第 58 卷 第 4 期 2009 年 4 月
1000-3290/2009/58(04)/2159-05

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.58,No.4,April,2009

修正的 F 展开法和推广的 KdV 方程新的孤波解和精确解

梁立为† 李兴东 李玉霞

(酒泉卫星发射中心,酒泉 732750)

(2008 年 7 月 23 日收到;2008 年 9 月 28 日收到修改稿)

对 F 展开法进行了修正,附加含任意常数的负指数项,解决了精确解的奇点问题.用此方法讨论推广的 KdV 方程的周期波解.在特别情形下,获得了新的 Jacobi 椭圆函数精确解、孤波解和三角函数解.

关键词:齐次平衡原则,F 展开法,推广的 KdV 方程,孤波解

PACC:0340K,9260X,0290

1.引 言

推广的 KdV 方程是大气科学中在大气长波近似下与正压非线性涡度方程等价的长波运动控制方程.

$$\alpha \frac{\partial u}{\partial t} + \alpha u \frac{\partial u}{\partial x} + \gamma \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \varepsilon \frac{\partial^5 u}{\partial x^5} = 0, \tag{1}$$

其中 $\alpha = L^2 \Phi/\beta D^5$,$\gamma = (U_0 - \beta D^2) L^2/\beta D^4$,$\varepsilon = D^2/L^2$.(1)式中 u 为扰动流函数,β 为纬度因子(Rossby 参数),U_0 为基流强度,Φ 是流函数尺度(振幅),D 和 L 分别是流体深度和水平尺度,$D/L \ll 1$.详细物理背景见文献[1—4].推广的 KdV 方程(1)具有五阶导数项,已有的研究文献给出的精确解很少.陈忠明等在文献[3]中得到方程(1)的近似解.特别是戴新刚在文献[4]中得到正压大气非线性方程中含有强迫项等一些特征,所以方程(1)精确解的求解非常重要.近几年来,对非线性发展方程的精确解有很多求解方法,如齐次平衡法[5—7]、Jacobi 椭圆函数法[8]、F 展开法[9—13]等.F 展开法是通过复杂的非线性偏微分方程和辅助常微分方程之间的关系来求精确解.本文对 F 展开法进行修正扩展,借助计算机代数系统 Maple,求出推广的 KdV 方程的一系列新形式的精确周期解和行波解,当 $m \to 0$ 和 1 时,这些解可退化为相应的 Jacobi 椭圆函数精确解、孤波解和三角函数解.

2.修正的 F 展开法

考虑如下形式关于 x,t 的非线性偏微分方程:

$$H(u, u_t, u_x, u_{xt}, u_{xx}, \cdots) = 0. \tag{2}$$

设行波解

$$u(x,t) = f(\xi),$$
$$\xi = k(x - \omega t) + \xi_0, \tag{3}$$

其中 k,ω 是待定常数,ξ_0 是任意常数.将(3)式代入(2)式,可得关于 $f(\xi)$ 的常微分方程

$$H(f, f', f'', \cdots) = 0, \tag{4}$$

其中

$$f' = \mathrm{d}f/\mathrm{d}\xi,$$
$$f'' = \mathrm{d}^2 f/\mathrm{d}\xi^2.$$

假设方程(4)具有如下形式解:

$$f(\xi) = \sum_{i=-m}^{-1} a_i (F(\xi) + C_0)^i + \sum_{i=0}^{m} a_i F^i(\xi), \tag{5}$$

其中 $F(\xi)$ 满足如下形式的常微分方程:

$$F'^2(\xi) = \sum_{j=0}^{n} q_i F^j(\xi). \tag{6}$$

这里 $a_i (i = -m, -m+1, \cdots, m)$ 和 $q_i (i = 0, 1, \cdots, n)$ 为待定常数.根据齐次平衡原则,平衡(4)式中最高阶导数项和最高阶非线性项,得到 m,n 关系式.

† E-mail:dariusllw@163.com

从而把(5),(6)式代入(4)式,得到关于 a_i,k,ω 的超定偏微分方程组,再利用 Maple 软件求解该方程组,可得非线性偏微分方程新的精确解.

