第 58 卷 第 4 期 2009 年 4 月
1000-3290/2009/58(04)/2235-05

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.58,No.4,April,2009


# 一种新的分数阶系统稳定理论及在 back-stepping 方法同步分数阶混沌系统中的应用*

胡建兵† 韩 焱 赵灵冬

(中北大学电子测试技术国家重点实验室,仪器科学与动态测试教育部重点实验室,太原 030051)

(2008 年 7 月 26 日收到;2008 年 10 月 30 日收到修改稿)

对阶次小于 1 的分数阶系统的稳定问题,提出了一种新的判据.基于该理论,将 back-stepping 方法拓展到分数阶系统中并设计控制器实现了分数阶 Newton-Leipnik 混沌系统的同步.数值仿真验证了稳定性理论的准确性及控制器设计方法的有效性.

关键词:分数阶,同步,back-stepping 方法,Newton-Leipnik

PACC:0545

## 1. 引 言

尽管分数阶微分方程被提出已经有近 300 年的历史[1],但是直到近来发现在机械、物理、工程、信息科学、材料学等科学领域存在分数阶现象,分数阶微分方程才激起大家的研究热情[2—5].很多学者正致力于研究物理、工程等领域(诸如粘滞现象、电极反应、电磁波)的分数阶系统[6].研究也发现很多整数阶混沌系统的分数阶形式也具有混沌吸引子.

混沌同步由于其在工程、生物、信息处理等领域的潜在应用价值而得到人们的广泛研究.随着整数阶系统相关理论的发展,相继提出了线性和非线性反馈方法[7]、延迟反馈法[8]、自适应方法[9]、观测器方法[9]、神经网络方法[10]、脉冲同步方法[11]、滑模变结构控制同步方法[12]、预测控制同步方法[13]、观测器同步方法[14]和 back-stepping[15] 方法等多种同步方法.然而由于分数阶微分方程研究起步较晚以及分数阶系统理论的复杂性,分数阶系统的稳定性理论不如整数阶系统的理论发展充分,其控制与同步方法也远没有整数阶混沌系统的控制与同步方法丰富.文献[16]提出了分数阶线性系统稳定性理论,然而该理论通常不能直接用于判定分数阶非线性系统的稳定性.

针对这一问题,文献[17]针对阶次小于 1 的分数阶系统,提出了基于 Lyapunov 方程的分数阶系统稳定理论.本文进一步发展了该理论,提出了一个与该定理等价的分数阶系统稳定性判定定理.根据该理论,将 back-stepping 控制器设计方法推广到分数阶系统中,设计的控制器实现了分数阶 Newton-Leipnik 混沌系统的同步.

## 2. 分数阶系统稳定理论

文献[16]研究了分数阶线性系统的稳定性问题并给出了判断分数阶系统稳定性的充要条件.

**引理 1** 考虑自治系统

$$\frac{\mathrm{d}^{\alpha}x}{\mathrm{d}t^{\alpha}} = \boldsymbol{A}x, \tag{1}$$

其中 $x\in R^{n}(n\in N)$, $\boldsymbol{A}\in R^{n\times n}$.

1) 当系统(1)是渐近稳定的,当且仅当对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的任意特征值 $\lambda$, $|\arg(\lambda)| > \alpha\pi/2$ 都成立.

2) 当系统(1)是稳定的,当且仅当对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的任意特征值 $\lambda$, $|\arg(\lambda)| \geqslant \alpha\pi/2$ 都成立.

$\alpha$ 阶线性系统的稳定区域如图 1 所示,对于分数阶非线性系统如果其在平衡点处的 Jacobian 矩阵的所有特征值都在稳定区域内,则该平衡点为稳定的平衡点.

**引理 1** 给出了分数阶线性系统的稳定性判定定理.然而对于非线性系统系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中通常含有

* 国家自然科学基金(批准号:60372073)资助的课题.

