第 58 卷 第 4 期 2009 年 4 月
1000-3290/2009/58(04)/2164-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.58,No.4,April,2009

质量和频率均含时的耦合谐振子的严格波函数*

凌瑞良† 冯金福

(常熟理工学院物理系,常熟 215500)

(2008 年 7 月 26 日收到;2008 年 8 月 20 日收到修改稿)

通过坐标和动量变换,在去掉系统哈密顿量耦合项的基础上,采用试探函数方法求得了质量和频率均随时间变化且具有耦合的两谐振子的严格波函数.

关键词:耦合谐振子,去耦合,坐标与动量变换,试探函数

PACC:0365

1. 引 言

多年来,出于基础理论和现代实验研究的要求,含时谐振子系统的量子行为已被广泛研究并取得可喜成果.该系统的特点是其哈密顿量显含时间,具体可体现在谐振子的质量或频率随时间变化,或者体现在谐振子所受的阻尼系数或所处的外场随时间变化[1—12].最近有人研究了多维耦合受迫量子谐振子的问题[13],并明确指出多维耦合受迫量子谐振子的理论是求解复杂系统的理论基础,在量子理论的诸多领域(如原子与分子物理、固体物理、量子场论、量子统计和量子光学、量子电子学中)都有广泛应用[14—17].该系统的特点是其哈密顿量有耦合项存在.文献[13]的工作很有意义,它把谐振子的量子理论研究推进了一步,又为诸多物理学新领域提供了可靠理论支撑.如何把以上两个特点结合在一起的系统的研究,至今尚未见报道.鉴于此,本文试图进一步对质量和频率均随时变化的耦合谐振子的量子力学问题作仔细研究.

2. 耦合谐振子的哈密顿量与去耦合

为方便计,仅考虑两个质量和频率均含时的耦合谐振子系统,其哈密顿量为

$$H=\frac{p_1^2}{2m_1(t)}+\frac{p_2^2}{2m_2(t)}+\frac{1}{2}m_1(t)\omega_1^2(t)x_1^2+\frac{1}{2}m_2(t)\omega_2^2(t)x_2^2+\lambda x_1x_2+\gamma p_1p_2,\tag{1}$$

式中 λ 和 γ 分别为坐标和动量的耦合强度,显然欲直接由(1)式所决定的哈密顿量求解薛定谔方程的困难是不可想象的.要解决问题,首先得把(1)式中的两项交叉耦合项去掉.为此作如下的坐标和动量变换:

$$\begin{aligned}X_1&=\sqrt{2}/2(x_1+x_2),\\X_2&=\sqrt{2}/2(x_2-x_1),\\P_1&=\sqrt{2}/2(p_1+p_2),\\P_2&=\sqrt{2}/2(p_2-p_1);\end{aligned}\tag{2}$$

即

$$\begin{aligned}x_1&=\sqrt{2}/2(X_1-X_2),\\x_2&=\sqrt{2}/2(X_1+X_2),\\p_1&=\sqrt{2}/2(P_1-P_2),\\p_2&=\sqrt{2}/2(P_1+P_2).\end{aligned}\tag{3}$$

把(3)式代入(1)式得

$$\begin{aligned}H=&\frac{(P_1-P_2)^2}{4m_1(t)}+\frac{(P_1+P_2)^2}{4m_2(t)}\\&+\frac{m_1(t)\omega_1^2(t)}{4}(X_1-X_2)^2+\frac{m_2(t)\omega_2^2(t)}{4}(X_1+X_2)^2\\&+\frac{\lambda}{2}(X_1^2-X_2^2)+\frac{\gamma}{2}(P_1^2-P_2^2).\end{aligned}\tag{4}$$

这里为保证能有效去掉耦合项,令 $m_1(t)=m_2(t)=m(t)$,$\omega_1(t)=\omega_2(t)=\omega(t)$,于是有

* 江苏省自然科学基金(批准号:06KJB140001)资助的课题.

