

基于模糊树模型的混沌时间序列预测^{*}

毛剑琴¹⁾ 姚 健^{1)†} 丁海山²⁾

1) 北京航空航天大学自动化科学与电气工程学院, 北京 100191)

2) 中国空空导弹研究院, 洛阳 471009)

(2008 年 6 月 26 日收到, 2008 年 8 月 15 日收到修改稿)

应用模糊树模型, 对混沌时间序列进行建模和预测. 该方法可以根据建模数据在空间中的分布信息, 基于二叉树结构自适应划分输入空间, 得到模糊子空间, 在与叶节点对应的子空间上建立线性函数作为模糊规则的后件, 用隶属度函数将各分片线性函数光滑连接, 最后得到一个精度比较高的非线性映射. 通过对 Mackey-Glass、Lorenz 和 Henon 混沌时间序列的建模和预测研究, 仿真结果表明, 该方法具有建模精度高、运行速度快、泛化能力强、预测步数多、适用范围广等优点.

关键词: 模糊树模型, 混沌时间序列, 预测

PACC: 0545

1. 引 言

由确定性的非线性动力系统产生的复杂的类似随机现象的行为称为混沌现象. 混沌现象是自然界普遍存在的一种不规则运动, 是一种来源于非线性动力系统内部的、本身固有的复杂的动态行为^[1]. 混沌时间序列是指对一个混沌系统进行观测采样而得到的一个单变量时间序列. 随着非线性混沌动力学的发展和混沌理论研究的不断深入, 混沌时间序列的建模和预测已经成为一个非常重要的研究方向, 并且在信号处理、自动控制和通信等利于中得到了广泛的应用, 成为近年来一个重要的研究热点. 目前, 已有多种方法被应用于混沌时间序列的预测中, 如全局预测法、局部预测法、自适应非线性滤波预测方法和基于神经网络的预测法^[2-10].

本文基于模糊树建模方法, 对混沌时间序列进行建模和预测, 并采用该方法对 Mackey-Glass、Lorenz 和 Henon 混沌时间序列进行了建模和预测仿真, 并与相关文献的方法进行了比较, 结果表明该方法具有建模精度高、运行速度快、泛化能力强、适用范围广的优点.

2. 模糊树建模方法

基于模糊集合理论, 用系统的输入/输出数据辨识系统的模型, 是系统建模与辨识的又一思路, 而且是对复杂系统建模与辨识的有效途径. 由于模糊规则的前件决定输入空间的模糊划分, 即模糊规则的数目, 为避免“规则爆炸”, 应将研究的重点放在前件的辨识上^[11]. 然而, 在已有的研究中, 多数关于输入空间划分的方法未能避免与输入空间维数的关联, 于是“维数灾”常有发生^[11].

近年, 毛剑琴等提出了基于树结构的 T-S 模糊模型建模方法(简称模糊树建模方法), 建立的 T-S 模糊模型称为模糊树模型(fuzzy tree, 简称 FT)^[12-14]. 其主要思想是根据建模数据在空间中的分布信息, 基于二叉树结构自适应划分输入空间, 得到模糊子空间; 在 n 维输入空间中通过构造 $n-1$ 维的超平面, 每次将空间划分为两个子空间, 在与叶节点对应的子空间上建立线性函数作为模糊规则的后件, 用隶属度函数将各分片线性函数光滑连接, 最后得到一个精度比较高的非线性映射. 模糊规则的数目等于叶节点的个数.

模糊树建模方法的主要优点是充分利用了输入

^{*} 国家重点基础研究(973)计划(批准号:2002cb312205)、国家自然科学基金(批准号:60534020)、北京市重点学科基金(批准号: XK100060526)和高等学校博士学科点专项科研基金(批准号:20070006060)资助的课题.

[†] 通讯联系人, E-mail: yaojianbh@yahoo.com.cn

空间中数据分布的特征信息,对空间进行自适应划分,该划分与维数无关联,也对于规则中前件和后件的参数可同时进行训练和优化.从而在相当大的程度上避免了“维数灾难”引起的“规则爆炸”.故该方法特别适用于处理高维复杂非线性系统的建模问题.

在具体介绍模糊树建模方法之前,先作如下一些约定:记二叉树为 T , $r(T)$ 表示 T 的根节点, t 表示二叉树中的节点.对于每个节点 $t \in T$,由 t 生成的左子节点和右子节点分别记为 $l(t)$ 和 $r(t)$, t 的父亲节点记为 $p(t)$.若没有子节点,则 t 称作叶节点,二叉树 T 的叶节点集合记为 \tilde{T} . $D(t)$ 表示节点 t 的深度,也即 t 的祖先数, $D(T)$ 表示树 T 的深度,也即 T 中节点的最大深度. T_d 表示二叉树 T 的 d 阶同根子树.

2.1. 模糊树建模方法 I (FTI)

模糊树建模方法对输入空间的自适应划分意味着子空间在线性逼近误差和输出数据密度大的地方划分精细,而在线性逼近误差和输出数据密度小的地方划分粗糙.输入空间的划分情况与一棵二叉树对应.每一个叶节点 t 对应的子空间上,用 n 维超平面 $y_t(x) = (c_t)^T \hat{x}$ 逼近非线性函数, $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in R^n$, $\hat{x} = [1, x^T]^T \in R^{n+1}$ 为增广的输入向量, $c_t = [c_0, c_1, \dots, c_n]^T \in R^{n+1}$ 为线性参数.如果逼近误差满足要求,则停止对该子空间的划分.对子空间划分的判别函数取为超平面 $g_t(x) = (c_t)^T \hat{x} - \theta_t = 0$, 其中 θ_t 为该子空间上输出数据的重心.模糊树建模方法 I^[13] 根据 $g_t(x) \leq 0$ 和 $g_t(x) \geq 0$, 可以将该子空间划分为两个更精细的子空间,同时,在 $g_t(x) \approx 0$ 的区域上定义隶属度函数,形成模糊带,最终完成对输入空间的模糊划分.

按照这种方式,判别函数将自动向输出数据密度大的地方移动,划分出大小不同,形状不规则的子空间.图 1 为输入是 1 维,具有 14 个数据样本的输入数据空间的自适应划分示意图,其中坐标横轴上加粗的线段表示模糊带.图 2 给出了 2 维输入空间用模糊树建模方法 I 进行模糊划分的示意图,矩形内的虚线表示判别函数,阴影部分表示模糊带.

模糊空间划分完毕,即可得到如下一组规则:
 R^l 如果 x 是 N_{t_l} , 那么

$$y_{t_l}(x) = (c_{t_l})^T \hat{x}, t_l \in \tilde{T}, \quad (1)$$

其中, $c_{t_l} = [c_0^{t_l}, c_1^{t_l}, \dots, c_n^{t_l}]^T$ 为线性参数, N_{t_l} 是模糊

子空间 χ_{t_l} 上定义的模糊集合,对应的隶属度函数记为 $N_{t_l}(x)$. 这样每条模糊规则对应一个模糊子空间.输入空间被划分为叶节点表示的若干个模糊子空间.