† E-mail:hjb@nuc.edu.cn

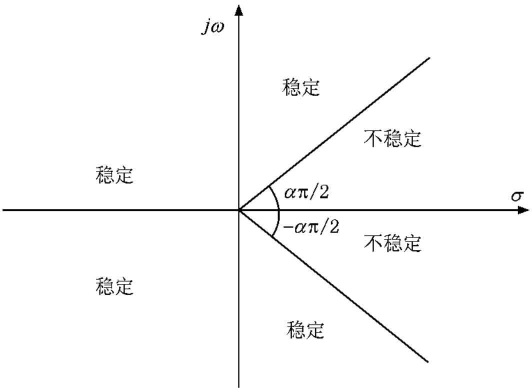


图 1 分数阶系统的稳定区间

状态变量,分数阶非线性系统不能直接采用该定理.针对这一问题,文献[17]将该引理进行推广,提出了基于 Lyapunov 方程的分数阶系统稳定性判定定理:

**引理 2** 对于分数阶系统(1),当阶数 $\alpha<1$ 时,如果系统的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 Lyapunov 方程,即存在实对称正定矩阵 $\boldsymbol{P}$,半正定矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 使得方程 $\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{Q}$ 对于任意的状态变量 $x$ 恒成立,则分数阶系统(1)渐近稳定.

该引理既适用于判定分数阶线性系统也适用于分数阶非线性系统的稳定性.本文进一步给出了一个与引理 2 等价的但比引理 2 使用起来更方便、灵活,形式上更简洁的分数阶系统稳定性判定定理:

**定理 1** 对于分数阶系统(1),当系统阶数 $\alpha<1$ 时,如果存在实对称正定矩阵 $\boldsymbol{P}$,使得对任意状态变量 $x\,(x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T)$,方程 $\boldsymbol{J}=x^T\boldsymbol{P}\dfrac{\mathrm{d}^\alpha x}{\mathrm{d}t^\alpha}\leqslant 0$(令形如 $x^T\boldsymbol{P}\dfrac{\mathrm{d}^\alpha x}{\mathrm{d}t^\alpha}$ 的函数为 $J$ 函数)恒成立.

**证明** 如果能证明定理 1 和引理 2 是等价命题,则定理 1 即可得证.

1) 由引理 2 推导定理 1:

如果

$$\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{Q} \tag{2}$$

成立,分数阶系统(1)稳定.即有:

$$x^T(\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}\boldsymbol{A})x=-x^T\boldsymbol{Q}x, \tag{3}$$

因为矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 为半正定矩阵,故对任意的状态变量 $x$:

$$x^T(\boldsymbol{A}^H\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}\boldsymbol{A})x=-x^T\boldsymbol{Q}x\leqslant 0. \tag{4}$$

将(1)式代入(5) 式得:

$$\left(\frac{\mathrm{d}^\alpha x}{\mathrm{d}t^\alpha}\right)^T\boldsymbol{P}x+x^T\boldsymbol{P}\frac{\mathrm{d}^\alpha x}{\mathrm{d}t^\alpha}\leqslant 0, \tag{5}$$

不妨设正定矩阵 $\boldsymbol{P}$ 为:

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \\ & & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}, \tag{6}$$

带入(6)式展开有:

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_i\frac{\mathrm{d}^\alpha x_j}{\mathrm{d}t^\alpha}+\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_j\frac{\mathrm{d}^\alpha x_i}{\mathrm{d}t^\alpha}\leqslant 0, \tag{7}$$

由于矩阵 $\boldsymbol{P}$ 为实对称矩阵,故有 $a_{ij}=a_{ij}\,(\forall\, i,j)$,

$$\begin{aligned}&\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_i\frac{\mathrm{d}^\alpha x_j}{\mathrm{d}t^\alpha}+\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_j\frac{\mathrm{d}^\alpha x_i}{\mathrm{d}t^\alpha}\\ &=2\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_j\frac{\mathrm{d}^\alpha x_i}{\mathrm{d}t^\alpha}=2x^T\boldsymbol{P}\frac{\mathrm{d}^\alpha x}{\mathrm{d}t^\alpha}\\ &=2\left(\frac{\mathrm{d}^\alpha x}{\mathrm{d}t^\alpha}\right)^T\boldsymbol{P}x\leqslant 0.\end{aligned} \tag{8}$$

2) 定理 1 推导引理 2:

将上述证明过程反推即可由定理 1 推导到引理 2.反推过程从略.

由上述证明过程知道定理 1 和引理 2 是等价命题.引理 2 成立,故定理 1 也成立.定理 1 得证.

从定理 1 可以看出 判定分数阶系统稳定性构造的 $J$ 函数非常类似于整数阶系统的 Lyapunov 函数.因而构造 $J$ 函数的方法经常可以参考 Lyapunov 函数构造的方法.基于该理论,分数阶系统控制器的设计方法也可以类似于整数阶系统控制器的设计方法.