† E-mail:lrl@cslg.edu.cn

$$H = \frac{1}{2\mu_1(t)}P_1^2 + \frac{1}{2\mu_2(t)}P_2^2 + \frac{1}{2}\mu_1(t)\Omega_1^2(t)X_1^2 + \frac{1}{2}\mu_2(t)\Omega_2^2(t)X_2^2, \tag{5}$$

式中

$$\mu_1(t) = \frac{m(t)}{1+\gamma m(t)},$$

$$\mu_2(t) = \frac{m(t)}{1-\gamma m(t)}, \tag{6}$$

$$\Omega_1^2(t) = \frac{[m(t)\omega^2(t)+\lambda][1+\gamma m(t)]}{m(t)},$$

$$\Omega_2^2(t) = \frac{[m(t)\omega^2(t)-\lambda][1-\gamma m(t)]}{m(t)}. \tag{7}$$

并不难验证

$$[X_1, P_1] = [X_2, P_2] = \mathrm{i}\hbar \quad (\hbar = h/2\pi), \tag{8}$$

$$[X_1, P_2] = [X_2, P_1] = 0. \tag{9}$$

这样，由(5)式决定的哈密顿量可看成是由两个能沿用量子力学方法处理的无耦合项的谐振子，不过它们的质量和频率均含时且不相等.

3. 精确波函数的确定

迄今为止，关于变质量、变频率谐振子的量子精确求解已有诸如费曼路径积分法、Lewis-Riesenfeld 不变量法、含时幺正变换法、李代数法、广义线性量子变换法等多种方法，本文将采用一种比较传统的尝试函数(又称试探函数)方法来对由(5)式决定的薛定谔方程进行精确量子力学求解[18—20].

为行文方便，(5)式可写成

$$H = H_1 + H_2, \tag{10}$$

$$H_1 = \frac{P_1^2}{2\mu_1(t)} + \frac{1}{2}\mu_1(t)\Omega_1^2(t)X_1^2, \tag{11}$$

$$H_2 = \frac{P_2^2}{2\mu_2(t)} + \frac{1}{2}\mu_2(t)\Omega_2^2(t)X_2^2. \tag{12}$$

(11)和(12)式对应的薛定谔方程分别为

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_1(X_1,t) = \hat{H}_1\psi_1(X_1,t); \tag{13}$$

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_2(X_2,t) = \hat{H}_2\psi_2(X_2,t). \tag{14}$$

经过对标准谐振子，即质量和频率均不变的简单线性谐振子本征函数和相应薛定谔方程普遍解的结构特征分析，可尝试把由(13)，(14)式决定的变质量、变频率谐振子薛定谔方程的精确量子解统一写成如下形式：

$$\psi(X,t) = \frac{\psi_n(y)}{\sqrt{\rho}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi(X,t)}, \tag{15}$$

式中 $y = X/\rho$，$\psi_n(y) = 1/\sqrt{2^n n!\pi^{1/2}}H_n(y)\mathrm{e}^{-y^2/2}$，$\rho$ 是一个与时间有关的参数，即 $\rho=\rho(t)$，$H_n(y)$是宗量为 y 的厄米多项式，$\phi(X,t)$是一个待定函数. 这样 $\psi_n(y)$ 实际可看成是一个具有单位质量和单位频率且 $\hbar$ 取 1 的谐振子的本征函数，即

$$\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{2}y^2\right)\psi_n(y) = \left(n+\frac{1}{2}\right)\psi_n(y). \tag{16}$$

把(15)式分别对时间求一阶导数，对空间求二阶导数有

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(X,t) = \frac{\psi_n(y)}{\sqrt{\rho}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi(X,t)}\left[\hbar\dot{\phi} - \frac{1}{2}\mathrm{i}\hbar\frac{\dot{\rho}}{\rho}\right] - \frac{\mathrm{i}\hbar}{\sqrt{\rho}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi(X,t)}\frac{\partial\psi_n(y)}{\partial y}\left(\frac{\dot{\rho}}{\rho^2}X\right), \tag{17}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\psi(X,t)}{\partial X^2} = &-\mathrm{i}\frac{\partial^2\phi}{\partial X^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}\frac{\psi_n(y)}{\sqrt{\rho}} - \left(\frac{\partial\phi}{\partial X}\right)^2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}\frac{\psi_n(y)}{\sqrt{\rho}} \\ &- 2\mathrm{i}\frac{\partial\phi}{\partial X}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}\frac{1}{\rho\sqrt{\rho}}\frac{\partial\psi_n(y)}{\partial y} + \frac{1}{\rho^2\sqrt{\rho}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}\frac{\partial^2\psi_n(y)}{\partial y^2},\end{aligned} \tag{18}$$

