下存在着两种不同形式的运动,阱内的波动与两阱间的跃迁,且具有不同时间尺度.传统的随机共振理论只考虑两势阱之间的跃迁,并将 T_k 与输入信号周期 $2\pi/\omega_0$ 之间的随机同步作为产生共振的匹配条件,而忽略了长时间处于单一势阱内的随机波动对随机共振的影响.当考虑单一势阱内的随机波动时,随机共振的产生可分为两个过程,一是时域互不相关的白噪声经单一势阱作用后变成为相关时间尺度达 T_1 的低频噪声,

二是跃过势垒以更长的时间尺度 T_k 在两势阱之间来回运动,相应的变化频率也更低,当输入信号的时间尺度与 T_k 相匹配时则产生随机共振.由于 T_k 是随机变量,在双稳势函数和噪声强度一定时,如引入一驱动信号作用于双稳系统,该驱动信号的作用是有效地引导单一势阱内的随机波动,使 T_k 与 $2\pi/\omega_0$ 的随机同步匹配得更好,则必定能增强双稳系统的随机共振,并能促使更多的噪声能量转化为信号能量.

3. 双周期信号驱动的双稳系统

由于双稳系统中的运动存在着不同的时间尺度,当系统受到不同尺度的外驱动信号作用时,系统将呈现出丰富的动力学特性.为此,构建如图1所示的双周期驱动的双稳系统,相应的动力学方程为

$$\frac{dx}{dt} = ax - x^3 + A \cos(\omega_0 t) + B \cos(\Omega t) + N(t), \quad (7)$$

在 $B=0$ 时(7)式是被人们广泛研究的随机共振方程.本文在(7)式右边加上第二驱动项 $B \cos(\Omega t)$, 研究当第一驱动项 $A \cos(\omega_0 t)$ 的时间尺度与 T_k 相匹配时,第二驱动项对双稳系统输出的影响,特别是通过连续改变第二驱动项的频率 Ω , 研究双稳系统输出对第二驱动信号的频率响应特性,从而揭示双稳系统具有的新的随机共振现象.

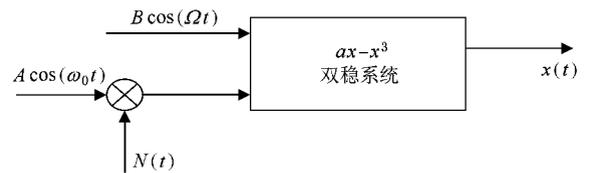


图1 双周期驱动的双稳系统

4. 数值仿真结果与分析

对于图1所示的双周期信号作用下的双稳系统,相应的动力学方程由(7)式确定,双稳系统输出响应 $x(t)$ 与双稳系统参数 a , 第一驱动信号 $A \cos(\omega_0 t)$ 的参数 A, ω_0 和第二驱动信号 $B \cos(\Omega t)$ 的参数 B, Ω 以及噪声 $N(t)$ 的强度 D 有关.而反映双稳系统在噪声作用下演化的两个特征时间 T_1, T_k 都与系统参数 a 有关.下面研究 a 取不同值时的双

稳系统所具有的演化特性,特别是第二驱动频率 Ω 对双稳系统输出及随机共振的影响.数值仿真采用四阶 Runge-Kutta 法,采样间隔取为 $h = 0.02$.

1) 取系统参数 $a = 0.3$,第一驱动周期信号的幅值和频率为 $A = 0.065$, $\omega_0 = 0.01\pi$,噪声强度为 $D = 0.4$,当 $B = 0$ (即无第二驱动信号作用)时,双稳系统能产生传统的随机共振现象,如图 2 所示,用来度量随机共振效应的输出功率谱值为 $P_s(\omega_0) = 0.1775$.

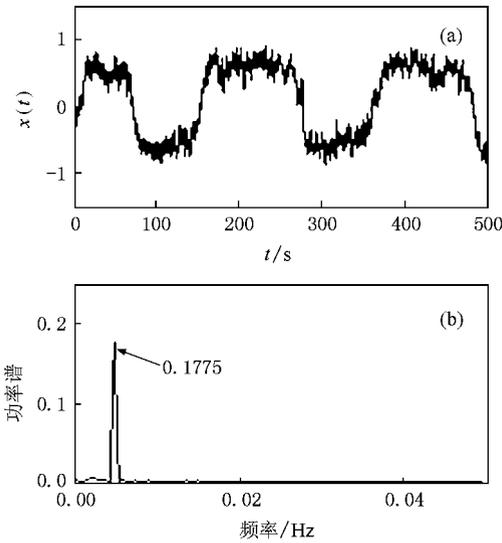


图 2 $a = 0.3$ 传统随机共振的时域波形及功率谱 (a) 时域波形 (b) $x(t)$ 的功率谱

给系统加第二驱动信号,当参数取值 $B = 0.03$, $\Omega = 0.02\pi$ 时,双稳系统的随机共振效应明显增强,输出功率谱在频率 ω_0 处的幅值 $P_s(\omega_0) = 0.2198 > 0.1775$,如图 3 所示.