## 3. 利用 back-stepping 方法同步分数阶 Newton-Leipnik 系统

1981 年,Newton 和 Leipnik 在研究刚体运动时提出了一个非线性系统[18],Wang 等研究了该系统的混沌行为并将该系统命名为 Newton-Leipnik 系统[19].

$$\begin{aligned}\dot{x}_1&=-ax_1+y_1+10y_1z_1,\\ \dot{y}_1&=-x_1-0.4y_1+5x_1z_1,\\ \dot{z}_1&=bz_1-5x_1y_1.\end{aligned} \tag{9}$$

该系统的分数阶形式为:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^\alpha x_1}{\mathrm{d}t^\alpha}&=-ax_1+y_1+10y_1z_1,\\ \frac{\mathrm{d}^\alpha y_1}{\mathrm{d}t^\alpha}&=-x_1-0.4y_1+5x_1z_1,\\ \frac{\mathrm{d}^\alpha z_1}{\mathrm{d}t^\alpha}&=bz_1-5x_1y_1.\end{aligned} \tag{10}$$

Long-Jye Sheu 等研究了该系统的分数阶形式的

混沌特性，指出当分数阶系统的阶次 $0.94 \leqslant \alpha < 1$ 也具有混沌特性[20].

以该系统为驱动系统，响应系统为：

$$\frac{\mathrm{d}^{\alpha} x_2}{\mathrm{d} t^{\alpha}} = -a x_2 + y_2 + 10 y_2 z_2 - u_1(t),$$
$$\frac{\mathrm{d}^{\alpha} y_2}{\mathrm{d} t^{\alpha}} = -x_2 - 0.4 y_2 + 5 x_2 z_2 - u_2(t),$$
$$\frac{\mathrm{d}^{\alpha} z_2}{\mathrm{d} t^{\alpha}} = b z_2 - 5 x_2 y_2 - u_3(t). \tag{11}$$

以响应系统(11)同步驱动系统(10)，其同步误差为：

$$\frac{\mathrm{d}^{\alpha} e_1}{\mathrm{d} t^{\alpha}} = -a e_1 + e_2 + 10(y_2 e_3 + z_1 e_2) - u_1(t),$$
$$\frac{\mathrm{d}^{\alpha} e_2}{\mathrm{d} t^{\alpha}} = -e_1 - 0.4 e_2 + 5(x_2 e_3 + z_1 e_1) - u_2(t),$$
$$\frac{\mathrm{d}^{\alpha} e_3}{\mathrm{d} t^{\alpha}} = b e_3 - 5(x_2 e_2 + y_1 e_1) - u_3(t). \tag{12}$$

利用 back-stepping 方法构造 $J$ 函数：

第一步：令 $s_1 = e_1$，则：

$$J_1 = s_1 \frac{\mathrm{d}^{\alpha} s_1}{\mathrm{d} t^{\alpha}} = -a s_1^2 + s_1 e_2 + 10 e_1(y_2 e_3 + z_1 e_2) - s_1 u_1(t), \tag{13}$$

第二步：令 $s_2 = e_2$，有：

$$\begin{aligned} J_2 &= s_1 \frac{\mathrm{d}^{\alpha} s_1}{\mathrm{d} t^{\alpha}} + s_2 \frac{\mathrm{d}^{\alpha} s_2}{\mathrm{d} t^{\alpha}} \\ &= -a s_1^2 + s_1 e_2 + 10 e_1(y_2 e_3 + z_1 e_2) - s_1 u_1(t) \\ &\quad - s_2 e_1 - 0.4 e_2^2 + 5 s_2(x_2 e_3 + z_1 e_1) - s_2 u_2(t) \\ &= -a s_1^2 - 0.4 s_2^2 + 10 y_2 e_1 e_3 + 5 x_2 e_2 e_3 \\ &\quad + 15 z_1 e_1 e_2 - s_1 u_1(t) - s_2 u_2(t), \end{aligned} \tag{14}$$

最后，令 $s_3 = e_3$，得：

$$\begin{aligned} J_3 &= s_1 \frac{\mathrm{d}^{\alpha} s_1}{\mathrm{d} t^{\alpha}} + s_2 \frac{\mathrm{d}^{\alpha} s_2}{\mathrm{d} t^{\alpha}} + s_3 \frac{\mathrm{d}^{\alpha} s_3}{\mathrm{d} t^{\alpha}} \\ &= -a s_1^2 - 0.4 s_2^2 + 10 y_2 e_1 e_3 + 5 x_2 e_2 e_3 \\ &\quad + 15 z_1 e_1 e_2 - s_1 u_1(t) - s_2 u_2(t) \\ &\quad + b s_3^2 - 5(x_2 e_2 e_3 + y_1 e_1 e_3) - e_3 u_3(t) \\ &= -a s_1^2 - 0.4 s_2^2 + b s_3^2 + 5 y_2 e_1 e_3 + 5 e_1 e_2 e_3 \\ &\quad + 15 z_1 e_1 e_2 - e_1 u_1(t) \\ &\quad - e_2 u_2(t) - e_3 u_3(t). \end{aligned} \tag{15}$$