把(17)和(18)式同时代入(13)或(14)式，并用(16)式，令实部相等可得

$$\hbar\dot{\phi} = \frac{\hbar^2}{\mu(t)\rho^2}\left(n+\frac{1}{2}\right) + \frac{\hbar^2}{2\mu(t)}\left(\frac{\partial\phi}{\partial X}\right)^2 - \frac{\hbar^2X^2}{2\mu(t)\rho^4} + \frac{1}{2}\mu(t)\Omega^2(t)X^2. \tag{19}$$

再令虚部相等可得

$$\left[\hbar\rho\frac{\partial^2\phi}{\partial X^2} + \mu(t)\dot{\rho}\right]\psi_n(y) = \left[-2\hbar\frac{\partial\phi}{\partial X} - \frac{2\mu(t)\dot{\rho}}{\rho}X\right]\frac{\partial\psi_n(y)}{\partial y}. \tag{20}$$

为了进一步简化(20)式，下面考察 $\psi_n(y)$对空间坐标 y 的偏导数，即

$$\frac{\partial\psi_n(y)}{\partial y} = 2nN_nH_{n-1}(y)\mathrm{e}^{-y^2/2} - y\psi_n(y), \tag{21}$$

其中用到厄米多项式关系公式

$$H_n'(y) = 2nH_n(y), \tag{22}$$

归一化系数关系式

$$N_n = 1/\sqrt{2n}\cdot N_{n-1}. \tag{23}$$

由(16)式可知，这里的归一化系数为

$$N_n = 1/\sqrt{\pi^{1/2}2^n n!}. \tag{24}$$

把(23)式代入(21)式,得

$$\frac{\partial\psi_n(y)}{\partial y} = \sqrt{2n}\psi_{n-1}(y) - y\psi_n(y). \tag{25}$$

再把(25)式代入(20)式,可得

$$\left[\hbar\rho\frac{\partial^2\phi}{\partial X^2} + \mu(t)\dot{\rho}\right]\psi_n(y) = \left[-2\hbar\frac{\partial\phi}{\partial X} - \frac{2\mu(t)\dot{\rho}}{\rho}X\right] \times\left[\sqrt{2n}\psi_{n-1}(y) - y\psi_n(y)\right]. \tag{26}$$

(26)式两边同乘上 $\psi_{n-1}(y)$,并利用波函数的正交归一特性可得

$$\left[-2\hbar\frac{\partial\phi}{\partial X} - \frac{2\mu(t)\dot{\rho}}{\rho}X\right] = 0, \tag{27}$$

即

$$\hbar\frac{\partial\phi}{\partial X} = -\frac{\mu(t)\dot{\rho}}{\rho}X. \tag{28}$$

(19)式与(28)式是待定函数 $\phi(X,t)$必须满足的两个关键方程,由它们的自洽性可得

$$-\frac{\dot{\mu}(t)\dot{\rho}}{\rho}X - \frac{\mu(t)(\rho\ddot{\rho}-\dot{\rho}^2)}{\rho^2}X = \frac{\hbar^2}{\mu(t)}\frac{\partial\phi}{\partial X}\frac{\partial^2\phi}{\partial X^2} - \frac{\hbar^2}{\mu(t)\rho^4}X + \mu(t)\Omega^2(t)X. \tag{29}$$

反复利用(28)式,化简(29)式可得

$$\ddot{\rho} + \frac{\dot{\mu}(t)\dot{\rho}}{\mu(t)} + \Omega^2(t)\rho = \frac{\hbar^2}{\mu^2(t)\rho^3}. \tag{30}$$

(30)式就是决定 $\rho(t)$的辅助方程,这是一个很重要的方程. 在用 Feynman 路径积分方法和 Lewis-Riesenfeld 不变量方法求解含时薛定谔方程中都要用到所谓的辅助方程,但遗憾的是均未给出必要的说明和推导. 其实它就是这里的(30)式,从(30)式的由来,不难看出它具有一般性.