模糊树模型是一类特殊 T-S 模型,若将 N_{t_l} 的归一化隶属度函数记为 $\mu_{t_l}(x)$, 即

$$\mu_{t_l}(x) = \frac{N_{t_l}(x)}{\sum_{t_l \in \tilde{T}} N_{t_l}(x)}$$

得到典型的 T-S 模型的输出表达式:

$$\hat{y}(x) = \sum_{t_l \in \tilde{T}} \mu_{t_l}(x) \wedge c_{t_l} \wedge \hat{x}. \quad (2)$$

二叉树每个节点上的隶属度函数定义如下:

(1) 对于根节点,

$$N_{r(T)}(x) \equiv 1. \quad (3)$$

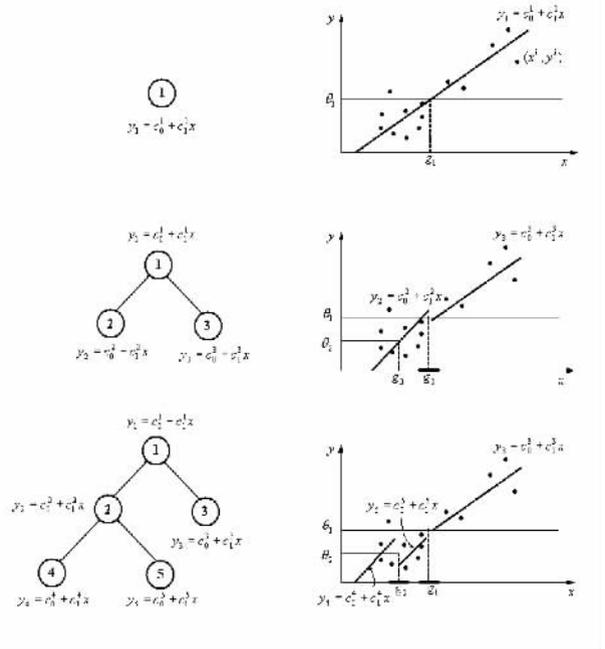


图 1 1 维输入数据空间自适应划分示意图

(2) 对于非根节点 t ,

$$N_t(x) = N_{p(t)}(x) \wedge \hat{N}_t(x), \quad (4)$$

其中,

$$\hat{N}_t(x) = \frac{1}{1 + \exp[-\alpha_t (c_{p(t)}^T x - \theta_{p(t)})]}, \quad (5)$$

$$\theta_{p(t)} = \frac{\sum_{i=1}^M N_{p(t)}(x^i) \wedge c_{p(t)}^T \hat{x}^i}{\sum_{i=1}^M N_{p(t)}(x^i)}. \quad (6)$$

$|\alpha_t|$ 表示模糊带的宽度,在计算时,事先确定一

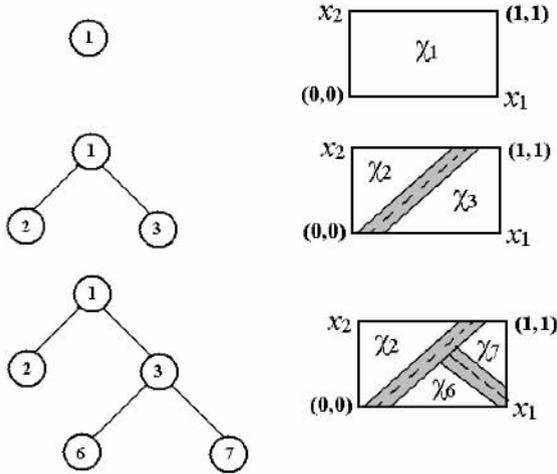


图 2 2 维输入数据空间自适应划分示意图

个正数 α ,对于左节点 $\alpha_l = -\alpha$,对于右节点 $\alpha_r = \alpha$.
 x^i 为输入数据样本 , $i = 1, 2, \dots, M$.

假设共有 L 个叶节点 ,即 $\bar{T} = \{t_1, t_2, \dots, t_L\}$.
 记 $c_{\bar{T}} = [c_{t_1}^T, c_{t_2}^T, \dots, c_{t_L}^T]^T$ 模糊规则中式(1)的线性参数 c^T 使用递推最小二乘法求解 :

$$c_{\bar{T}}^{i+1} = c_{\bar{T}}^i + S_{i+1} \tilde{X}^{i+1} (y^{i+1} - (\tilde{X}^i)^T c_{\bar{T}}^i),$$

$$S_{i+1} = S_i - \frac{S_i \tilde{X}^{i+1} (\tilde{X}^{i+1})^T S_i}{1 + (\tilde{X}^{i+1})^T S_i \tilde{X}^{i+1}}$$

$$i = 0, 1, \dots, M - 1, \quad (7)$$

其中 $c_{\bar{T}}^0 = 0$, $S_0 = \lambda I$, λ 为一个足够大的正数 , I 是单位矩阵 ,

$$\tilde{X}^i = \begin{bmatrix} \frac{N_{t_1}(x^i)}{\sum_{t_l \in \bar{T}} N_{t_l}(x^i)} (\hat{x}^i)^T \\ \frac{N_{t_2}(x^i)}{\sum_{t_l \in \bar{T}} N_{t_l}(x^i)} (\hat{x}^i)^T \\ \vdots \\ \frac{N_{t_L}(x^i)}{\sum_{t_l \in \bar{T}} N_{t_l}(x^i)} (\hat{x}^i)^T \end{bmatrix}$$

算法 1^[14] :

(1) 给定输入输出数据样本 (x^i, y^i) , $i = 1, 2, \dots, M$, $x^i \in R^n$, $y^i \in R$ 期望误差 σ_e 和最大叶节点数 L ;

(2) 确定模糊带的宽度 $\alpha > 0$;初始化根节点 ,令 $N_i(x) \equiv 1$ 树的深度 $d = 0$;根据(7)式求解根节点上的线性参数 c_1 ;

(3) 依次处理当前深度 d 上的每一个节点 :划分该节点 根据式(3)–(6)计算划分后新产生的左

右子节点上的隶属度函数 根据(7)式计算划分后所有叶节点上的线性参数 根据(2)式计算输入样本对应的划分后的模型输出 \hat{y}^i , $i = 1, 2, \dots, M$ 根据式(8)计算均方根误差 $RMSE$:

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (\hat{y}^i - y^i)^2}. \quad (8)$$

如果划分后模型输出的均方根误差小于划分前模型输出的均方根误差 ,那么保存此次划分 ;否则此次划分无效 ,处理当前层的下一个节点 .

(4) 当前层处理完毕后 ,如果模型输出的均方根误差小于期望误差或者叶节点数超过了 L ,则算法结束 ;否则令 $d = d + 1$,返回到第(3)步 ,继续算法 .

