

湍流对环状光束扩展的影响^{*}

陈晓文 季小玲[†]

(四川师范大学物理系, 成都 610068)

(2008 年 4 月 15 日收到, 2008 年 9 月 11 日收到修改稿)

采用积分变换技巧, 推导出了环状光束通过湍流大气传输二阶矩束宽的解析表达式, 并研究了湍流对环状光束扩展的影响. 另一方面, 通过分析二阶矩束宽给出了环状光束不受湍流影响的传输范围, 指出环状光束将不受到湍流大气影响的条件. 研究表明, 光束遮拦比 ϵ 、阶数 $M(N)$ 、波长 λ 越大, 束宽 w_0 越小, 则环状光束受湍流大气的影响就越小. 并对所得到的主要结果给出了合理的物理解释.

关键词: 环状光束, 大气湍流, 二阶矩束宽

PACC: 4260H, 9265

1. 引 言

空心光束由于其在现代光学和原子光学中的广泛应用而日趋受到人们的关注^[1], 对此科研工作者已作了许多研究^[2-13]. 环状光束是空心光束的一种特例, 高斯光束通过环状光阑会产生环状光束, 环状光阑存在于许多望远镜装置之中^[14]. 激光卫星通信及自由空间光通信系统的发射和接收装置中都要采用该种望远镜^[15, 16]. 此外, 由非稳腔产生的高功率激光也为环状光束^[17]. 因此, 研究环状光束的传输特性是非常重要的. 文献 [14] 研究发现, 环状光束通过自由空间传输在远场处其空心光强分布会消失, 成为类高斯分布.

激光在湍流大气中的传输是一个有重要理论和实际应用意义的课题^[18]. 近年来已有大量文献研究了各种激光束在湍流大气中的传输特性^[19-29]. 文献 [27, 28] 指出, 环状光束在湍流大气传输中其空心光强会随着湍流的增强而逐渐消失, 最终成为类高斯分布. 最近, 文献 [29] 研究了部分相干环状光束在湍流介质中的传输特性. 研究发现, 部分相干环状光束在湍流介质中传输时, 光强分布会首先由空心分布变为类高斯分布, 然后从类高斯分布又变为空心分布. 随着传输距离的增大, 最后光强分布转化为类高斯形状. 然而, 这些研究都仅限于湍流对环状光束光

强分布的影响^[27-30], 并没有涉及湍流对环状光束扩展影响的定量研究.

本文采用积分变换技巧推导出环状光束通过湍流大气传输的二阶矩束宽的解析表达式, 并利用二阶矩束宽公式定量研究湍流对环状光束扩展的影响, 给出环状光束受湍流大气影响的条件, 得到一些有意义的结果, 并进行了合理的物理解释.

2. 光束模型

环状光束可由两束宽度不同的平顶光束(光束 1 和光束 2)之差构成. 设光束 1 和光束 2 在 $z=0$ 处的复振幅分别为 U_{01} 和 U_{02} , 则环状光束在源场($z=0$)处的复振幅表达式为^[6, 28]

$$U_0(\mathbf{r}', \rho) = U_{01}(\mathbf{r}', \rho) - U_{02}(\mathbf{r}', \rho), \quad (1)$$

其中^[30]

$$U_{01}(\mathbf{r}', \rho) = \sum_{m=1}^M \alpha_m \exp\left[-\left(mp_m \frac{x'^2}{w_0^2}\right)\right] \times \sum_{n=1}^N \alpha_n \exp\left[-\left(np_n \frac{y'^2}{w_0^2}\right)\right]. \quad (2)$$

将(2)式中的 w_0 换为 w'_0 , 即得 $U_{02}(\mathbf{r}', \rho)$. w_0 和 w'_0 分别为两个平顶光束的束宽, 且 $w_0 > w'_0$, 则 w'_0 和 w_0 可视为环状光束的内半径和外半径. 令 $w'_0 = \epsilon w_0$, ϵ 称为遮拦比, 显然 $0 < \epsilon < 1$. M 和 N 为平顶光

^{*} 国家自然科学基金(批准号:60778048)资助的课题.

[†] 通讯联系人. E-mail: jixl100@163.com

束的阶数.

$$\alpha_t = (-1)^{t+1} \frac{M!}{t(M-t)!},$$

$$p_t = \sum_{t=1}^M \frac{\alpha_t}{t} (t = m, m', n, n').$$

环状光束在 $z=0$ 处的交叉谱密度函数可表示为

$$I_{011}(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2, 0) = \sum_{m=1}^M \sum_{m'=1}^M \alpha_m \alpha_{m'} \exp\left[-\left(mp_m \frac{x_1'^2}{w_0^2} + m'p_{m'} \frac{x_2'^2}{w_0^2}\right)\right] \sum_{n=1}^N \sum_{n'=1}^N \alpha_n \alpha_{n'} \exp\left[-\left(np_n \frac{y_1'^2}{w_0^2} + n'p_{n'} \frac{y_2'^2}{w_0^2}\right)\right], \quad (4)$$

$$I_{012}(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2, 0) = \sum_{m=1}^M \sum_{m'=1}^M \alpha_m \alpha_{m'} \exp\left[-\left(mp_m \frac{x_1'^2}{w_0^2} + m'p_{m'} \frac{x_2'^2}{w_0^2}\right)\right] \sum_{n=1}^N \sum_{n'=1}^N \alpha_n \alpha_{n'} \exp\left[-\left(np_n \frac{y_1'^2}{w_0^2} + n'p_{n'} \frac{y_2'^2}{w_0^2}\right)\right]. \quad (5)$$

将(4)式中的 w_0 换为 w'_0 , 即得 $I_{022}(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2, 0)$ 将(5)

式中的 w_0 与 w'_0 互换, 即得 $I_{021}(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2, 0)$.