根据(15)式设计控制器：

$$u_1(t) = -(a-1) e_1 + 5 y_2 e_3,$$
$$u_2(t) = 15 z_1 e_1,$$
$$u_3(t) = (b+1) e_3 + 5 e_1 e_2. \tag{16}$$

将(16)式代人(15)式得：

$$\begin{aligned} J_3 &= s_1 \frac{\mathrm{d}^{\alpha} s_1}{\mathrm{d} t^{\alpha}} + s_2 \frac{\mathrm{d}^{\alpha} s_2}{\mathrm{d} t^{\alpha}} + s_3 \frac{\mathrm{d}^{\alpha} s_3}{\mathrm{d} t^{\alpha}} \\ &= -e_1^2 - 0.4 e_2^2 - e_3^2 \leqslant 0. \end{aligned} \tag{17}$$

根据定理 1，设计的控制器能使分数阶响应系统(11)与分数阶驱动系统(10)实现了同步.

## 4. 数值仿真

基于改进的 Adams-Bashforth-Moulton 理论[21]，文献[22]提出了分数阶混沌系统仿真算法. 本文利用该算法进行仿真，仿真时，设分数阶系统阶次 $\alpha = 0.96$ 选择 $a = 0.4$，$b = 0.175$ 为系统参数，初始值设为：$x_1 = 0.2$，$y_1 = 0.21$，$z_1 = 0.211$，$x_2 = 1$，$y_2 = 3$，$z_2 = 0.111$. 仿真后，同步误差如图 2、图 3 和图 4 所示. 同步误差 $e_1$，$e_2$，$e_3$ 随时间渐近趋于零. 仿真结果表明响应系统与驱动系统实现了同步，说明依据定理 1 设计的控制器有效. 仿真结果既验证了定理 1 的正确性，也说明了控制器设计方法的合理性.