2.2. 模糊树建模方法 II (FTII)

模糊树建模方法能够对输入空间自适应划分 ,其中子空间上输出数据的重心 θ_i 起到了重要作用 .模糊树建模方法 II^[14] 在计算数据重心时 ,不考虑隶属度函数 ,通过在二叉树的叶节点上建立与典型 T-S 模糊规则前件对应的模糊子空间 ,实现对输入空间的模糊划分 .

已知的 M 组输入输出样本均属于根节点对应的样本集合 .设其中的 M_t 组数据 (x^j, y^j) 属于节点 $t \in T$ 对应的样本集合 $j = 1, 2, \dots, M_t$,节点 t 上的线性逼近函数定义为

$$y_t(x) = (c_t)^T \hat{x}. \quad (9)$$

从式(9)可知 c_t 与 y_t 为线性关系 ,故可以通过最小化式(10)得到 c_t 的最小二乘解 :

$$c_t = (X^T X)^{-1} X^T Y, \quad (10)$$

其中 $X = [\hat{x}^1, \hat{x}^2, \dots, \hat{x}^{M_t}]$, $Y = [y_1^t, y_2^t, \dots, y_{M_t}^t]$.

定义节点 t 上的准则函数为

$$e_t = \sum_{j=1}^{M_t} (y_t^j - y^j)^2, \quad (11)$$

其中 $y_t^j(x) = (c_t)^T \hat{x}^j$.节点 t 上的逼近误差为

$$\sigma_t = \sqrt{\frac{1}{M_t} \sum_{j=1}^{M_t} (\hat{y}_t^j - y^j)^2}. \quad (12)$$

选择

$$\epsilon = \frac{\sigma_e}{L}, \quad (13)$$

其中 L 为叶节点数目 .当所有叶节点满足 $\sigma_t < \epsilon$ 时 , $\sum_{t \in T} \sigma_t < \sigma_e$ 成立 .若 $\sigma_t \leq \epsilon$ 则停止对节点 t 的划分 ;若 $\sigma_t > \epsilon$ 则划分该子空间 ,计算子空间上的输

出数据重心 $\theta_i^{[15]}$:

$$\theta_i = \sum_{j=1}^{M_i} \frac{y_j^i}{M_i} \quad (14)$$

对于节点 t 对应的样本集中的样本 x , 如果 $(c_i)^T \hat{x} < \theta_i$, 则 x 属于左子节点 $l(t)$ 对应的样本集合. 如果 $(c_i)^T \hat{x} > \theta_i$, 则 x 被划分到右子节点 $r(t)$ 对应的样本集合. 通过 ϵ 和 θ_i 自动调整子空间的数目和大小, 子空间为不规则的形状. 与模糊树建模方法 I 不同, 数据对 (x^i, y^i) 在划分过程中, 属于唯一的子空间. 完成划分之后, 再在子空间的每一维输入上定义隶属度函数, 最终实现输入空间的模糊划分. 图 3 表示二维输入的模糊子空间的获取.

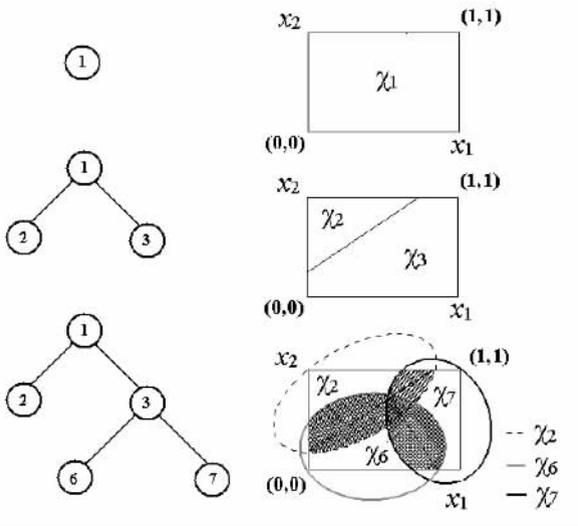


图 3 模糊树建模方法 II 划分得到模糊子空间的示意图

模糊空间划分完毕, 即可得到如下的一组规则:

$$R^t: \text{如果 } x_1 \text{ 是 } N_1^t, x_2 \text{ 是 } N_2^t, \dots, x_n \text{ 是 } N_n^t, \text{ 那么 } y_t(x) = (c_i)^T \hat{x}, t \in \tilde{T} \quad (15)$$

其中, $c_i = [c_0^i, c_1^i, \dots, c_n^i]^T$ 为线性参数, N_i^t 是模糊子空间 χ_i 中第 i 维输入上定义的模糊集合, 对应的隶属度函数记为 $N_i^t(x_i), i = 1, 2, \dots, n$. 定义 $N_i = N_1^i \times N_2^i \times \dots \times N_n^i$ 为模糊集合 $N_1^i, N_2^i, \dots, N_n^i$ 的直积. 定义直积模糊集合对应的隶属度函数为

$$N_i(x) = \prod_{i=1}^n N_i^t(x_i).$$

模糊规则可以表示为如下的简洁形式:

$$R^t: \text{如果 } x \text{ 是 } N_i, \text{ 那么 } y_t(x) = (c_i)^T \hat{x}$$

选择每一维输入上定义隶属度函数为 Gauss 函数, 即

$$N_i^t(x_i) = \exp \left[- \left(\frac{x_i - q_i^t}{\sigma_i^t} \right)^2 \right]. \quad (16)$$

算法 2^[14]

(1) 给定输入输出数据样本 $(x^i, y^i), i = 1, 2, \dots, M, x^i \in R^n, y^i \in R$ 最大迭代次数 N 期望误差 σ_e 和最大叶节点数 L 根据 (13) 式计算 ϵ ;

(2) 初始化根节点, 令树的深度 $d = 0$. 根据 (10) \ (12) 式计算根节点的 c_1 和 σ_1 ;

(3) 根据式 (8) 计算 $RMSE$, 若 $RMSE < \sigma_e$, 则算法结束, 叶节点总数即模型的模糊规则数目. 若 $RMSE > \sigma_e$, 则继续算法;

(4) 依次处理当前深度 d 上的每一个叶节点, 比较各叶节点的 σ_i 和 ϵ : 若 $\sigma_i < \epsilon$, 停止对节点 t 的划分. 若 $\sigma_i > \epsilon$, 依据 (14) 式计算 θ_i , 对节点进行划分. 根据 (10) \ (12) 和 (14) 式分别计算新生成叶节点上的 c_i, σ_i 和 θ_i ;

(5) 当前层处理完毕后, 计算 $\sum_{t_i \in \tilde{T}} \sigma_i$. 如果 $\sum_{t_i \in \tilde{T}} \sigma_i < \sigma_e$ 或者叶节点数超过了 L , 进入第 (6) 步. 否则, 令 $d = d + 1$, 返回到第 (4) 步, 继续算法;

(6) 令 c_i 的初始值选取为叶节点 $t \in \tilde{T}$ 上的权向量; σ_i^t 的初始值通过叶节点 t 上第 i 维输入数据所在的范围来估计; q_i^t 的初始值选为叶节点 t 上第 i 维输入数据样本的均值;

(7) 应用混合学习算法进行 N 次迭代. 假定 q_i^t 和 σ_i^t 不变, 向前采用最小二乘方法辨识 c_i ; 同时计算 $RMSE$, 若 $RMSE < \sigma_e$, 则算法结束; 若 $RMSE > \sigma_e$, 假定 c_i 不变, 向后采用误差反向传播方法辨识 q_i^t 和 σ_i^t .