令(3)式中 $\mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}'_2$, 即可得源场($z=0$)处环状光束光强表达式. 图1为源场处环状光束光强分布的等值线图.

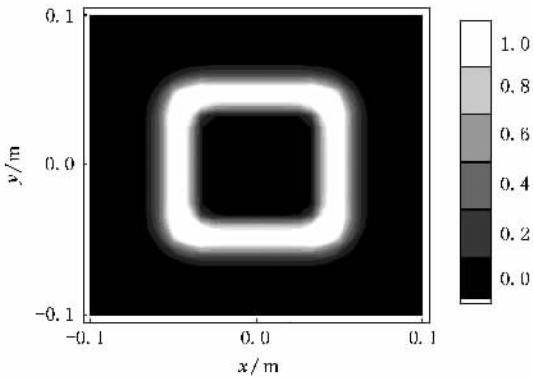


图1 源场处环状光束光强分布的等值线图 计算参数 $\epsilon = 0.9, w_0 = 0.05 \text{ m}, M = N = 10$

3. 环状光束在湍流中的二阶矩束宽

基于广义惠更斯-菲涅耳原理, 环状光束沿 z 方向传输的平均光强为^[18]

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(\mathbf{r}, z) &= \left(\frac{k}{2\pi z}\right)^2 \iint d^2 r'_1 \iint d^2 r'_2 W_0(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2, 0) \\ &\times \exp\left\{\left(\frac{ik}{2z}\right)[(\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}'_2) \cdot \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'_1 - \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'_2]\right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &W_0(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2, 0) \\ &= U_0^*(\mathbf{r}'_1, 0)U_0(\mathbf{r}'_2, 0) \\ &= I_{011}(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2, 0) + I_{022}(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2, 0) \\ &\quad - I_{012}(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2, 0) - I_{021}(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2, 0), \quad (3) \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} &\times \exp[\Psi^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}'_1, z) \\ &+ \Psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}'_2, z)] \Big]_m, \quad (6) \end{aligned}$$

其中 $\mathbf{r}'_j \equiv (x'_j, y'_j)$ ($j=1, 2$) 和 $\mathbf{r} \equiv (x, y)$ 分别为源场平面处($z=0$)和 z 平面处的二维矢量坐标, k 为波数 ($k=2\pi/\lambda$), $\Psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}', z)$ 表示湍流大气对球面波影响的随机相位因子, \cdot 表示场的系综平均, \cdot_m 表示湍流大气的系综平均, 且^[18]

$$\begin{aligned} &\exp[\Psi^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}'_1, z) + \Psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}'_2, z)]_m \\ &= \exp\left\{-4\pi^2 k^2 z \int_0^\infty \int_0^\infty k\Phi_n \right. \\ &\quad \times [1 - J_0(\kappa\xi|\mathbf{r}'_2 - \mathbf{r}'_1|)] d\kappa d\xi\Big\}, \quad (7) \end{aligned}$$

其中 $J_0(\cdot)$ 为零阶 Bessel 函数, $\Phi_n(\kappa)$ 为湍流大气介质的折射率起伏空间谱密度函数.

为了便于积分, 引入新的变量, 令

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \frac{\mathbf{r}'_2 + \mathbf{r}'_1}{2}, \\ \mathbf{v} &= \mathbf{r}'_2 - \mathbf{r}'_1. \quad (8) \end{aligned}$$

(6)式可写为

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(\mathbf{r}, z) &= \left(\frac{k}{2\pi z}\right)^2 \iint d^2 u \iint d^2 v W_0(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2, 0) \\ &\times \exp\left(-i\frac{k}{z}\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}\right) \exp\left(i\frac{k}{z}\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}\right) \\ &\times \exp\left\{-4\pi^2 k^2 z \int_0^\infty \int_0^\infty \kappa\Phi_n(\kappa) \right. \\ &\quad \times [1 - J_0(\kappa\xi v)] d\kappa d\xi\Big\}. \quad (9) \end{aligned}$$

将(3)式代入(9)式,并利用(8)式,得到

$$K(\mathbf{r}, z) = I_{11}(\mathbf{r}, z) + I_{22}(\mathbf{r}, z) \quad \text{其中}$$

$$- I_{12}(\mathbf{r}, z) - I_{21}(\mathbf{r}, z), \quad (10)$$

$$I_{11}(\mathbf{r}, z) = \left(\frac{k}{2\pi z}\right)^2 \iint d^2 u \iint d^2 v \sum_{m=1}^M \sum_{m'=1}^M \alpha_m \alpha_{m'} \exp\left[-\left(mp_m \frac{(u_x - v_x/2)^2}{w_0^2} + m'p_{m'} \frac{(u_x + v_x/2)^2}{w_0^2}\right)\right] \\ \times \sum_{n=1}^N \sum_{n'=1}^N \alpha_n \alpha_{n'} \exp\left[-\left(np_n \frac{(u_y - v_y/2)^2}{w_0^2} + n'p_{n'} \frac{(u_y + v_y/2)^2}{w_0^2}\right)\right] \\ \times \exp\left(-i \frac{k}{z} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}\right) \exp\left(i \frac{k}{z} \mathbf{r} \cdot \mathbf{v}\right) \exp\left\{-4\pi^2 k^2 z \int_0^\infty \kappa \Phi_n(\kappa) [1 - J_0(\kappa \xi v)] d\kappa d\xi\right\}, \quad (11)$$

$$I_{12}(\mathbf{r}, z) = \left(\frac{k}{2\pi z}\right)^2 \iint d^2 u \iint d^2 v \sum_{m=1}^M \sum_{m'=1}^M \alpha_m \alpha_{m'} \exp\left[-\left(mp_m \frac{(u_x - v_x/2)^2}{w_0^2} + m'p_{m'} \frac{(u_x + v_x/2)^2}{w_0^2}\right)\right] \\ \times \sum_{n=1}^N \sum_{n'=1}^N \alpha_n \alpha_{n'} \exp\left[-\left(np_n \frac{(u_y - v_y/2)^2}{w_0^2} + n'p_{n'} \frac{(u_y + v_y/2)^2}{w_0^2}\right)\right] \\ \times \exp\left(-i \frac{k}{z} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}\right) \exp\left(i \frac{k}{z} \mathbf{r} \cdot \mathbf{v}\right) \exp\left\{-4\pi^2 k^2 z \int_0^\infty \kappa \Phi_n(\kappa) [1 - J_0(\kappa \xi v)] d\kappa d\xi\right\}. \quad (12)$$