3. 推广的 KdV 方程的精确解

将(3)式代入方程(1)得

$$-\alpha\omega kf' + \alpha kff' + \gamma kf' - k^3 f''' - \varepsilon k^5 f^{(5)} = 0. \tag{7}$$

对(7)式积分一次得

$$\alpha\omega f - \frac{\alpha}{2}f^2 - \gamma f + k^2 f'' + \varepsilon k^4 f'''' + C = 0, \tag{8}$$

其中 C 为常数.令 $A=\alpha\omega-\gamma$,$B=\alpha/2$,$D=k^2$,$E=\varepsilon k^4$,可得

$$Af - Bf^2 + Df'' + Ef'''' + C = 0. \tag{9}$$

利用齐次平衡原则可知,(5),(6)式中的 $m=4$,$n=4$,即

$$f(\xi) = \sum_{i=-4}^{-1} a_i(F(\xi)+c_0)^i + \sum_{i=0}^{4} a_i F^i(\xi), \tag{10}$$

$$F'^2(\xi) = q_0 + q_2 F^2(\xi) + q_4 F^4(\xi). \tag{11}$$

将(10),(11)式代入(9)式可得关于 a_i,A,C,D 的超定方程组(略).解此方程组可得三组解.

第一组解为

$$a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_{-1} = a_{-3} = c_0 = 0,$$

$$a_{-2} = \frac{R_1 q_0 E}{B},$$

$$a_{-4} = \frac{840 E q_0^2}{B},$$

$$A = \frac{1}{58800}E(-73920 R_1 q_2 + 33868800 q_2^2 - 39513600 q_0 q_4 + 31 R_1^2),$$

$$C = -\frac{1}{70}E^2 q_4 q_0(-6720 R_1 q_2 + 1411200 q_0 q_4 + 13 R_1^2),$$

$$D = \frac{13}{140}E(R_1 - 560 q_2),$$

$$u(x,t) = a_{-4}F^{-4}\left(\sqrt{D}x - \sqrt{D}\frac{A+\gamma}{\alpha}t\right) + a_{-2}F^{-2}\left(\sqrt{D}x - \sqrt{D}\frac{A+\gamma}{\alpha}t\right). \tag{12}$$

第二组解为

$$a_0 = a_1 = a_3 = a_{-1} = a_{-2} = a_{-3} = a_{-4} = c_0 = 0,$$

$$a_2 = \frac{R_1 q_4 E}{B},$$

$$a_4 = \frac{840 E q_4^2}{B},$$

$$A = \frac{1}{58800}E(-73920 R_1 q_2 + 33868800 q_2^2 - 39513600 q_0 q_4 + 31 R_1^2),$$

$$C = -\frac{1}{70}E^2 q_4 q_0(-6720 R_1 q_2 + 13 R_1^2 - 39513600 q_0 q_4 + 31 R_1^2),$$

$$D = \frac{13}{140}E(R_1 - 560 q_2),$$

$$u(x,t) = a_2 F^2\left(\sqrt{D}x - \sqrt{D}\frac{A+\gamma}{\alpha}t\right) + a_4 F^4\left(\sqrt{D}x - \sqrt{D}\frac{A+\gamma}{\alpha}t\right). \tag{13}$$

第三组解为

$$a_0 = a_1 = a_3 = a_{-1} = a_{-3} = c_0 = 0,$$

$$a_2 = \frac{140 q_4 E(52 q_2 + R_2)}{13B},$$

$$a_4 = \frac{840 E q_4^2}{B},$$

$$a_{-2} = \frac{140 q_0 E(52 q_2 + R_2)}{13B},$$

$$a_{-4} = \frac{840 E q_0^2}{B},$$

$$A = \frac{1}{507}E(-3640 R_2 q_2 + 18928 q_2^2 - 340704 q_0 q_4 + 31 R_2^2),$$

$$D = ER_2,$$

$$C = -\frac{1680}{169B}E^2 q_4 q_0 \times (2184 R_2 q_2 + 137904 q_0 q_4 + 19 R_2^2),$$

$$u(x,t) = a_{-4}F^{-4}\left(\sqrt{D}x - \sqrt{D}\frac{A+\gamma}{\alpha}t\right) + a_{-2}F^{-2}\left(\sqrt{D}x - \sqrt{D}\frac{A+\gamma}{\alpha}t\right) + a_2 F^2\left(\sqrt{D}x - \sqrt{D}\frac{A+\gamma}{\alpha}t\right) + a_4 F^4\left(\sqrt{D}x - \sqrt{D}\frac{A+\gamma}{\alpha}t\right). \tag{14}$$