模糊树建模方法 II 是将二叉树自适应划分算法与一般 T-S 模型模糊规则有效地结合起来, 前者考虑了数据样本的线性化特征及分布密度, 自适应地划分子空间, 同时为后者准备了较为合理的参数初始值. 因此与模糊树建模方法 I 相比较, 增加了优化参数的个数, 提高了模型精度.

3. 基于模糊树模型的 Mackey-Glass 混沌时间序列预测

时间序列预测在信号处理、自动控制以及其它许多领域有着广泛的应用. 由于混沌序列是由确定的非线性系统产生的, 从根本上讲, 混沌时间序列来自确定的非线性映射.

自 1977 年 Mackey 和 Glass^[16] 发现时滞系统中的混沌现象以来, 时滞混沌系统便引起了人们的广

泛关注,并常常用其作为检验非线性系统模型性能的标准,它由如下的延迟微分方程产生:

$$\frac{d(x(t))}{dt} = \frac{0.2x(t-\tau)}{1+x^{10}(t-\tau)} - 0.1x(t),$$

其中, τ 为时滞参数. $\tau > 17$ 时呈现混沌性,且 τ 值越大,混沌程度越高.混沌时间序列预测是用时间序列 t 时刻以前的值预测 $t+p$ 时刻的值, p 为预测步长.取间隔为 Δ 的 m 个历史时刻的序列值,建立 $x(t-(m-1)\Delta), \dots, x(t-\Delta), x(t)$ 到未来值 $x(t+p)$ 的映射关系.下面对 Mackey-Glass 混沌时间序列进行详尽的研究,并与相关文献的研究结果进行对比.

3.1. 建模精度研究

为了与其他方法进行比较,选择参数为 $\tau = 17$, $m = 4$, $\Delta = p = 6$, 输入向量 x 为 $[x(t-18), x(t-12), x(t-6), x(t)]^T$, 输出 y 为 $x(t+6)$, 从 $t = 118$ 到 $t = 1117$, 得到 1000 组输入输出数据,前 500 组用作建模数据,后 500 组用作预测数据,分别用两种模糊树建模方法、Matlab 中的 ANFIS 方法^[17]和模糊聚类方法^[18]进行仿真,模糊规则数目为 16.表 1 为各种方法的对比结果,图 4、图 5 分别为两种方法预测的仿真结果.

表 1 预测精度比较

方法	RMSE
FT I	0.0029
FT II	0.0011
ANFIS	0.0017
模糊聚类	0.0012
CNNE ^[2]	0.009
GETnet ^[3]	0.0054
MLMVN ^[5]	0.0056
LS-SVM	0.0010

注: CNNE, cooperative neural network ensembles; GETnet, general evolutionary temporal neural networks; MLMVN, multilayer feedforward neural network based on multi-valued neurons.

从表 1 可以看出,就两种模糊树建模方法而言,模糊树建模方法 II 的精度高,与 Matlab 中的 ANFIS 方法和模糊聚类方法相比,模糊树建模方法 II 建模精度略高,与 LS-SVM 的精度相当,均高于其他的方法,说明模糊树方法具有很好的建模精度和泛化能力.

3.2. 大样本问题研究

为了验证模糊树建模方法的建模速度、精度以

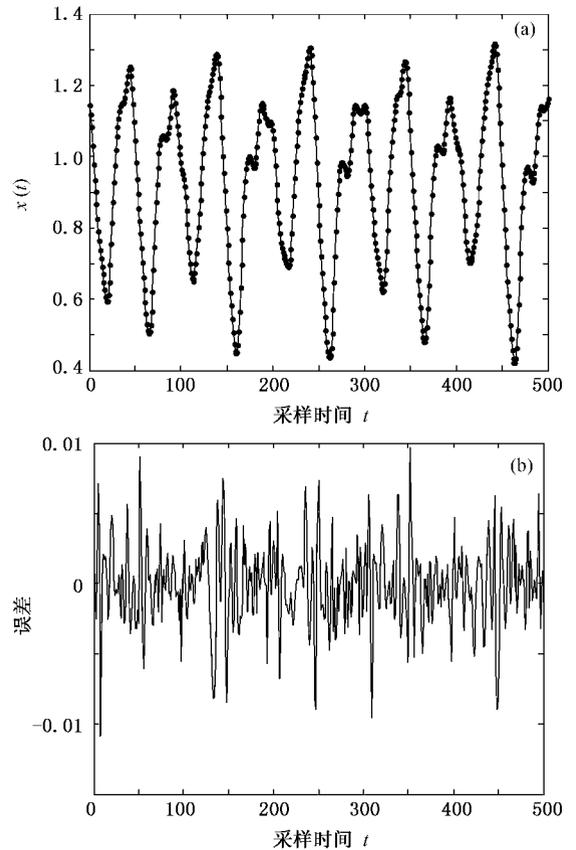


图 4 模糊树建模方法 I 的仿真结果 (a) 实际值(实线)与预测值(实心圆点)比较曲线 (b) 绝对误差曲线

及对大样本数据的处理能力,参数选择同 3.1.1,分别取 1000 组、2000 组、4000 组和 6000 组输入输出数据,其中前半一半用作建模数据,后半一半用作预测数据,分别用两种模糊树建模方法、ANFIS 方法和模糊聚类方法进行仿真,模糊规则数目为 16.表 2 为五种方法的对比结果.

表 2 预测精度和仿真时间比较

		1000 组	2000 组	4000 组	6000 组
FT I	$\kappa(s)$	1.91	3.62	7.65	17.38
	RMSE	0.0029	0.0031	0.0030	0.0031
FT II	$\kappa(s)$	106.26	229.35	420.98	580.15
	RMSE	0.0011	0.0017	0.0014	0.0012
ANFIS	$\kappa(s)$	98.75	193.68	356.45	512.13
	RMSE	0.0017	0.0020	0.0018	0.0017
模糊聚类	$\kappa(s)$	102.36	233.43	413.69	556.27
	RMSE	0.0012	0.0018	0.0018	0.0017
LS-SVM	$\kappa(s)$	37.85	149.59	624.79	1375.46
	RMSE	0.0010	0.0017	0.0013	0.0011