将(11)式中的 w_0 换为 w'_0 , 即得 $I_{22}(\mathbf{r}, z)$; 将(12)式中的 w_0 与 w'_0 互换, 即得 $I_{21}(\mathbf{r}, z)$.

二阶矩束宽定义为^[31]

$$w^2(z) = \frac{2 \iint r^2 K(\mathbf{r}, z) d^2 r}{\iint K(\mathbf{r}, z) d^2 r}. \quad (13)$$

通过复杂积分运算(见附录), 得到环状光束在湍流大气中的二阶矩束宽为

$$w^2(z) = w_p^2 + w_d^2 z^2 + Fz^3, \quad (14)$$

其中

$$w_p^2 = w_0^2 \left\{ \sum_{m=1}^M \sum_{m'=1}^M \sum_{n=1}^N \sum_{n'=1}^N \right. \\ \times \left[\frac{P}{\sqrt{Q_1 Q_2}} \left(\frac{1}{Q_1} + \frac{1}{Q_2} \right) (1 + \varepsilon^4) \right. \\ \left. - \frac{P\varepsilon^4}{\sqrt{Q_3 Q_4}} \left(\frac{1}{Q_3} + \frac{1}{Q_4} \right) \right. \\ \left. - \frac{P\varepsilon^4}{\sqrt{Q_5 Q_6}} \left(\frac{1}{Q_5} + \frac{1}{Q_6} \right) \right] \Big\} / C, \quad (15)$$

$$w_d^2 = \left\{ \sum_{m=1}^M \sum_{m'=1}^M \sum_{n=1}^N \sum_{n'=1}^N \frac{4}{w_0^2 k^2} \right. \\ \times \left[\frac{2P}{\sqrt{Q_1 Q_2}} \left(\frac{R_1}{Q_1} + \frac{R_2}{Q_2} \right) \right. \\ \left. - \frac{P\varepsilon^2}{\sqrt{Q_3 Q_4}} \left(\frac{R_1}{Q_3} + \frac{R_2}{Q_4} \right) \right. \\ \left. - \frac{P\varepsilon^2}{\sqrt{Q_5 Q_6}} \left(\frac{R_1}{Q_5} + \frac{R_2}{Q_6} \right) \right] \Big\} / C, \quad (16)$$

$$F = \frac{8}{3} \pi^2 \int_0^\infty \kappa^3 \Phi_n(\kappa) d\kappa. \quad (17)$$

这里

$$C = \sum_{m=1}^M \sum_{m'=1}^M \sum_{n=1}^N \sum_{n'=1}^N \left\{ \frac{P}{\sqrt{Q_1 Q_2}} (1 + \varepsilon^2) \right. \\ \left. - \left(\frac{P}{\sqrt{Q_3 Q_4}} + \frac{P}{\sqrt{Q_5 Q_6}} \right) \varepsilon^2 \right\}, \quad (18)$$

$$P = \alpha_m \alpha_{m'} \alpha_n \alpha_{n'}, \quad (19)$$

$$Q_1 = mp_m + m'p_{m'}, \quad (20)$$

$$Q_3 = \varepsilon^2 mp_m + m'p_{m'}, \quad (21)$$

$$Q_5 = mp_m + \varepsilon^2 m'p_{m'}, \quad (22)$$

$$R_1 = (mp_m) \chi (m'p_{m'}). \quad (23)$$

将(20)–(23)式中的 m 及 m' 分别改为 n 和 n' , 即得相应的 Q_2, Q_4, Q_6 和 R_2 .

(14)式的前两项表示环状光束通过自由空间传输的二阶矩束宽, 它与光束参数 ε, M 或 N, λ 和 w_0 有关, 第三项为湍流大气造成的光束扩展, 它与光束参数无关, 并且随着 C_n^2 和 z 的增大而增大.

若令(14)式中的 $U_0(\mathbf{r}', 0) = U_{01}(\mathbf{r}', 0)$, 则(14)式简化为平顶光束在湍流大气中的二阶矩束宽公式, 即

$$w^2(z) = \frac{w_0^2 \sum_{m=1}^M \sum_{m'=1}^M \sum_{n=1}^N \sum_{n'=1}^N \frac{P}{\sqrt{Q_1 Q_2}} \left(\frac{1}{Q_1} + \frac{1}{Q_2} \right)}{\sum_{m=1}^M \sum_{m'=1}^M \sum_{n=1}^N \sum_{n'=1}^N \frac{P}{\sqrt{Q_1 Q_2}}} + \frac{\frac{4}{w_0^2 k^2} \sum_{m=1}^M \sum_{m'=1}^M \sum_{n=1}^N \sum_{n'=1}^N \frac{P}{\sqrt{Q_1 Q_2}} \left(\frac{R_1}{Q_1} + \frac{R_1}{Q_2} \right)}{\sum_{m=1}^M \sum_{m'=1}^M \sum_{n=1}^N \sum_{n'=1}^N \frac{P}{\sqrt{Q_1 Q_2}}} \times z^2 + Fz^3. \quad (24)$$