从(28)式可得到待定函数

$$\phi(X,t) = -\frac{\mu(t)\dot{\rho}}{2\hbar\rho}X^2 + \frac{G(t)}{\hbar}, \tag{31}$$

式中 $G(t)$仅是时间的函数. 把(31)式代入(19)式并利用辅助方程(30)式可得

$$\dot{G}(t) = \frac{\hbar}{\mu(t)\rho^2}\left(n+\frac{1}{2}\right), \tag{32}$$

于是,

$$G(t) = \int_0^t\frac{\hbar^2}{\mu(t)\rho^2}\left(n+\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}t', \tag{33}$$

把(33)式代入(31)式后再代入(15)式得

$$\psi(X,t) = 1/\sqrt{2^n n!\pi^{1/2}}\rho H_n\left(\frac{X}{\rho}\right) \times\exp\left[-\frac{X^2}{2\rho^2} - \mathrm{i}\left(-\frac{\mu(t)\dot{\rho}}{2\hbar\rho}X^2 + \int_0^t\frac{\hbar}{\mu(t)\rho^2}\left(n+\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}t'\right)\right], \tag{34}$$

(34)式只是(13)式与(14)式的相同形式解,若考虑到(13)式和(14)式中有不同的哈密顿量 H_1 和 H_2,则它们对应的精确量子解应是

$$\psi_1(X_1,t) = 1/\sqrt{2^{n_1}n_1!\pi^{1/2}\rho_1}H_{n_1}\left(\frac{X_1}{\rho_1}\right) \times\exp\left[-X_1^2/2\rho_1^2 - \mathrm{i}\left(-\frac{\mu_1(t)\dot{\rho}_1}{2\hbar\rho_1}X_1^2 + \int_0^t\frac{\hbar}{\mu_1(t)\rho_1^2}\left(n_1+\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}t'\right)\right] \quad (n_1 = 0,1,2,\cdots), \tag{35}$$

$$\psi_2(X_2,t) = 1/\sqrt{2^{n_2}n_2!\pi^{1/2}\rho_2}H_{n_2}\left(\frac{X_2}{\rho_2}\right) \times\exp\left[-X_2^2/2\rho_2^2 - \mathrm{i}\left(-\frac{\mu_2(t)\dot{\rho}_2}{2\hbar\rho_2}X_2^2 + \int_0^t\frac{\hbar}{\mu_2(t)\rho_2^2}\left(n_2+\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}t'\right)\right] \quad (n_2 = 0,1,2,\cdots), \tag{36}$$

式中的 ρ_1 与 ρ_2 由相应辅助方程

$$\ddot{\rho}_1 + \frac{\dot{\mu}_1(t)\dot{\rho}_1}{\mu_1(t)} + \Omega_1^2(t)\rho_1 = \frac{\hbar^2}{\mu_1^2(t)\rho_1^3}, \tag{37}$$

$$\ddot{\rho}_2 + \frac{\dot{\mu}_2(t)\dot{\rho}_2}{\mu_2(t)} + \Omega_2^2(t)\rho_2 = \frac{\hbar^2}{\mu_2^2(t)\rho_2^3}, \tag{38}$$

这样,根据量子力学理论由(5)式决定的薛定谔方程的精确解可表为

$$\psi(X_1,X_2,t) = \psi_1(X_1,t)\cdot\psi_2(X_2 t), \tag{39}$$

考虑到坐标和动量变换(2)式,最后可得到由(1)式所决定的质量和频率均随时间变化的耦合谐振子的严格波函数为

$$\psi(x_1,x_2,t) = \frac{1}{\sqrt{\rho_1\rho_2 n_1!n_2!2^{n_1+n_2}\pi}} \times H_{n_1}((x_1+x_2)/\sqrt{2}\rho_1) \times H_{n_2}((x_2-x_1)/\sqrt{2}\rho_2) \times\exp[-(x_1+x_2)^2/4\rho_1^2 - (x_2-x_1)^2/4\rho_2^2] \times\exp\left\{-\mathrm{i}\left[-\frac{\mu_1(t)\dot{\rho}_1}{2\hbar\rho_1}\frac{1}{2}(x_1+x_2)^2 + \int_0^t\frac{\hbar}{\mu_1(t)\rho_1^2}\left(n_1+\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}t'\right.\right.$$

$$+\frac{\mu_2(t)\dot{\rho}_2}{2\hbar\rho_2}\frac{1}{2}(x_2-x_1)^2$$
$$+\int_0^t\frac{\hbar}{\mu_2(t)\rho_2^2}\left(n_2+\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}t'\Big]\Big\}. \tag{40}$$