保持第二驱动信号的幅值 $B = 0.03$ 不变,连续改变频率 Ω 的大小,观测双稳系统输出 $x(t)$ 的功率谱在第一驱动频率 ω_0 处的谱值 $P_s(\omega_0)$ 和第二驱动频率 Ω 处的谱值 $P_s(\Omega)$ 的变化,如图 4 所示.图 4(a) 和图 4(b) 分别是 $P_s(\omega_0)$ 和 $P_s(\Omega)$ 随 Ω 的变化曲线,图 4 表明受第二驱动信号作用的双稳系统,其输出功率谱值明显随驱动频率 Ω 而变化,特别是当 $\Omega = 0.02\pi$ 时, $P_s(\omega_0)$ 中出现了波峰而 $P_s(\Omega)$ 则出现了波谷,存在着频率吸收和共振增强现象.由于 $P_s(\omega_0)$ 反映的是势阱之间的跃迁,因而有较大的幅值;而 $P_s(\Omega)$ 主要反映的是阱内的波动,则幅值较小.

改变第一驱动信号和噪声的参数, $A = 0.05$, ω_0

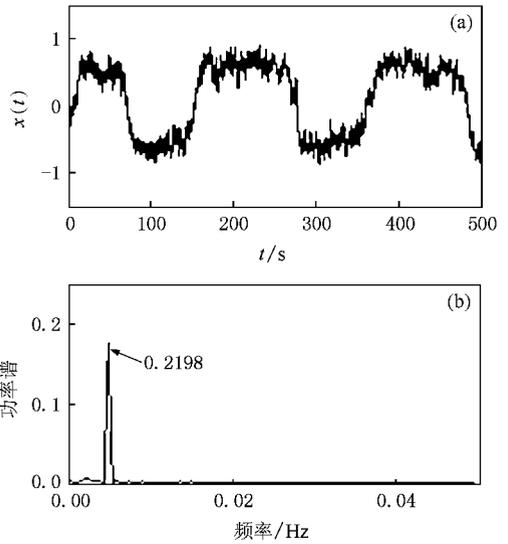


图 3 $a = 0.3$ 双周期驱动的随机共振 (a) 时域波形 (b) $x(t)$ 的功率谱

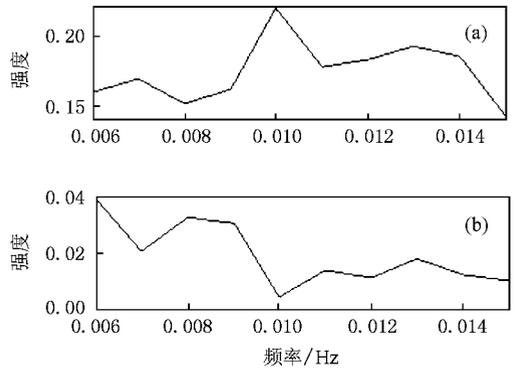


图 4 共振状态下改变 Ω 产生的功率谱 (a) $P_s(\omega_0)$ 与 Ω (b) $P_s(\Omega)$ 与 Ω

$= 0.01\pi$, $D = 0.5$, 当 $B = 0$ 时,双稳系统处于非随机共振状态.给系统施加第二驱动信号,保持幅值 $B = 0.02$,而连续变化频率 Ω 的大小,则双稳系统输出 $x(t)$ 的功率谱在第一驱动频率 ω_0 处和第二驱动频率 Ω 处的谱值也随之而变,如图 5 所示.图 5(a) 和图 5(b) 分别是 $P_s(\omega_0)$ 和 $P_s(\Omega)$ 随 Ω 的变化曲线,随着 Ω 的变化, $P_s(\omega_0)$ 和 $P_s(\Omega)$ 的曲线也出现了波峰、波谷,存在着频率吸收现象.但 $P_s(\omega_0)$ 的波峰与 $P_s(\Omega)$ 的波谷所对应的频率值并不相同,而是存在着频移,这一性质与处于随机共振状态下的特性有所不同.