4. 环状光束扩展受湍流影响的范围

若 $C_n^2 = \alpha$ (自由空间) (14)式简化为

$$w^2(z)|_{\text{free}} = w_p^2 + w_d^2 z^2. \quad (25)$$

光束在自由空间传输, 当其横截面积扩展到源场处的两倍时, 光束所传输的距离定义为瑞利区间^[32]. 利用(25)式, 瑞利区间可表示为

$$z_R = \frac{w_p}{w_d}. \quad (26)$$

按照文献[33], 我们采用湍流距离 z_T (turbulence distance) 定量描述湍流对环状光束扩展的影响, 其定义为

$$\frac{w^2(z_T) - w^2(z_T)|_{\text{free}}}{w^2(z_T)} = 0.1, \quad (27)$$

即 z_T 表示由于湍流大气导致的光束横截面积扩展达 10% 时的传输距离. 一般情况下, z_T 的解析表达式难以得到, 只能由(27)式数值求解. 本文仅求 $z_T/z_R \gg 1$ 和 $z_T/z_R \ll 1$ 两种特殊情况下 z_T 的解析式.

若 $z_T/z_R \gg 1$ (即光束传输距离大于瑞利区间时湍流才会引起明显的光束扩展) 时(14)和(25)式的第一项可忽略, 即

$$w^2(z) \approx w_d^2 z^2 + Fz^3, \quad (28)$$

$$w^2(z)|_{\text{free}} \approx w_d^2 z^2. \quad (29)$$

将(28)(29)式代入(27)式可得

$$z_T \approx \frac{w_d^2}{9F}. \quad (30)$$

(30)式表明, z_T 随折射率结构常数 C_n^2 增大而减小, 随波长 λ 的增大而增大, 且与光束参数 ϵ , M 或 N 有关.

若 $z_T/z_R \ll 1$ (即光束在瑞利区间内湍流就对光

束扩展起作用) 时(14)和(25)式的第二项可被忽略, 即

$$w^2(z) \approx w_p^2 + Fz^3, \quad (31)$$

$$w^2(z)|_{\text{free}} \approx w_p^2. \quad (32)$$

将(31)(32)式代入(27)式可得

$$z_T \approx \left(\frac{w_p^2}{9F} \right)^{1/3}. \quad (33)$$

由(33)式可知, z_T 随折射率结构常数 C_n^2 的增大而减小, 且与 ϵ 及 M 或 N 有关, 而与波长 λ 无关.

5. 数值计算结果及分析

若采用 Von Karman 谱, 即^[18]

$$\Phi_n(\kappa) = 0.033 C_n^2 \left(\kappa^2 + \frac{1}{L_0^2} \right)^{-11/6} \times \exp\left(-\frac{\kappa^2}{\kappa_m^2}\right). \quad (34)$$

其中, C_n^2 为折射率结构常数, 它表征湍流的强弱, $\kappa_m = 5.92/l_0$, l_0 和 L_0 分别为湍流的内尺度和外尺度.

在本文数值计算中, 我们分别取 $l_0 = 0.01 \text{ m}$, $L_0 = 10 \text{ m}$. 将(34)式及 l_0 和 L_0 的典型值代入(17)式, 得到

$$F = 18.846 C_n^2. \quad (35)$$

利用(14)式对环状光束通过湍流大气传输其二阶矩束宽随各参数变化作了数值计算和分析.

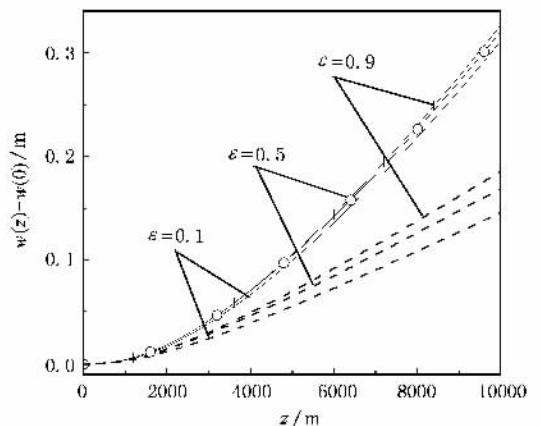


图 2 不同遮挡比 ϵ 情况下, $w^2(z) - w^2(0)$ 随 z 的变化. 计算参数 $\lambda = 1.54 \times 10^{-6} \text{ m}$, $w_0 = 0.05 \text{ m}$, $M = N = 10$, 其中实线表示 $C_n^2 = 10^{-15} \text{ m}^{-2/3}$, 虚线表示 $C_n^2 = 10^{-15} \text{ m}^{-2/3}$.

图 2—5 为环状光束的二阶矩束宽的差值 $w^2(z) - w^2(0)$ 随传输距离 z 的变化曲线, 图中实线和虚线分别代表光束在湍流大气和自由空间中传输的两种

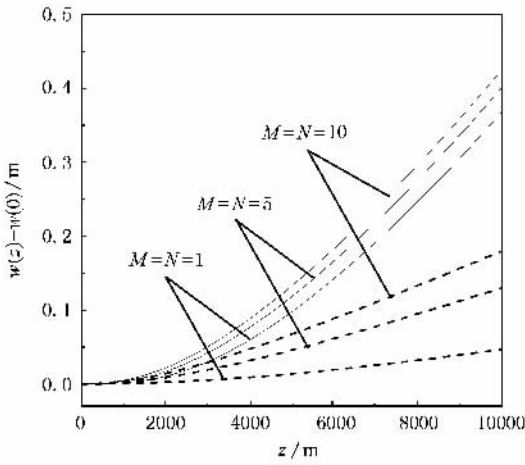


图3 不同阶数 M/N 情况下, $w(z) - w(0)$ 随 z 的变化 计算参数 $\lambda = 1.54 \times 10^{-6} \text{ m}$, $w_0 = 0.05 \text{ m}$, $\epsilon = 0.9$, 其中实线表示 $C_n^2 = 10^{-15} \text{ m}^{-2/3}$, 虚线表示 $C_n^2 = 0$