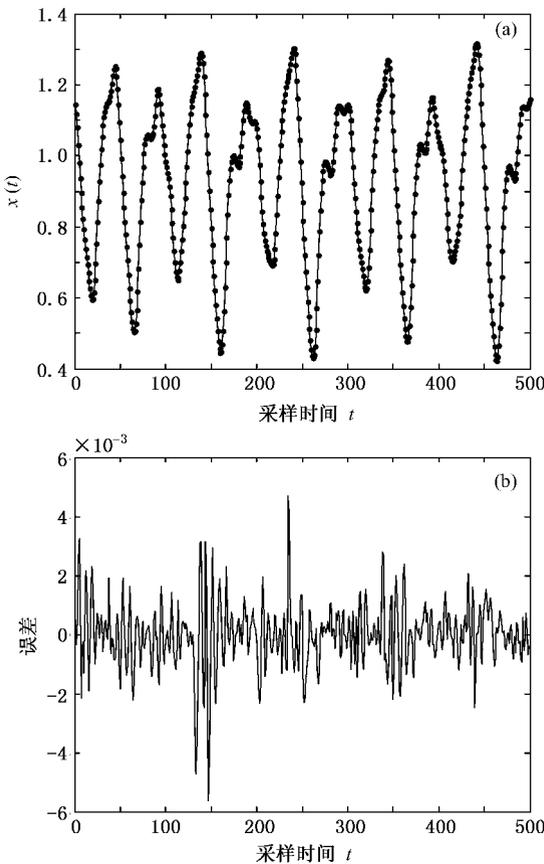


图5 模糊树建模方法 II 的仿真结果 (a) 实际值(实线)与预测值(实心圆点)比较曲线 (b) 绝对误差曲线

由表 2 可以看出,就模糊树建模方法而言,模糊树建模方法 II 的精度高,模糊树建模方法 I 建模时间短,但精度略低;与 Matlab 中的 ANFIS 方法和模糊聚类方法比,模糊树建模方法 II 建模精度高,建模时间相当;与 LS-SVM 方法相比,随着数据样本的增加,模糊树建模方法 II 的建模精度与 LS-SVM 相当,但是建模时间有明显的优势。值得指出的是,从建模时间看,模糊树辨识方法 I 的计算量远小于其它方法,而建模精度损失不大,因此在实际工程应用中,模糊树辨识方法 I 具有较大的实用价值。

3.3. 模糊规则数目研究

作为模糊模型,模糊树建模方法和 ANFIS、模糊聚类方法的建模精度和时间与模糊规则的数目有直接关系,下面对这一问题进行研究。参数选择同 3.1.1,取 1000 组输入输出数据,前 500 组用作建模数据,后 500 组用作预测数据,分别用两种模糊树建模方法、ANFIS 方法和模糊聚类方法进行仿真,模糊规则数目分别为 16、24、32 和 64。表 3 为四种方法的对

比结果。

表 3 预测精度和仿真时间比较

		模糊规则数目			
		16	24	32	64
FT I	$\kappa(s)$	1.91	10.21	29.03	382.27
	RMSE	0.0029	0.0021	0.0016	0.0010
FT II	$\kappa(s)$	106.26	236.03	426.29	3527.7
	RMSE	0.0011	0.00079	0.00075	0.00058
ANFIS	$\kappa(s)$	98.75	192.96	352.53	4500.2
	RMSE	0.0017	0.0013	0.0011	0.00082
模糊聚类	$\kappa(s)$	102.36	232.95	461.52	6019.5
	RMSE	0.0012	0.00077	0.00059	0.00083

通过表 3 可以看出,随着模糊规则的增加,各种方法的建模精度都有所提高,说明增加模糊规则数,有助于提高精度,但相应的建模时间也都随之增加。从建模时间上看,模糊树建模方法 II 少于 ANFIS 和模糊聚类方法,说明模糊树建模方法的自适应划分输入空间较网格法和聚类法更合理,减少了计算量。

3.4. 高维问题研究

实际中,预测高维 Mackey-Glass 混沌时间序列更具挑战性,因为用来预测未来值的历史信息越多,预测值将更加精确,同时也体现了建模方法的高效性和实用性。

3.4.1. 20 维问题研究

取参数为 $\tau = 17, m = 20, \Delta = p = 6$, 输入向量 $x = [x(t-114), x(t-108), \dots, x(t-6), x(t)]^T$, 输出仍为 $y = x(t+6)$, 取 2000 组输入输出数据,其中 1000 组用作建模数据,1000 组用作预测数据。此时输入维数为 20,由于 ANFIS 方法采用网格划分输入空间,得到的初始模糊模型将至少有 2^{20} 条模糊规则,相应的参数个数也是惊人的,所以对于高维问题,Matlab 会告知该方法不能工作。因此这里用模糊树建模方法和模糊聚类法进行仿真,模糊规则数分别为 8 和 16。表 4 为三种方法的对比结果。

表 4 预测精度和仿真时间比较

	$\kappa(s)$	RMSE	规则数
FT I	23.90	4.85×10^{-3}	8
	255.05	2.16×10^{-3}	16
FT II	1016.2	1.17×10^{-3}	8
	8474.48	5.26×10^{-4}	16
模糊聚类	1047.75	5.71×10^{-4}	8
	9951.93	3.51×10^{-4}	16

根据表 4 给出的仿真结果,模糊树建模方法 I

的模型结构简单,建模过程中,只需要优化线性参数,因而需要的计算量最小,建模时间最短.模糊树建模方法 II 和模糊聚类方法的建模精度大致相当,较模糊树建模方法 I 有所提高,说明增加模型的参数,有助于提高精度,同时也说明混合学习算法在优化非线性参数方面的优越性.从建模时间看,模糊树建模方法 II 少于模糊聚类方法,说明基于树结构的自适应划分输入空间较聚类法更加高效合理,避免了一些不必要的计算量.

3.4.2. 100 维问题研究

进一步取 $m = 100$, $\Delta = p = 4$, 输入向量为 $x = [x(t-396), x(t-392), \dots, x(t-4), x(t)]^T$, 输出为 $y = x(t+4)$, 进行 100 维的混沌时间序列预测. 从 $t = 501$ 到 $t = 2000$, 得到 1500 组输入输出数据用作训练数据, 从 $t = 1501$ 到 $t = 3000$, 得到 1500 组输入输出数据用作检测数据. 使用模糊树建模方法 II 和模糊聚类法分别建立了具有 8 条模糊规则的 T-S 模糊模型, 混合训练迭代次数设为 50. 表 5 为两种方法的对比结果.

表 5 预测精度和仿真时间比较

	$t(s)$	训练 RMSE	检测 RMSE
FT II	5138.83	9.25×10^{-4}	4.57×10^{-3}
模糊聚类	5233.68	3.96×10^{-4}	1.37×10^{-2}

根据表 5, 模糊树建模方法 II 的建模时间少于模糊聚类方法, 训练数据集的均方根误差上二者大致相当, 但是模糊树建模方法 II 的检测数据集的均方根误差比模糊聚类方法小一个量级, 说明模糊树建模方法 II 所建模型的泛化能力优于模糊聚类方法所建的模型, 也说明模糊聚类方法所建的模型在学习过程中出现了“过学习”情况. 由于模糊聚类法是部分划分输入空间, 在高维情况下, 得到的聚类并没有完全覆盖整个空间, 而模糊树建模方法对整个输入空间实现了完全的模糊划分, 因而所建的模型具有较好的泛化能力.