2) 取系统参数 $a = 0.9$,第一驱动参数和噪声强度分别为 $A = 0.3$, $\omega_0 = 0.018\pi$, $D = 1.6$,当 $B = 0$

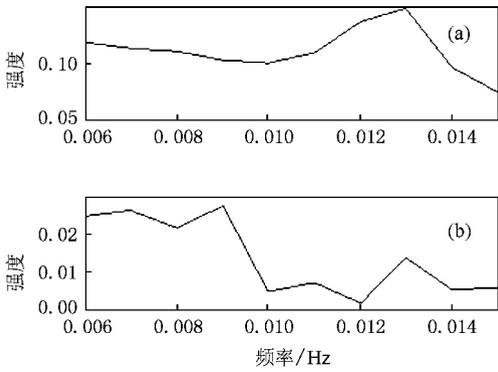


图 5 非共振状态下改变 Ω 产生的功率谱 (a) $P_s(\omega_0)$ 与 Ω , (b) $P_s(\Omega)$ 与 Ω

时,能产生随机共振现象,输出功率谱值为 $P_s(\omega_0) = 0.5602$,如图 6(a)所示.给系统作用第二驱动信号,其参数 $B = 0.08, \mu\Omega = 0.06\pi$ 时,双稳系统的随机共振效应明显增强,输出功率谱在频率 ω_0 处的幅值 $P_s(\omega_0) = 0.625 > 0.5602$,如图 6(b)所示.

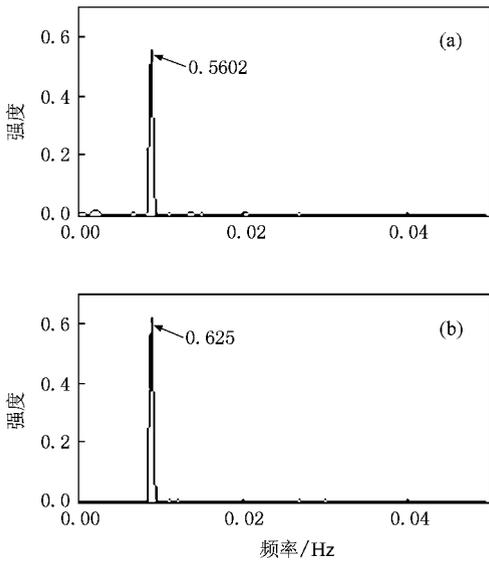


图 6 $a = 0.9, \omega_0 = 0.018\pi$ 时随机共振功率谱 (a) 单周期, (b) 双周期

保持系统参数 a 值不变,另选取一组参数 $A = 0.25, \omega_0 = 0.01\pi, D = 2.2$,当 $B = 0$ 时,也能产生随机共振现象,输出功率谱值为 $P_s(\omega_0) = 0.5495$,如图 7(a)所示.给系统作用第二驱动信号,当参数 B

$= 0.05, \mu\Omega = 0.06\pi$ 时,输出功率谱在频率 ω_0 处的幅值 $P_s(\omega_0) = 0.6605 > 0.5495$,如图 7(b)所示.仿真结果表明,对不同参数 a 的双稳系统,在系统处于随机共振状态下要产生频率吸收和共振增强,则需要采用不同的第二驱动频率.

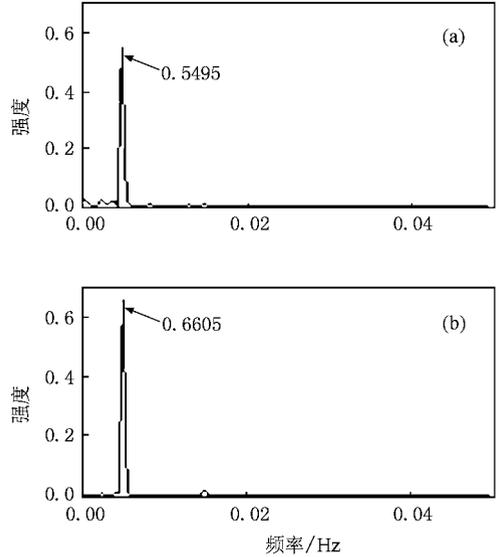


图 7 $a = 0.9, \omega_0 = 0.01\pi$ 时随机共振功率谱 (a) 单周期, (b) 双周期

5. 结 论

双稳系统在噪声作用下存在着两种不同层级的运动:一是在单一势阱平衡点附近的随机波动,这是局部的、低层级的运动;二是越过势垒在双稳系统的两势阱之间的跃迁运动,这是全局的、高层级运动.这两种运动具有不同的特征时间尺度,且低层级的随机波动影响着高层级的跃迁.