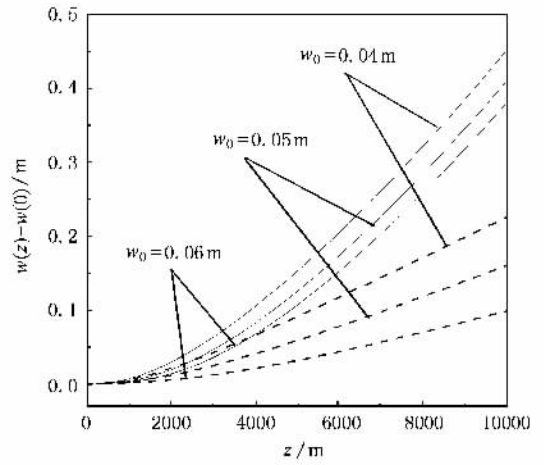


图5 不同束宽 w_0 情况下, $w(z) - w(0)$ 随 z 的变化 计算参数 $\lambda = 1.54 \times 10^{-6} \text{ m}$, $\epsilon = 0.9$, $M = N = 10$, 其中实线表示 $C_n^2 = 10^{-14} \text{ m}^{-2/3}$, 虚线表示 $C_n^2 = 0$

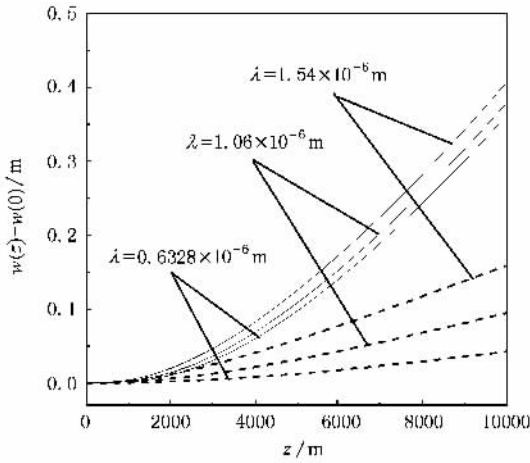


图4 不同波长 λ 情况下, $w(z) - w(0)$ 随 z 的变化 计算参数 $\epsilon = 0.9$, $w_0 = 0.05 \text{ m}$, $M = N = 10$, 其中实线表示 $C_n^2 = 10^{-14} \text{ m}^{-2/3}$, 虚线表示 $C_n^2 = 0$

情况.图2表明,环状光束在自由空间中传输时, $w(z) - w(0)$ 随 ϵ 增大而增大(见虚线),而在湍流中传输时,各曲线互相靠拢(见实线),即实线与虚线之间的差别随 ϵ 增大而减小(例如当 $z = 10 \text{ km}$, $\epsilon = 0.1, 0.5, 0.9$ 时,其差别为 $0.1655, 0.1512, 0.1405 \text{ m}$).因此,遮拦比 ϵ 越大,环状光束受湍流大气的影响就越小.同样,图3—5表明,在自由空间中, $w(z) - w(0)$ 随 M 或 N 和 λ 的增大而增大,随 w_0 的增大而减小.但是, $w(z) - w(0)$ 在湍流大气与

自由空间中的差别(实线与虚线的差别)随 M 或 N , λ 的增大和 w_0 的减小而减小.因此, M 或 N , λ 越大, w_0 越小,环状光束受湍流的影响越小.

文献[33]研究了高斯-谢尔模型光束的湍流距离 z_T 随相关长度 σ_0 的变化,文献[25]对部分相干厄米-高斯光束的 z_T 随阶数 m 和波长 λ 的变化作了分析.为了节省篇幅,本文仅数值分析环状光束的 z_T 随光束遮拦比 ϵ 的变化情况(见图6),其中图6(a)~(c)满足条件 $z_T/z_R \gg 1$,图6(d)~(f)满足条件 $z_T/z_R \ll 1$.由图6可知, $z_T/z_R \gg 1$ 时,湍流距离 z_T 随 ϵ 的增大而增大(例如 $z = 10 \text{ km}$, $\epsilon = 0.1, 0.5, 0.9$ 时,相对应的 $z_T = 1392, 1996, 2331 \text{ m}$).同样,在 $z_T/z_R \ll 1$ 时, z_T 也随 ϵ 的增大而增大(此时, z_T 分别为 $1950, 2113, 2413 \text{ m}$). z_T 越大,说明光束受湍流影响越小.可以看出,由参数 z_T 描述所得结论与图2所得结论是一致的.

一般而言,光束在湍流大气中传输其光束扩展由以下两个因素确定:一是自由空间的衍射,二是湍流大气.物理上,原有的光束扩展会减小湍流大气对光束扩展的影响.由图2—5(虚线)可知,在自由空间中, ϵ , λ 及 M 或 N 越大, w_0 越小,则环状光束扩展越大.这说明 ϵ , λ 及 M 或 N 越大, w_0 越小,则环状光束原有的光束扩展越大,因此环状光束受湍流的影响越小.