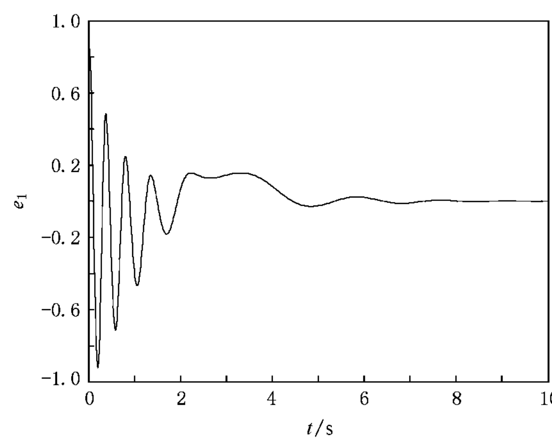


图 2　同步误差 $e_1$ 随时间演化图

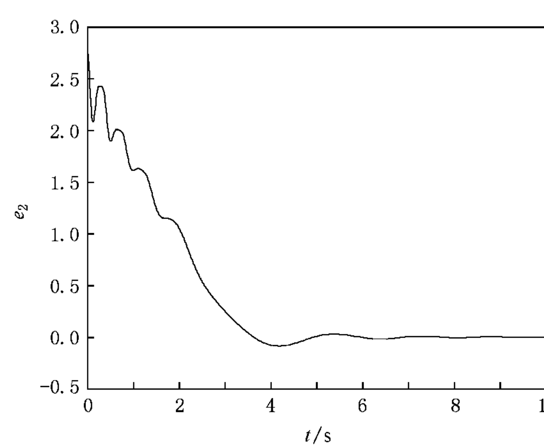


图 3　同步误差 $e_2$ 随时间演化图

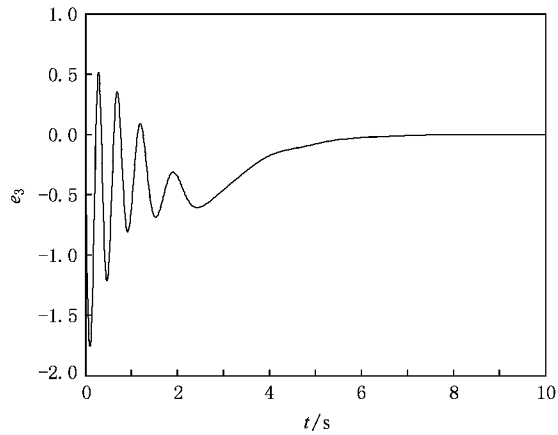


图4 同步误差 $e_3$ 随时间演化图

## 5. 结 论

本文提出了一个新的分数阶系统稳定性判定理论,并将 back-stepping 控制器设计方法拓展到分数阶系统,实现了分数阶 Newton-Leipnik 混沌系统同步.该理论的成立为分数阶系统多种控制与同步方法打下了理论基础,使分数阶系统的控制与同步得到简化,具有理论意义和实际意义.


[1] Butzer P L, Westphal U 2000 *An Introduction to Fractional Calculus* (Singapore: World Scientific)

[2] Kenneth S M, Bertram R 1993 *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations* (US: Wiley-Interscience)

[3] Podlubny I 1999 *Fractional Differential Equations* (NewYork: Academic Press)

[4] Agrawal O P, Tenreiro J A 2004 *Nonli. Dynam.* **38** 1

[5] Koeller R C 1984 *J. Appl. Mech* **51** 229

[6] Ahmad W, Sprott J C 2003 *Chaos, Soliton. Fract.* **16** 339

[7] Tang G N 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 1 (in Chinese) [唐国宁 2004 物理学报 **53** 1]

[8] Li Z, Han C Z 2002 *Chin. Phys.* **11** 9

[9] Yue D 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 292 (in Chinese) [岳 冬 2003 物理学报 **52** 292]

[10] Hasler M 1998 *J. Bifur. Chaos* **8** 647

[11] Liu F, Mu Z L, Qiu Z L 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 1198 (in Chinese) [刘 峰、穆肇骊、邱祖廉 1999 物理学报 **48** 1198]

[12] Yang L B, Yang T 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 636 (in Chinese) [杨林保、杨 涛 2000 物理学报 **49** 636]

[13] Yin X H, Ren Y, Shan X M 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1948 (in Chinese) [尹逊和、任 勇、山秀明 2002 物理学报 **51** 1948]

[14] Liu F C, Wang J, Peng H P, Li L X 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1954 (in Chinese) [刘福才、王 娟、彭海朋、李丽香 2002 物理学报 **51** 1954]

[15] Lü L, Guo Z A, Li Y, Xia X L 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 95 (in Chinese) [吕 翎、郭治安、李 岩、夏晓岚 2007 物理学报 **56** 95]

[16] Matignon D 1996 *IMACS, IEEE-SMC*, Lille, France 963

[17] Hu J B, Han Y, Zhao L D 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 7522 (in Chinese) [胡建兵、韩 焱、赵灵冬 2008 物理学报 **57** 7522]

[18] Leipnik R B, Newton T A 1981 *Phys. Lett.* A **86** 63

[19] Wang X, Tian L 2006 *Chaos, Soliton. Fract.* **27** 31

[20] Wen C C, Kuang T L, Yuan K 2008, *Chaos, Solito. Fract.* **36** 98

[21] Yan J P, Li C P 2004 *Chaos, Soliton. Fract.* **22** 443

[22] Wang J W, Xiong X H, Zhang Y B, 2006 *Physica* A **370** 279

# A novel stablility theorem for fractional systems and its applying in synchronizing fractional chaotic system based on back-stepping approach*

Hu Jian-Bing† Han Yan Zhao Ling-Dong

(National Key Laboratory For Electronic Measurement Technology, Key Laboratory of Instrumentation Science and Dynamic Measurement of Ministry of Education, North University of China, Taiyuan 030051, China)

(Received 26 July 2008; revised manuscript received 30 October 2008)

Abstract

A stablility theorem is proposed for fractional systems whose order is not greater than 1. Based on this theorem, back-stepping approach for designing controller is extended to fractional order chaotic system. And the fractional order Newton-Leipnik chaotic system is synchronized based on the extended backstepping approach. Numerical simulation certifies effectiveness of the method.

**Keywords**: fractional, chaos, synchronization, back-stepping method, stable, Newton-Leipnik

**PACC**: 0545

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 60372073).

† E-mail: hjb@nuc.edu.cn