

# 大气湍流中光束束宽扩展和角扩展的比较研究<sup>\*</sup>

杨爱林 李晋红 吕百达<sup>†</sup>

(四川大学激光物理与化学研究所, 成都 610064)  
(2008 年 6 月 30 日收到, 2008 年 8 月 9 日收到修改稿)

以厄米-双曲余弦-高斯(H-ChG)光束为例,对 H-ChG 光束通过大气湍流传输时的束宽扩展和角扩展做了详细研究.用相对束宽和相对角扩展代替束宽和角扩展来研究湍流对光束影响的灵敏程度.研究表明,折射率结构常数  $C_n^2$  越小,光束束宽扩展和角扩展越小.有较大阶数  $m, n$ , 较小参数  $\Omega_0$  和束腰宽度  $w_0$  H-ChG 光束的角扩展受湍流影响较小.当传输距离足够远时,这一结论对 H-ChG 光束的束宽扩展也成立.当传输距离不长时,对 H-ChG 光束相对束宽随  $\Omega_0$  和  $w_0$  的变化规律做了分析.用数值计算例做了说明,并对结果的正确性做了物理解释.厄米-高斯、双曲余弦高斯和高斯光束在大气湍流中的扩展可作为 H-ChG 光束的特例来处理.

关键词:束宽扩展和角扩展,大气湍流,厄米-双曲余弦-高斯光束

PACC:4260H, 9265D

## 1. 引 言

激光在湍流大气中的传输是一个有重要理论和实际应用的研究课题<sup>[1-2]</sup>.由于在随机介质中光传输问题的复杂性,常需使用简化的物理模型,繁冗的数值模拟也难以与实验结果做严格的定量比较.然而,理论研究得到的结果对实际应用有重要指导作用.文献中对不同类型的激光在湍流大气中的传输已做了广泛的研究<sup>[3-12]</sup>.例如完全相干高斯光束、厄米高斯(H-G)光束、拉盖尔高斯光束、厄米-正弦类-高斯光束,包括厄米-双曲余弦-高斯(H-ChG)光束、厄米-双曲正弦-高斯光束、厄米-余弦-高斯光束、厄米-正弦-高斯光束、余弦高斯、双曲余弦高斯(ChG)光束等,部分相干光,典型例为高斯-谢尔模型光束.理论研究和实验表明<sup>[5,13]</sup>,部分相干光较完全相干光受湍流的影响要小,尽管空间相干性越差,在自由空间中束宽扩展越大.在激光传输中,除了束宽扩展外还会出现角扩展.由于束宽和发散角是两个不同但相互有联系的物理概念,因而束宽扩展和角扩展的物理含义也不同但有联系.

本文以 H-ChG 光束为例,对湍流大气中光束束宽扩展和角扩展进行详细的比较研究,给出了解析

公式和典型数值计算例,说明湍流大气中 H-ChG 光束参数(光束阶数  $m, n$ ,束腰宽度  $w_0$ ,双曲余弦部分参数  $\Omega_0$ )变化对束宽扩展和角扩展的影响,并对所得结果作了合理的物理解释. H-ChG 是一类有较广泛代表性的光束, H-G, ChG 和高斯光束都可作为 H-ChG 光束的特例处理.文中对 H-G, ChG 和高斯光束在湍流大气中的束宽扩展和角扩展问题也做了分析和说明.本文所得结果深化了对湍流大气中光束扩展问题的认识,对激光在湍流大气中传输的光束束宽和角扩展控制及相关应用有实际意义.

## 2. 理 论

H-ChG 光束在入射面  $z = 0$  处的场分布为<sup>[10,14]</sup>

$$\begin{aligned} U(\boldsymbol{\rho}, z = 0) &= H_m\left(\frac{\sqrt{2}}{w_0}\rho_x\right) H_n\left(\frac{\sqrt{2}}{w_0}\rho_y\right) \\ &\times \exp\left(-\frac{\rho_x^2 + \rho_y^2}{w_0^2}\right) \cosh(\Omega_0\rho_x + \Omega_0\rho_y), \quad (1) \end{aligned}$$

式中  $w_0$  为高斯部分的束腰宽度,  $\Omega_0$  为与双曲余弦部分有关的参数,  $\boldsymbol{\rho} \equiv (\rho_x, \rho_y)$  为在  $z = 0$  面的二维位置矢量,  $H_m(\cdot), H_n(\cdot)$  分别为  $m$  和  $n$  阶厄米多项式.