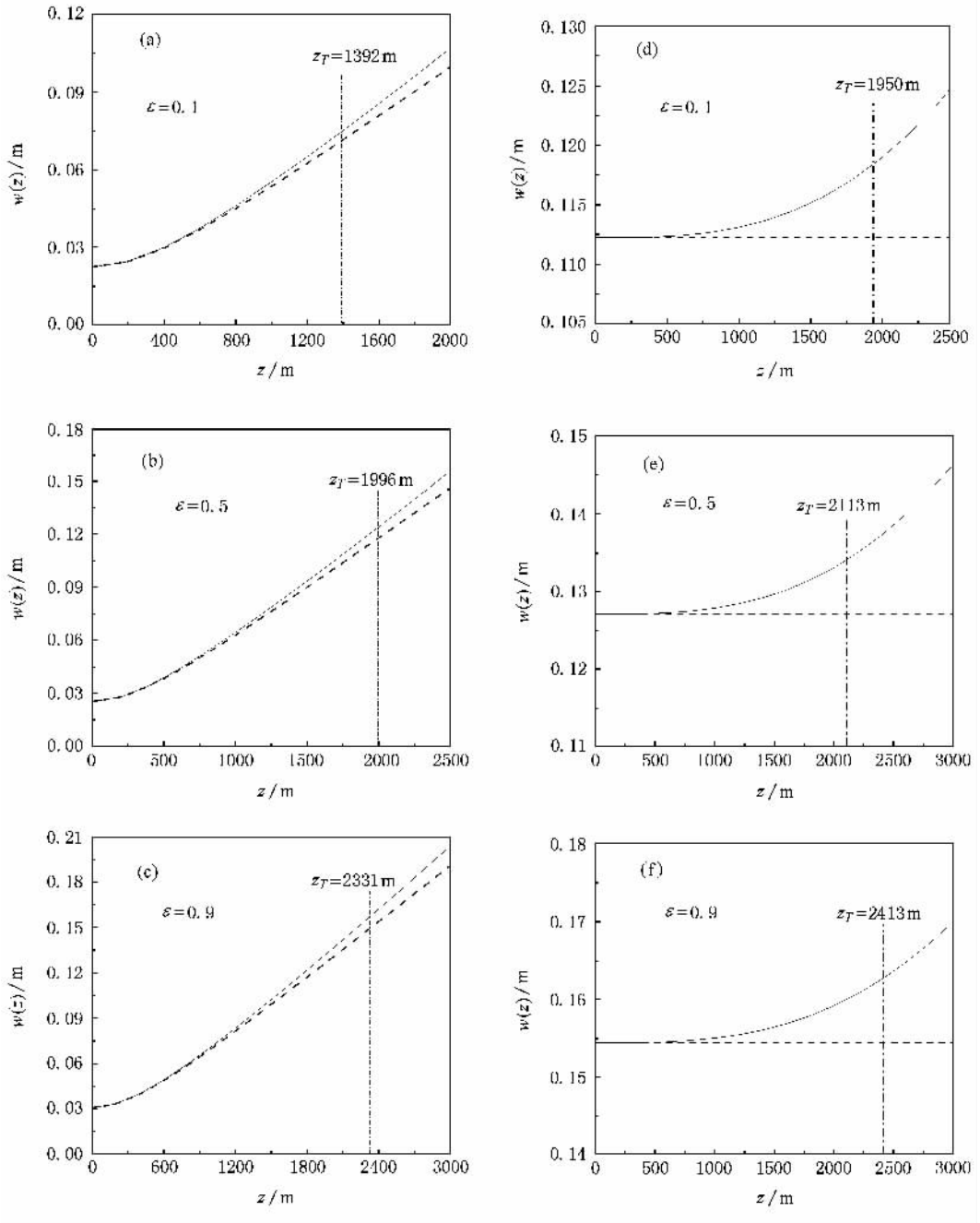


图 6 不同遮拦比 ε 情况下, 二阶矩束宽 $w(z)$ 随 z 的变化. (a)–(c) $z_T/z_R \gg 1$ 时, $\lambda = 1.54 \times 10^{-6}$ m, $M = N = 10$, $w_0 = 0.02$ m; (d)–(f) $z_T/z_R \ll 1$ 时, $\lambda = 1.54 \times 10^{-6}$ m, $M = N = 10$, $w_0 = 0.1$ m. 实线表示 $C_n^2 = 10^{-14}$ m $^{-2/3}$, 虚线表示 $C_n^2 = 0$

6. 结 论

本文采用两束宽度不同的平顶光束之差构成了环状光束模型, 利用积分变换技巧推导出环状光束通过湍流大气传输其二阶矩束宽的解析表达式, 并研究了湍流对其光束扩展的影响. 特别是采用湍流

距离 z_T (即由于湍流导致的光束横截面积扩展达 10% 时的传输距离) 定量地研究了环状光束受湍流影响的范围, 并给出了两种特殊情况下 z_T 的解析表达式. 研究表明, 环状光束在湍流大气中传输其光束扩展由光束参数 (即光束遮拦比 ε 、阶数 M 或 N 、波长 λ 及环状光束外半径 w_0) 和折射率结构常数 C_n^2 以及光束传输距离 z 共同确定. ε , λ 及 M 或 N 越

大, w_0 越小, 则湍流对环状光束扩展影响越小. 该结果对高功率激光远程大气能量输运具有重要意义.

附录

下面给出二阶矩束宽 $w^2(z)$ 的推导过程.