3.5. 多步预测问题研究

混沌时间序列的多步预测对模型的要求更为严格, 预测也更为困难. 取参数为 $\tau = 17$, $m = 4$, $\Delta = 6$, $p = 1$, 20 和 50, 输入向量为 $x = [x(t-18), x(t-12), x(t-6), x(t)]^T$, 输出 $y = x(t+1)$, $x(t+20)$ 和 $x(t+50)$, 取 1500 组输入输出数据, 其中 1000 组用作建模数据, 500 组用作预测数据. 表 6 为各种方法的

对比结果.

表 6 多步预测 RMSE 比较

	$p = 1$	$p = 20$	$p = 50$
FT I	0.0012	0.0066	0.0599
FT II	0.00067	0.00085	0.0065
ANFIS	0.00075	0.00095	0.0126
模糊聚类	0.00088	0.00081	0.0044
LS-SVM	0.00072	0.00097	0.0139
IOC-GB ^[7]	0.0065	0.0103	0.0301

注: IOC-GB——基于高斯基距离的输入输出 K -均值聚类的 RBF 神经网络

表 6 可以看出, 多步预测方面, 模糊树建模方法的表现也是相当优秀. 仿真研究表明, 模糊树建模方法 II 在 60 步以内预测 σ 低于 0.01, 100 步以内预测 σ 低于 0.03, 可见模糊树建模方法对于多步预测也有很好的建模精度和泛化能力.

3.6. 强混沌问题研究

τ 为时滞参数, 随着 τ 值增大, 时间序列的混沌程度也随之增强, 为了验证模糊树建模方法, 参数为 $\tau = 30$, $m = 3$, $\Delta = p = 1$, 输入向量为 $x = [x(t-2), x(t-1), x(t)]^T$, 输出 $y = x(t+1)$, 分别取 2400 组和 6000 组输入输出数据, 其中前一半用作建模数据, 后一半用作预测数据, 分别用两种模糊树建模方法进行仿真, 模糊规则数目为 16. 表 7 为各种方法的对比结果, 图 6、图 7 分别为两种方法预测的仿真结果.

表 7 预测 RMSE 比较

	2400 组	6000 组
FT I	0.0016	0.0015
FT II	0.0016	0.0015
ANFIS	0.0016	0.0016
模糊聚类	0.0017	0.0016
LS-SVM	0.0015	0.0014
SE-SVM ^[8]	0.0016	/

注: SE-SVM——selective support vector machine ensemble

由表 7 可以看出, 对于强混沌时间序列的建模和预测, 模糊树建模方法仍然显示了其很好的建模精度和泛化能力.

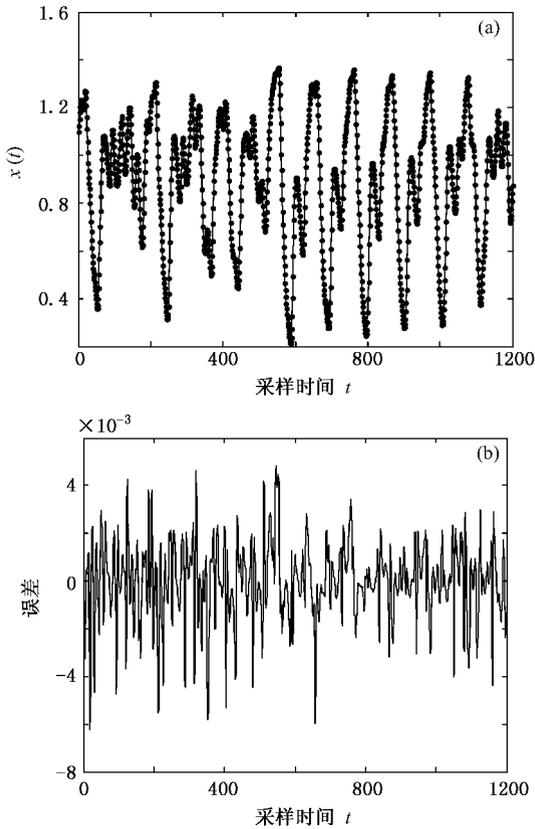


图 6 模糊树建模方法 I 的仿真结果 (a) 实际值(实线)与预测值(实心圆点)比较曲线 (b) 绝对误差曲线

4. 基于模糊树模型的 Lorenz 混沌时间序列预测

自从 1963 年 Lorenz 发现了 Lorenz 系统^[9], 人们已经对这个系统进行了大量而深入的研究, 贯穿了整个混沌科学的发展, 研究 Lorenz 系统具有十分重要的意义. 它由如下的微分方程产生:

$$\dot{x} = \sigma(y - x)$$

$$\dot{y} = \rho x - y - xz$$

$$\dot{z} = -\beta z + xy$$

取 $\sigma = 10, \rho = 34, \beta = 8/3$, 迭代产生关于 x 的混沌时间序列. 取 $m = 4, \tau = 1, p = 1$ 和 $8, x = [x(t-3), x(t-2), x(t-1), x(t)]^T$ 输出向量 $y = x(t+1), x(t+8)$. 取 5000 组样本数据, 前 1000 组作为训练数据, 后 4000 组作为检测数据. 图 8、图 9 分别为两种方法预测的仿真结果, 表 8 为各种方法的对比结果.