(14)式中 R_1,R_2 分别是下列方程的根

$$31 z^3 - 18966528000 q_0 q_2 q_4 + (19756800 q_0 q_4 + 22579200 q_2^2)z - 52080 q_2 z^2 = 0,$$

$$31z^3 - 50618880q_0q_2q_4 + 1406080q_2^3 - (681408q_0q_4 + 56784q_2^2)z = 0.$$

以第三组解为例，取定不同的 q_0, q_2, q_4 对应不同的 Jacobi 椭圆函数和组合 Jacobi 椭圆函数解，从而获得方程不同周期解的形式.

例如取定

$$q_0 = 1,\quad q_2 = -(1+m^2),\quad q_4 = m^2,$$

则

$$F(x,t) = \mathrm{sn}(x,t),$$

(14)式化为

$$\begin{aligned}u(x,t) &= a_{-4}\mathrm{sn}^{-4}\left(\sqrt{D}x - \sqrt{D}\frac{A+\gamma}{\alpha}t\right)\\&+ a_{-2}\mathrm{sn}^{-2}\left(\sqrt{D}x - \sqrt{D}\frac{A+\gamma}{\alpha}t\right)\\&+ a_2\mathrm{sn}^2\left(\sqrt{D}x - \sqrt{D}\frac{A+\gamma}{\alpha}t\right)\\&+ a_4\mathrm{sn}^4\left(\sqrt{D}x - \sqrt{D}\frac{A+\gamma}{\alpha}t\right).\end{aligned}\tag{15}$$

考虑极限情形，当 $m\to 0$ 时，方程(15)的三角函数解为

$$u(x,t) = \frac{105}{169\varepsilon\alpha}\sin^{-4}\left[\pm\frac{1}{\sqrt{52\varepsilon}}\left(x - \left(\frac{36}{169\varepsilon\alpha} + \frac{\gamma}{\alpha}\right)t\right)\right].\tag{16}$$

取定

$$q_0 = (m^2 - 1),\quad q_2 = (2 - m^2),\quad q_4 = -1,$$

则

$$F(x,t) = \mathrm{dn}(x,t),$$

(16)式化为

$$\begin{aligned}u(x,t) &= a_{-4}\mathrm{dn}^{-4}\left(\sqrt{D}x - \sqrt{D}\frac{A+\gamma}{\alpha}t\right)\\&+ a_{-2}\mathrm{dn}^{-2}\left(\sqrt{D}x - \sqrt{D}\frac{A+\gamma}{\alpha}t\right)\\&+ a_2\mathrm{dn}^2\left(\sqrt{D}x - \sqrt{D}\frac{A+\gamma}{\alpha}t\right)\\&+ a_4\mathrm{dn}^4\left(\sqrt{D}x - \sqrt{D}\frac{A+\gamma}{\alpha}t\right).\end{aligned}\tag{17}$$

考虑极限情形，当 $m\to 1$ 时，方程(17)的孤子解为

$$\begin{aligned}u(x,t) &= \frac{105}{2704\varepsilon\alpha}\mathrm{sech}^{-4}\left[\pm\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{2704\varepsilon}}\left(x - \left(-\frac{211}{10816\varepsilon\alpha} + \frac{\gamma}{\alpha}\right)t\right)\right]\\&- \frac{105}{676\varepsilon\alpha}\mathrm{sech}^{-2}\left[\pm\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{2704\varepsilon}}\left(x - \left(-\frac{211}{10816\varepsilon\alpha} + \frac{\gamma}{\alpha}\right)t\right)\right]\\&- \frac{105}{676\varepsilon\alpha}\mathrm{sech}^{2}\left[\pm\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{2704\varepsilon}}\left(x - \left(-\frac{211}{10816\varepsilon\alpha} + \frac{\gamma}{\alpha}\right)t\right)\right]\\&+ \frac{105}{2704\varepsilon\alpha}\mathrm{sech}^{4}\left[\pm\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{2704\varepsilon}}\left(x - \left(-\frac{211}{10816\varepsilon\alpha} + \frac{\gamma}{\alpha}\right)t\right)\right].\end{aligned}\tag{18}$$

其他情形不再讨论.