(13) 式可写为

$$w^2 = \frac{2F_1}{F_5} = \frac{2F_1 + 2F_2 - 2F_3 - 2F_4}{F_5}, \quad (A1)$$

其中

$$F_1 = \iint r^2 I_{11}(r, z) d^2 r, \quad (A2)$$

$$F_2 = \iint r^2 I_{22}(r, z) d^2 r, \quad (A3)$$

$$F_3 = \iint r^2 I_{12}(r, z) d^2 r, \quad (A4)$$

$$F_4 = \iint r^2 I_2(r, z) d^2 r, \quad (A5)$$

$$F_5 = \iint \mathcal{K}(r, z) d^2 r. \quad (A6)$$

将 (11) 式代入 (A2) 式可得

$$F_1 = F_{11} + F_{12}. \quad (A7)$$

这里

$$F_{11} = - \left(\frac{z}{k} \right)^2 \iint d^2 u \iint d^2 v \sum_{m=1}^M \sum_{m'=1}^M \alpha_m \alpha_{m'} \exp \left[- \left(mp_m \frac{(u_x - v_x/2)^2}{w_0^2} + m' p_{m'} \frac{(u_x + v_x/2)^2}{w_0^2} \right) \right] \\ \times \sum_{n=1}^N \sum_{n'=1}^N \alpha_n \alpha_{n'} \exp \left[- \left(np_n \frac{(u_y - v_y/2)^2}{w_0^2} + n' p_{n'} \frac{(u_y + v_y/2)^2}{w_0^2} \right) \right] \\ \times \exp \left(- i \frac{k}{z} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \right) \exp \left\{ - 4\pi^2 k^2 z \int_0^{\infty} \kappa \Phi_n(\kappa [1 - J_0(\kappa \xi v)]) d\kappa d\xi \right\} \delta'(v_x) \delta(v_y), \quad (A8)$$

$$F_{12} = - \left(\frac{z}{k} \right)^2 \iint d^2 u \iint d^2 v \sum_{m=1}^M \sum_{m'=1}^M \alpha_m \alpha_{m'} \exp \left[- \left(mp_m \frac{(u_x - v_x/2)^2}{w_0^2} + m' p_{m'} \frac{(u_x + v_x/2)^2}{w_0^2} \right) \right] \\ \times \sum_{n=1}^N \sum_{n'=1}^N \alpha_n \alpha_{n'} \exp \left[- \left(np_n \frac{(u_y - v_y/2)^2}{w_0^2} + n' p_{n'} \frac{(u_y + v_y/2)^2}{w_0^2} \right) \right] \\ \times \exp \left(- i \frac{k}{z} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \right) \exp \left\{ - 4\pi^2 k^2 z \int_0^{\infty} \kappa \Phi_n(\kappa [1 - J_0(\kappa \xi v)]) d\kappa d\xi \right\} \delta'(v_y) \delta(v_x), \quad (A9)$$

其中 δ 表示 Dirac delta 函数, δ'' 即为其二阶导数. 为得 (A7)~(A9) 式, 我们运用积分公式

$$\int x^2 \exp(-i2\pi xs) dx = - \frac{1}{(2\pi)^2} \delta''(s). \quad (A10)$$

在 (A8) 式中, 首先对 v_y 和 u_y 积分, 得

$$F_{11} = - \left(\frac{z}{k} \right)^2 \sum_{m=1}^M \sum_{m'=1}^M \sum_{n=1}^N \sum_{n'=1}^N \frac{\sqrt{\pi} w_0 P}{\sqrt{Q_2}} \int du_x \int dv_x \\ \times \exp \left[- \left(mp_m \frac{(u_x - v_x/2)^2}{w_0^2} + m' p_{m'} \frac{(u_x + v_x/2)^2}{w_0^2} \right) \right] \exp \left(- i \frac{k}{z} u_x v_x \right) \\ \times \exp \left\{ - 4\pi^2 k^2 z \int_0^{\infty} \kappa \Phi_n(\kappa [1 - J_0(\kappa \xi v_x)]) d\kappa d\xi \right\} \delta'(v_x). \quad (A11)$$

利用公式 $\int \mathcal{K}(x) \delta''(x) dx = f''(0)$ 其中 f 为任意函数, f'' 为该函数的二阶导数, 对 (A11) 式中的 v_x 积分, 然后再对 u_x 积分, 即可得到 F_{11} 的解析式, 但为节省篇幅在此省略. 同理可推导出 F_{12} 的解析式. 这样 (A7) 式可表示为

$$F_1 = \sum_{m=1}^M \sum_{m'=1}^M \sum_{n=1}^N \sum_{n'=1}^N \frac{\pi w_0^2 P}{\sqrt{Q_1 Q_2}} \left[w_0^2 \left(\frac{1}{2Q_1} + \frac{1}{2Q_2} \right) + \frac{1}{w_0^2} \left(\frac{R_1}{Q_1} + \frac{R_2}{Q_2} \right) \frac{2z^2}{k^2} + \frac{4}{3} \pi^2 z^3 \int_0^{\infty} \kappa^3 \Phi_n(\kappa) d\kappa \right]. \quad (A12)$$

采用该种运算方法, 可得到

$$F_2 = \sum_{m=1}^M \sum_{m'=1}^M \sum_{n=1}^N \sum_{n'=1}^N \frac{\pi \epsilon^2 w_0^2 P}{\sqrt{Q_1 Q_2}} \left[\epsilon^2 w_0^2 \left(\frac{1}{2Q_1} + \frac{1}{2Q_2} \right) + \frac{1}{\epsilon^2 w_0^2} \left(\frac{R_1}{Q_1} + \frac{R_2}{Q_2} \right) \frac{2z^2}{k^2} + \frac{4}{3} \pi^2 z^3 \int_0^{\infty} \kappa^3 \Phi_n(\kappa) d\kappa \right]. \quad (A13)$$

将 Q_1, Q_2, R_1 和 R_2 分别换为 $Q_3, Q_4, \epsilon^2 R_1$ 和 $\epsilon^2 R_2$, 即得到 F_3 . 将 Q_1, Q_2, R_1 和 R_2 分别换为 $Q_5, Q_6, \epsilon^2 R_1$ 和 $\epsilon^2 R_2$, 即得到 F_4 .