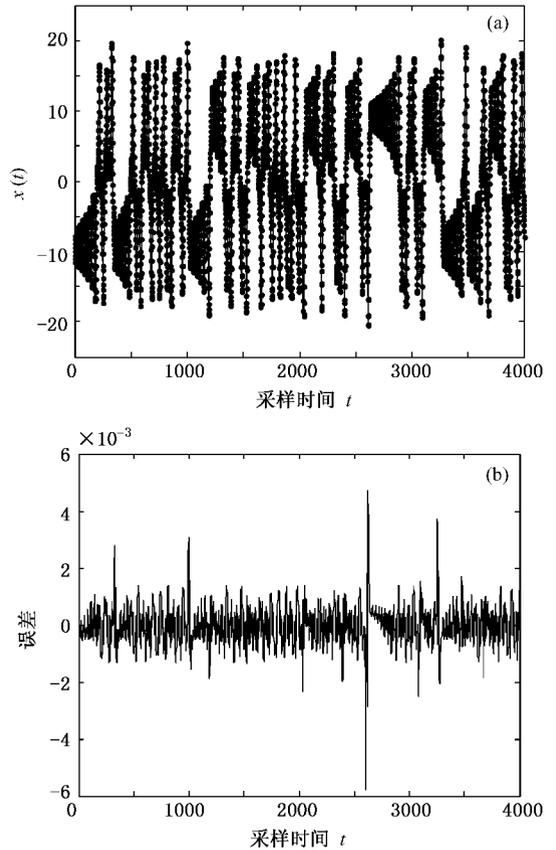


图 8 模糊树建模方法 I 的仿真结果 (a) 实际值(实线)与预测值(实心圆点)比较曲线 (b) 绝对误差曲线

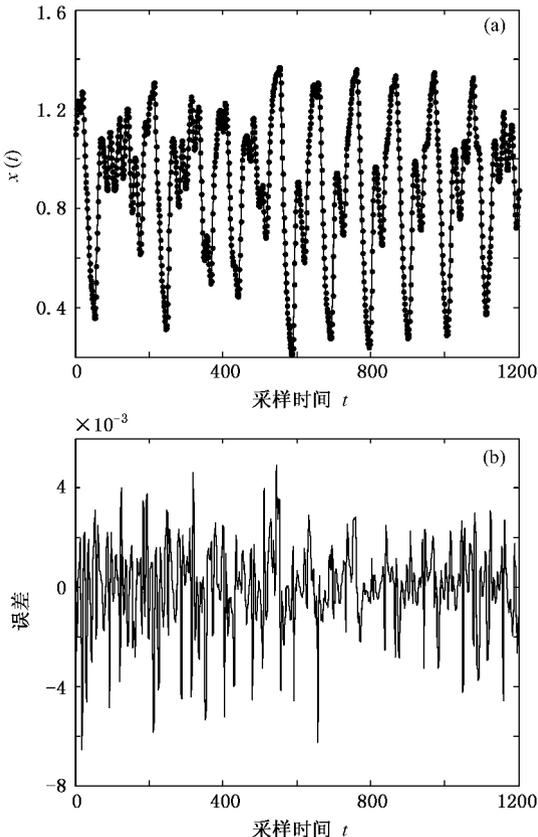


图 7 模糊树建模方法 II 的仿真结果 (a) 实际值(实线)与预测值(实心圆点)比较曲线 (b) 绝对误差曲线

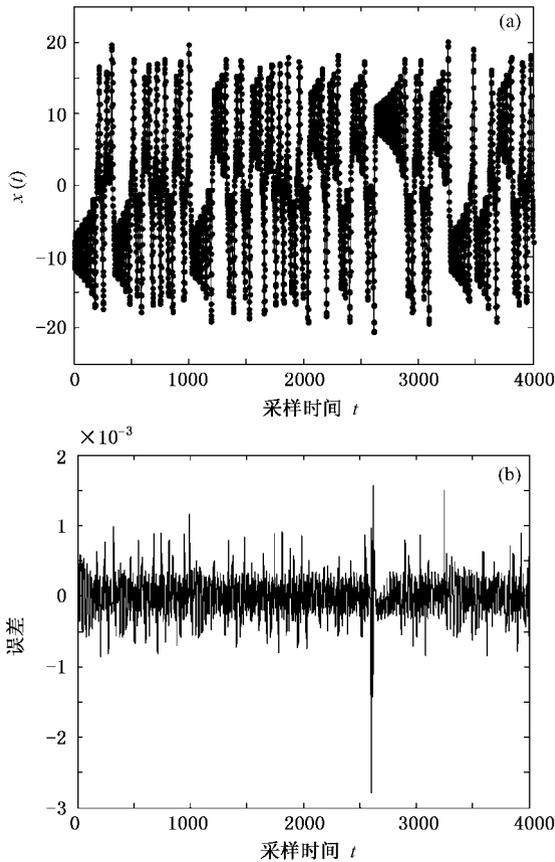


图 9 模糊树建模方法 II 的仿真结果 (a) 实际值(实线)与预测值(实心圆点)比较曲线 (b) 绝对误差曲线

表 8 预测 RMSE 比较

	$p = 1$	$p = 8$
FT I	0.0007	0.050
FT II	0.0003	0.029
支持向量域 ⁹¹	0.047	0.056
ANFIS	0.0005	0.045
模糊聚类	0.0012	0.054

表 8 可以看出,在单步预测中,模糊树建模方法的预测精度是非常高的,比 ANFIS 方法和模糊聚类方法的精度略高,而与支持向量域方法相比,精度高了两个量级;多步预测结果也优于对照的方法.仿真结果说明模糊树建模方法对于 Lorenz 混沌时间序列的建模和预测也是完全适用的,并且具有很高的精度.

5. 基于模糊树模型的 Henon 混沌时间序列预测

Henon 映射是最著名的简单动力学系统之一,

其动力学方程为 $x_{n+1} = 1 - ax_n^2 - bx_n$, 其中当 $a = 1.4, b = 0.3$ 时,系统成为混沌态^[20],迭代产生关于的混沌时间序列.取 $m = 4, \tau = 1, p = 1, x = [x(t-3), x(t-2), x(t-1), x(t)]^T$ 输出向量 $y = x(t+1), x(t+8)$.取 500 对样本数据,前 400 对作为训练数据,后 100 对作为检测数据验证模型的有效性.模糊规则数目为 16.图 10、图 11 分别为两种方法预测的仿真结果,表 9 为各种方法的对比结果.

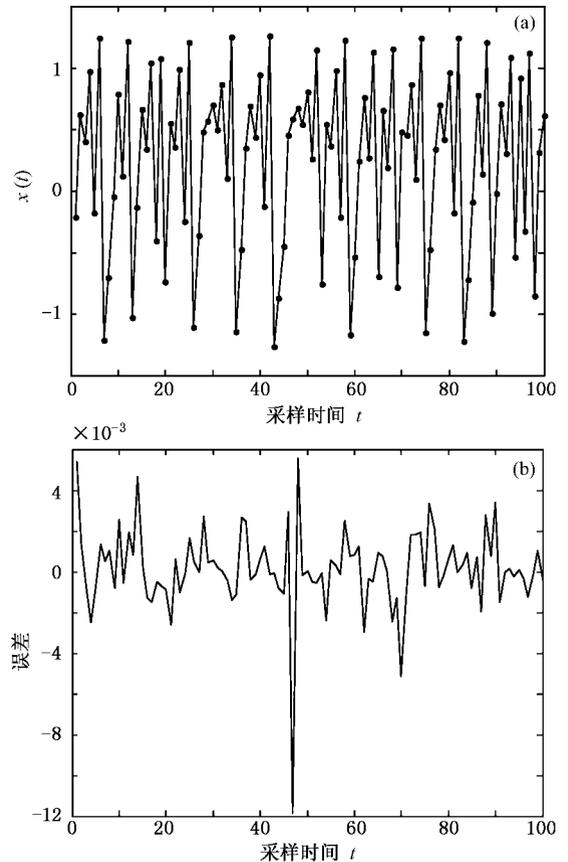


图 10 模糊树建模方法 I 的仿真结果 (a) 实际值(实线)与预测值(实心圆点)比较曲线 (b) 绝对误差曲线

表 9 预测 RMSE 比较

方法	$\kappa(s)$	RMSE
FT I	1.52	0.0021
FT II	87.91	0.00018
ANFIS	71.53	0.00063
模糊聚类	109.12	0.00061
新型广义 RBF 神经网络 ¹⁰¹	/	0.0413