4. KdV 方程的精确解

方程(1)中 D, L 分别是流体深度和水平尺度，$D/L \ll 1$，$\varepsilon = D^2/L^2 \ll 1$，故令 $\varepsilon \to 0$. 将(3)式代入方程(1)得

$$-\alpha\omega kf' + \alpha kff' + \gamma kf' - k^3f''' = 0.\tag{19}$$

对(19)式积分一次得

$$\alpha\omega f - \frac{\alpha}{2}f^2 - \gamma f + k^2f'' + C = 0.\tag{20}$$

同样，令 $A = \alpha\omega - \gamma, B = \alpha/2, D = k^2$，可得

$$Af - Bf^2 + Df'' + C = 0.\tag{21}$$

利用齐次平衡原则可知 $m = 2, n = 4$，即

$$f(\xi) = \sum_{i=-2}^{-1}a_i(F(\xi) + c_0)^i + \sum_{i=0}^{2}a_iF^i(\xi),\tag{22}$$

$$F'^2(\xi) = q_0 + q_2F^2(\xi) + q_4F^4(\xi).\tag{23}$$

将(22)，(23)式代入(21)式可得关于 a_i, A, C, D 的超定方程组(略). 解此方程组可得两组解.

第一组解为

$$a_0 = a_0,$$

$$a_1 = a_2 = 0,$$

$$D = D,$$

$$a_{-1} = -\frac{6DR_3(2q_4c_0^2 + q_2)}{B},$$

$$a_{-2} = \frac{6D(q_2c_0^2 + 2q_0)}{B},$$

$$A = -\frac{1}{2q_4c_0^2 + q_2}(20Dq_2q_4c_0^2 - 4Ba_0q_4c_0^2 + Dq_2^2 - 2Ba_0a_2 + 36q_0q_4),$$

$$C = -\frac{1}{B(2q_4c_0^2 + q_2)}(2B^2a_0^2q_4c_0^2 + 24D^2c_0^2q_2^2q_4 - 20BDa_0q_2q_4c_0^2 + 96D^2q_4^2c_0^2 + B^2a_0^2q_2 + B^2a_0^2q_2 - 36BDa_0q_0q_4 - BDa_0q_2^2 + 96D^2q_0q_2q_4),$$

$$u(x,t) = a_{-2}\left[F\left(\sqrt{D}x - \sqrt{D}\frac{A+\gamma}{\alpha}t\right) + c_0\right]^{-2} + a_0 + a_{-1}\times\left[F\left(\sqrt{D}x - \sqrt{D}\frac{A+\gamma}{\alpha}t\right) + c_0\right]^{-1}. \quad (24)$$

这里 c_0 是下列方程的根:

$$q_4z^4 - q_0 = 0.$$

第二组解为

$$a_0 = a_0,$$

$$a_1 = a_2 = a_{-2} = 0,$$

$$D = D,$$

$$a_{-1} = -\frac{3Dc_0(2q_4c_0^2 + q_2)}{B},$$

$$A = 2Ba_0 - 6Dq_4c_0^2 - Dq_2,$$

$$C = \frac{1}{B}(6BDa_0q_4c_0^2 + 6D^2c_0^2q_2q_4 + 12D^2q_0q_4 - B^2a_0^2 + BDa_0q_2),$$

$$u(x,t) = a_{-1}\times\left[F\left(\sqrt{D}x - \sqrt{D}\frac{A+\gamma}{\alpha}t\right) + c_0\right]^{-1} + a_0. \quad (25)$$

这里 c_0 是下列方程的根:

$$q_4z^4 + q_2z^2 + q_0 = 0.$$

以第二组解为例,取定不同 q_0, q_2, q_4 对应不同的 Jacobi 椭圆函数和组合的 Jacobi 椭圆函数解,从而获得方程不同周期解的形式.