给双稳系统施加双周期驱动信号,当第一驱动信号的时间尺度与高层级的跃迁相匹配时,则能产生传统的随机共振;再加第二驱动信号并使其时间尺度与低层级的随机波动相匹配,则在双稳系统中存在着频率吸收和随机共振加强等现象.这为进一步研究随机共振的产生机理,特别是随机共振的控制提供了新的理论方法.双稳系统研究的成果也能很方便地推广到多稳和其他复杂的系统.



- [1] Benzi R , Suter A , Vulpiana A 1981 *Physica A* **14** 1453 4574
- [2] Gammaitoni L , Hanggi P , Jung P , Marchesoni F 1998 *Rev. Mod. Phys.* **70** 223
- [3] Babinec P 1997 *Phys. Lett. A* **225** 179
- [4] Nozaki D , Mar D J , Grigg P , Collins J J 1999 *Phys. Rev. Lett.* **82** 2402
- [5] Qin G R , Gong D C , Hu G , Wen X D 1992 *Acta Phys. Sin.* **41** 360 (in Chinese] 秦光戎、龚德纯、胡 岗、温孝东 1992 物理学报 **41** 360]
- [6] Zhu H J , Li R , Wen X D 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2404 (in Chinese] 祝恒江、李 蓉、温孝东 2003 物理学报 **52** 2404]
- [7] Lin M , Huang Y M 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3277 (in Chinese] 林敏、黄咏梅 2006 物理学报 **55** 3277]
- [8] Gammaitoni L , Löcher M , Bulsara A R , Hanggi P , Neff J , Wiesenfeld K , Ditto W L , Inchiosa M E 1999 *Phys. Rev. Lett.* **82** 4574
- [9] Löcher M , Inchiosa M E , Neff J , Bulsara A R , Wiesenfeld K , Gammaitoni L , Hanggi P , Ditto W L 2000 *Phys. Rev. E* **62** 317
- [10] Schmid G , Hanggi P 2005 *Physica A* **351** 95
- [11] Lin M , Mao Q M , Zheng Y J , Li D S 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 5021 (in Chinese] 林 敏、毛谦敏、郑永军、李东升 2007 物理学报 **56** 5021]
- [12] Lin M , Huang Y M 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 6173 (in Chinese] 林敏、黄咏梅 2007 物理学报 **56** 6173]
- [13] Lin M , Fang L M , Zhu R G 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 2638 (in Chinese] 林 敏、方利民、朱若谷 2008 物理学报 **57** 2638]
- [14] Hu G 1994 *Stochastic Forces and Nonlinear Systems* (Shanghai : Shanghai Scientific and Technological Education Publishing House) (in Chinese] 胡 岗 1994 随机力与非线性系统(上海 : 上海科技教育出版社)]

Time scales of the evolution in bistable system and the reinforcement of stochastic resonance^{*}

Lin Min[†] Fang Li-Min

(College of Metrology and Measurement Engineering , China Jiliang University , Hangzhou 310018 , China)

(Received 20 July 2008 ; revised manuscript received 14 October 2008)

Abstract

Stochastic fluctuations in the single potential well and probability transitions between the two potential wells exist in the bistable system under the action of noise. These two kinds of movements in different hierarchies have different time scales, and the fluctuations in the low hierarchy potential well have effects on the transitions between high hierarchy potential wells. When time scale of the first input periodical signal and noise-induced probability transitions between the potential wells achieves stochastic synchronization, the phenomenon of stochastic resonance happens. When the second driven periodic signal, the time scales of which matches that of the intrawell fluctuations, is introduced into the system, the phenomenon of frequency absorption happens and the effect of stochastic resonance in bistable system is reinforced.

Keywords : stochastic resonance , bistable system , hierarchy , time scale

PACC : 0250 , 0545 , 0540

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 50675214) and the Natural Science Foundation of Zhejiang Province , China (Grant No. Y7080111).

[†] E-mail : linm@cjlu.edu.cn