表 9 表明,对于 Henon 混沌时间序列,模糊树建

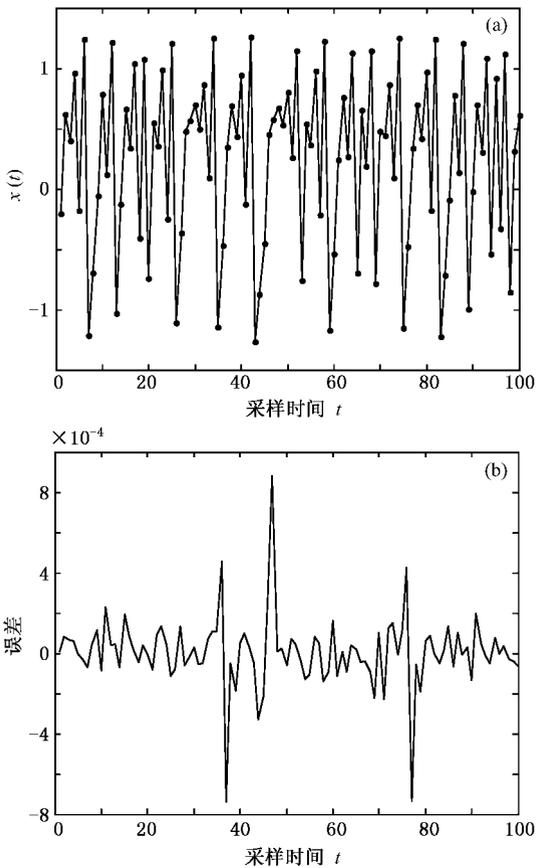


图 11 模糊树建模方法 II 的仿真结果 (a) 实际值(实线)与预测值(实心圆点)比较曲线 (b) 绝对误差曲线

模方法也体现了非常高的预测精度,远远高于 ANFIS 方法和模糊聚类方法,比文献 [10] 的方法预测的精度高了两个量级.仿真结果同时表明,模糊树建模方法完全适用于 Henon 混沌时间序列的建模和预测,可以获得满意的建模精度和泛化能力.

6. 结 论

模糊树建模方法可以根据建模数据在空间中的分布,充分利用了输入空间中数据分布的特征信息,对空间进行自适应划分,该划分与维数无关联,同时对于规则中前件和后件的参数可同时进行训练和优化,特别适用于处理高维复杂非线性系统的建模问题.通过对 Mackey-Glass、Lorenz 和 Henon 混沌时间序列的研究充分表明,模糊树建模方法具有建模精度高、运行速度快、泛化能力强、预测步数多、适用范围广等优点,是一种非常有效的建模方法,在复杂的非线性系统的研究中具有较强的研究价值和实用价值.

- [1] Holden A V 1986 *Chaos* (Princeton : Princeton University Press)
- [2] Islam M M , Yao X , Murase K 2003 *IEEE Transactions on Neural Networks* **14** 820
- [3] Derakhshani R 2005 *Proceedings of International Joint Conference On Neural Networks*
- [4] Gu H , Wang H W 2007 *Appl. Math. Comput.* **185** 1171
- [5] Aizenberg I , Moraga C 2007 *Soft Comput.* **11** 169
- [6] Cui W Z , Zhu C C , Bao W X , Liu J H 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 3303 (in Chinese) [崔万照、朱长纯、保文星、刘君华 2004 物理学报 **53** 3303]
- [7] Zhang J F , Hu S S 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 714 (in Chinese) [张军峰、胡寿松 2007 物理学报 **56** 714]
- [8] Cai J W , Hu S S , Tao H F 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 6820 (in Chinese) [蔡俊伟、胡寿松、陶洪峰 2007 物理学报 **56** 6820]
- [9] Ren R , Xu J , Zhu S H 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 555 (in Chinese) [任 韧、徐 进、朱世华 2006 物理学报 **55** 555]
- [10] Li J , Liu J H 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 4569 (in Chinese) [李 军、刘君华 2005 物理学报 **54** 4569]
- [11] Fuzzy Logic Toolbox for Use with MATLAB User 's Guide ,Version 2 [M] USA :The Math Works Inc. 2000 :101
- [12] Zhang J G , Mao J Q , Xia T , Wei K H 2000 *Acta Auto. Sin.* **26** 378 (in Chinese) [张建刚、毛剑琴、夏 天、魏可惠 2000 自动化学报 **26** 378]
- [13] Mao J Q , Zhang J G , Yue Y F , Ding H S 2005 *IEEE Trans. on Fuzzy Syst.* **13** 1
- [14] Ding H H 2007 *Ph. D. Thesis* Beihang University (in Chinese) [丁海山 2007 博士学位论文 北京航空航天大学]
- [15] Gelfand S B , Ravishankar C S 1993 *IEEE Transactions on Information Theory* **39** 1907
- [16] Mackey M C , Glass L 1977 *Science* **197** 287
- [17] Jang J S R 1993 *IEEE Trans. Syst. Man* **23** 665
- [18] Chiu S 1994 *J. Intell. Fuzzy Syst.* **2** 267
- [19] Lorenz E N 1963 *J. Atmos. Sci.* **20** 130
- [20] Henon M 1976 *Commun. Math. Phys.* **50** 69

Chaotic time series prediction based on fuzzy tree^{*}

Mao Jian-Qin¹⁾ Yao Jian^{1)†} Ding Hai-Shan²⁾

1) *School of Automation Science and Electrical Engineering, Beihang University, Beijing 100191, China*

2) *China Airborne Missile Academy, Luoyang 471009, China*

(Received 26 June 2008 ; revised manuscript received 15 August 2008)

Abstract

In this paper, an adaptive-tree-structure-based fuzzy model is applied to predict chaotic time series. The fuzzy partition of input data set is adaptive to the pattern of data distribution to optimize the number of the subsets automatically by binary-tree model. A fuzzy area around every discriminant edge is set up by the membership functions corresponding to every subset of input data. A complex nonlinear function is obtained by piecewise linear approximation and smoothing the discontinuous at the discriminant edges of subsets to reduce the error of approximation. The fuzzy tree model is evaluated using prediction of the Mackey-Glass, Lorenz and Henon chaotic time series. In comparison with some existing methods, it is shown that the FT is also of less computation and high accuracy.

Keywords : fuzzy tree, chaotic time series, prediction

PACC : 0545

^{*} Project supported by the State Key Development Program for Basic Research of China (Grant No. 2002CB312205), the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 60534020), the Key Subject Foundation of Beijing (Grant No. XK100060526) and the Specialized Research Fund for the Doctoral Program of Higher Education of China (Grant No. 20070006060).

[†] Corresponding author. E-mail : yaojianbh@yahoo.com.cn