例如取定

$$q_0 = 1,$$

$$q_2 = -(1 + m^2),$$

$$q_4 = m^2,$$

则

$$F(x,t) = \mathrm{sn}(x,t),$$

(25)式化为

$$u(x,t) = \pm\left[\mathrm{sn}\left(\sqrt{D}x - \sqrt{D}\frac{2Ba_0 - 6Dm^2 + D(1+m^2) + \gamma}{\alpha}t\right) \mp 1\right]^{-1}\frac{3D(m^2-1)}{B} + a_0. \quad (26)$$

考虑极限情形,当 $m\to 0$ 时,方程的三角函数解为

$$u(x,t) = \pm\left[\sin\left(kx - k\frac{\alpha a_0 + k^2 + \gamma}{\alpha}t\right) \mp 1\right]^{-1}\frac{-6k^2}{\alpha} + a_0. \quad (27)$$

取定

$$q_0 = (m^2 - 1),$$

$$q_2 = (2 - m^2),$$

$$q_4 = -1,$$

则

$$F(x,t) = \mathrm{dn}(x,t),$$

(25)式化为

$$u(x,t) = \pm\frac{3Dm^2}{B}\times\left[\mathrm{dn}\left(\sqrt{D}x - \sqrt{D}\frac{A+\gamma}{\alpha}t\right) \pm c_0\right]^{-1}. \quad (28)$$

考虑极限情形,当 $m\to 1$ 时,方程的孤子解为

$$u(x,t) = \pm\frac{6k^2}{\alpha}\left[\mathrm{sech}\left(kx - k\frac{\pm\alpha + 5k^2 + \gamma}{\alpha}t\right) \pm 1\right]^{-1}. \quad (29)$$

其他情形不再讨论.

5. 结　　论

本文用修正的 F 展开法求得推广的 KdV 方程的周期解，在极限情形下获得了孤子解和三角函数解，这些都是新得到的解．修正的 F 展开法对许多非线性方程都是有效的，例如物理学中的非线性 Kelin-Gordon 方程、KP 方程和 Boussinesq 方程等．

[1] Lü M Z, Peng Y Q 1990 *Dynamical Meteorology* (Beijing: Meteorology Press) p211 (in Chinese) [吕美仲、彭永清 1990 动力气象(北京:气象出版社)第 211 页]

[2] Zhou W C, Zhu Q G 1999 *J. Nanjing Ins. Meteor.* **22** 279 (in Chinese) [周伟灿、朱乾根 1999 南京气象学院学报 **22** 279]

[3] Chen Z M, Tao J 1998 *J. Chengdu Inst. Meteor.* **13** 127 (in Chinese) [陈忠明、陶　杰 1998 成都气象学院学报 **13** 127]

[4] Wang P, Dai X G 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 4961 (in Chinese) [汪　萍、戴新刚 2005 物理学报 **54** 4961]

[5] Wang M L, Li Z B 1999 *J. Lanzhou Univ.* **35** 8 (in Chinese) [王明亮、李志斌 1999 兰州大学学报 **35** 8]

[6] Wang M L, Bai X 2000 *J. Lanzhou Univ.* **36** 12 (in Chinese) [王明亮、白　雪 2000 兰州大学学报 **36** 12]

[7] Fan E G, Zhang H Q 1999 *J. Math. Phys.* **3** 286 (in Chinese) [范恩贵、张鸿庆 1999 数学物理学报 **3** 286]

[8] Wu H Y, Zhang L 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 3312 (in Chinese) [吴海燕、张　亮 2008 物理学报 **57** 3312]

[9] Zhou Y B, Wang M L 2003 *Phys. Lett.* A **308** 31

[10] Wang M L, Zhou Y B 2003 *Phys. Lett.* A **318** 84

[11] Wang M L, Li X Z 2005 *Chaos Soliton. Fract.* **24** 1257

[12] Wang M L, Li X Z 2006 *Chaos Soliton. Fract.* **27** 477

[13] Li X Z, Wang M L 2007 *Phys. Lett.* A **361** 115

The extended F-expansion method and new exact solutions of the generalized KdV equation

Liang Li-Wei†　Li Xing-Dong　Li Yu-Xia

(*Satellite Launch Center of Jiuquan, Jiuquan* 732750, *China*)

(Received 23 July 2008; revised manuscript received 28 September 2008)

Abstract

In this paper, the F-expansion method is revised by adding a term with negative index with constant c, then the irregular wave solutions are avoided. By using this method, different new periodic wave solutions expressed by the generalized KdV equation are obtained. In the special cases, these periodic wave solutions degenerate to the corresponding Jacobi elliptic function solutions, solitary wave solutions or trigonometric function solutions.

Keywords: homogeneous balance principle, F-expansion method, generalized KdV equation, solitary wave solution

PACC: 0340K, 9260X, 0290

† E-mail: dariusllw@163.com