4. 结　　语

变质量变频率且具有坐标和动量耦合的两个量子谐振子系统的求解是个难题，因为它既涉及去耦合问题，又涉及含时薛定谔方程的求解问题．本文先用一种简单的坐标和动量的代数变换法，把耦合项去掉，使原系统的哈密顿量在新坐标和新动量空间呈现出两个独立的变质量变频率谐振子的哈密顿量．然后，再采用纯数学的尝试函数法，求得了变质量变频率且具有耦合的谐振子的严格波函数(40)式．关于(40)式的正确性可以按质量恒定、频率变化，质量变化、频率恒定，质量和频率均恒定，耦合系数等于零等多种特殊情况进行验证．另外，必须指出的是，在去耦合时，我们假定了两谐振子的质量、频率均相等，放弃此条件，如何去耦合、如何求解我们已另行研究．

[1] Ray J R, Reid J L 1979 *Phys. Lett.* **71** 317

[2] Peng H W 1980 *Acta Phys. Sin.* **29** 1084 (in Chinese) [彭恒武 1980 物理学报 **29** 1084]

[3] Zhu R Z 1981 *Acta Phys. Sin.* **30** 1410 (in Chinese) [朱如曾 1981 物理学报 **30** 1410]

[4] Colegrave R K, Abdalla M S 1982 *J. Phys.* A **15** 1549

[5] Abdalla M S, Colegrave R K 1985 *Phys. Rev.* A **32** 1958

[6] Oh H G, Lee H R, George T F, Um C I 1989 *Phys. Rev.* A **39** 5515

[7] Qian S W, Gu Z Y, Wang W 1991 *Phys. Lett.* A **157** 456

[8] Truscott W S 1993 *Phys. Rev. Lett.* **70** 1900

[9] Pedrosa I A 1997 *Phys. Rev.* A **55** 3219

[10] Ling R L 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1421 (in Chinese) [凌瑞良 2001 物理学报 **50** 1421]

[11] Wang P, Yang X E, Song X H 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2957 (in Chinese) [王　平、杨新娥、宋小会 2003 物理学报 **52** 2957]

[12] Li J F, Huang C J, Jiang Z F, Huang Z H 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 522 (in Chinese) [厉江帆、黄春佳、姜宗福、黄祖洪 2005 物理学报 **54** 522]

[13] Xu X W, Ren T Q, Liu S Y, Dong Y M, Zhao J D 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 535 (in Chinese) [徐秀玮、任廷琦、刘姝延、董永绵、赵继德 2006 物理学报 **55** 535]

[14] Wang X B, Yu S X, Zhang Y D 1994 *J. Phys.* A **27** 6563

[15] Wang X B, Zhang Y D, Pan J W 1996 *Chin. Phys. Lett.* **13** 401

[16] Brown L S 1991 *Phys. Rev. Lett.* **66** 526

[17] Yeon K H 1987 *Phys. Rev.* A **36** 5287

[18] Hirota R T 1973 *J. Math. Phys.* **14** 810

[19] Zhang W G 1998 *Acta Math. Appl. Sin.* **21** 249 (in Chinese) [张卫国 1998 应用数学学报 **21** 249]

[20] Liang M L 2002 *College Phys.* **21** 12

Exact wave function of the coupled harmonic oscillator with time-dependent mass and frequency*

Ling Rui-Liang†　Feng Jin-Fu

(*Department of Physics, Changshu Institute of Technology, Changshu* 215500, *China*)

(Received 26 July 2008; revised manuscript received 20 August 2008)

Abstract

Using the coordinate and momentum transformation theory and the trial function methed, the exact wave function of the coupled harmonic oscillator with time-dependent mass and frequency is derived.

Keywords: coupled harmonic oscillator, de-coupling, coordinate and momentum transformation, trial function

PACC: 0365

* Project supported by the Natural Science Foundation of Jiangsu Province, China (Grant No. 06KJB14001).

† E-mail: lrl@cslg.edu.cn