由能量守恒定律 (A6) 式亦可写作 $F_5 = \iint \mathcal{K}(\mathbf{r}')$,
 将 (3) 式代入, 并令 $\mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}'_2 = \mathbf{r}'$ 积分后得到

$$F_5 = \sum_{m=1}^M \sum_{m'=1}^M \sum_{n=1}^N \sum_{n'=1}^N$$

$$\times \left(\frac{\pi w_0^2 P}{\sqrt{Q_1 Q_2}} + \frac{\pi w_0^2 \epsilon^2 P}{\sqrt{Q_1 Q_2}} - \frac{\pi w_0^2 \epsilon^2 P}{\sqrt{Q_3 Q_4}} - \frac{\pi w_0^2 \epsilon^2 P}{\sqrt{Q_5 Q_6}} \right). \quad (\text{A14})$$

将 F_1, F_2, F_3, F_4 和 F_5 的解析表达式代入 (A1) 式后, 得

$$w^2(z) = w_p^2 + w_d^2 z^2 + Fz^3. \quad (\text{A15})$$

- [1] Yin J ,Gao W ,Zhu Y 2003 *Progress in Optics* (Amsterdam :North-Holland Press)
- [2] Kuga T ,Torii Y ,Shiokawa N ,Hirano T ,Shimizu Y ,Sasada H 1997 *Phys. Rev. Lett.* **78** 4713
- [3] Ito H ,Nakata T ,Sakaki K ,Ohtsu M ,Lee K I ,Jhe W 1996 *Phys. Rev. Lett.* **76** 4500
- [4] Cai Y J ,Lu X H ,Lin Q 2003 *Opt. Lett.* **28** 1084
- [5] Cai Y J ,Lin Q 2004 *J. Opt. Soc. Am. A* **21** 1058
- [6] Cai Y J ,Zhang L 2006 *J. Opt. Soc. Am. B* **23** 1398
- [7] Cai Y J ,He S L 2006 *J. Opt. Soc. Am. A* **23** 1410
- [8] Cai Y J ,Chen C Y ,Wang F 2007 *Opt. Commun.* **278** 34
- [9] Cai Y J ,Zhang L 2006 *Opt. Commun.* **265** 607
- [10] Lü X ,Cai Y J 2007 *Phys. Lett. A* **369** 157
- [11] Cai Y J 2007 *Opt. Lett.* **32** 3179
- [12] Liu Z J ,Zhao H F ,Liu J L ,Lin J ,Ahmad M A ,Liu S T 2007 *Opt. Lett.* **32** 2076
- [13] Chakraborty R ,Ghosh A 2006 *J. Opt. Soc. Am. A* **23** 2278
- [14] Born M ,Wolf E 1997 *Principles of Optics* (Cambridge :Cambridge University Press)
- [15] Valdez E ,Agraz J 1999 *Laser Communication Links for Use Between Satellites* (San Diego :San Diego State University Press)
- [16] Chang J J 1994 *Appl. Opt.* **33** 2255
- [17] Siegman A E 1986 *Laser* (California :University Science Press)
- [18] Andrews L C ,Phillips R L 1998 *Laser Beam Propagation Through Random Media* (Bellingham ,Washington :SPIE Press)
- [19] Cai Y J ,He S L 2006 *Appl. Phys. Lett.* **89** 041117
- [20] Cai Y J 2006 *J. Opt. A* **8** 537
- [21] Cai Y J ,Chen Y T ,Eyyuboğlu H T ,Baykal Y 2007 *Opt. Lett.* **32** 2405
- [22] Chen Y T ,Cai Y J ,Eyyuboğlu H T ,Baykal Y 2008 *Appl. Phys. B* **90** 87
- [23] Cai Y J ,Lin Q ,Eyyuboğlu H T ,Baykal Y 2008 *Opt. Express* **16** 7665
- [24] Ji X L ,Huang T X ,Lü B D 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 978 (in Chinese) [季小玲、黄太星、吕百达 2006 物理学报 **55** 978]
- [25] Ji X L ,Chen X W ,Lü B D 2008 *J. Opt. Soc. Am. A* **25** 21
- [26] Cai Y J ,He S L 2006 *Opt. Lett.* **31** 568
- [27] Strömqvist Vetelino F E ,Andrews L C 2004 *SPIE* **5160** 86
- [28] Cai Y J ,He S L 2006 *Opt. Express* **14** 1353
- [29] Wang T ,Pu J X 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 6754 (in Chinese) [王涛、蒲继雄 2007 物理学报 **56** 6754]
- [30] Li Y 2002 *Opt. Commun.* **206** 225
- [31] Siegman A E 1990 *SPIE* **1224** 2
- [32] Gbur G ,Wolf E 2001 *Opt. Commun.* **199** 295
- [33] Gbur G ,Wolf E 2002 *J. Opt. Soc. Am. A* **19** 1592

Influence of turbulence on the spreading of annular beams^{*}

Chen Xiao-Wen Ji Xiao-Ling[†]

(*Department of Physics, Sichuan Normal University, Chengdu 610068, China*)

(Received 15 April 2008 ; revised manuscript received 11 September 2008)

Abstract

The closed-form expression for the mean squared beam width of annular beams propagating through atmospheric turbulence is derived by using the integral transform technique. The influence of turbulence on the spreading of annular beams is studied. On the other hand, the range of turbulence-independent propagation is obtained by examining the mean squared beam width, which indicates under what circumstances annular beams will be less affected by turbulence. It is shown that annular beams with larger obscure ratio ϵ , larger beam order $M(N)$, larger wave length λ , and smaller outer radius w_0 are less sensitive to the turbulence than those with smaller ϵ , $M(N)$, λ , and larger w_0 . The main results obtained in this paper are explained physically.

Keywords : annular beams , atmospheric turbulence , mean squared beam width

PACC : 4260H , 9265

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 60778048).

[†] Corresponding author. E-mail jixl100@163.com