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金(批准号:10574097, 10874125)资助的课题.

<sup>†</sup> 通讯联系人. E-mail: baidalu0@tom.com

由 (1) 式得到 H-ChG 光束在  $z = 0$  面的交叉谱密度函数  $W(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, z = 0)$  为

$$\begin{aligned} & W(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, z = 0) \\ &= H_m\left(\frac{\sqrt{2}}{w_0}\rho_{1x}\right) H_n\left(\frac{\sqrt{2}}{w_0}\rho_{1y}\right) \\ & \times \exp\left(-\frac{\rho_{1x}^2 + \rho_{1y}^2}{w_0^2}\right) \cosh(\Omega_0\rho_{1x} + \Omega_0\rho_{1y}) \\ & \times H_m\left(\frac{\sqrt{2}}{w_0}\rho_{2x}\right) H_n\left(\frac{\sqrt{2}}{w_0}\rho_{2y}\right) \\ & \times \exp\left(-\frac{\rho_{2x}^2 + \rho_{2y}^2}{w_0^2}\right) \cosh(\Omega_0\rho_{2x} + \Omega_0\rho_{2y}). \end{aligned} \quad (2)$$

由广义惠更斯-菲涅耳原理<sup>[15]</sup>, 在  $z$  面处 H-ChG 光束的交叉谱密度函数为

$$\begin{aligned} W(\boldsymbol{\rho}'_1, \boldsymbol{\rho}'_2, z) &= \left(\frac{k}{2\pi z}\right)^2 \iint d^2\rho_1 \iint d^2\rho_2 W(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, z = 0) \\ & \times \exp\left\{\frac{ikz}{2z}[(\boldsymbol{\rho}'_1 - \boldsymbol{\rho}_1) \cdot \boldsymbol{\rho}'_2 - (\boldsymbol{\rho}'_2 - \boldsymbol{\rho}_2) \cdot \boldsymbol{\rho}'_1]\right\} \\ & \times \exp[i\psi(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}'_1) + \psi^*(\boldsymbol{\rho}_2, \boldsymbol{\rho}'_2)]_m, \end{aligned} \quad (3)$$

式中  $\langle \cdot \rangle_m$  表示系综统计平均,  $*$  表示复共轭. 对  $\langle \cdot \rangle_m$  项使用 Rytov 相位结构函数的平方近似表示为<sup>[16]</sup>

$$\begin{aligned} & \exp[i\psi(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}'_1) + \psi^*(\boldsymbol{\rho}_2, \boldsymbol{\rho}'_2)]_m \\ & \approx \exp\left\{-\frac{1}{\rho_0^2}[(\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_2) \cdot \boldsymbol{\rho}'_1 + (\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_2) \cdot (\boldsymbol{\rho}'_1, \boldsymbol{\rho}'_2) \right. \\ & \left. + (\boldsymbol{\rho}'_1 - \boldsymbol{\rho}'_2) \cdot \boldsymbol{\rho}'_2]\right\}. \end{aligned} \quad (4)$$

这里  $\rho_0 = (0.545 C_n^2 k^2 z)^{-3/5}$  为球面波在湍流大气中传输的相关长度, 其中  $C_n^2$  为大气折射率结构常数.

(4) 式对强湍流和弱湍流情况都适用<sup>[17]</sup>.

将 (2) 和 (4) 式代入 (3) 式, 并令

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\rho}'_1 &= \boldsymbol{\rho}'_2 = \boldsymbol{\rho}', \\ \boldsymbol{u} &= \frac{\boldsymbol{\rho}_2 + \boldsymbol{\rho}_1}{2}, \\ \boldsymbol{v} &= \boldsymbol{\rho}_2 - \boldsymbol{\rho}_1, \end{aligned}$$

得到  $z$  处 H-ChG 光束的平均光强表达式

$$\begin{aligned} I(\boldsymbol{\rho}', z) &= W(\boldsymbol{\rho}', \boldsymbol{\rho}', z) \\ &= \left(\frac{k}{4\pi z}\right)^2 \iint d^2u \iint d^2v \\ & \times \exp\left(-\frac{2u^2}{w_0^2}\right) \exp\left(-\frac{v^2}{\epsilon^2}\right) \\ & \times \exp\left(-\frac{ik}{z}\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}\right) \exp\left(\frac{ik}{z}\boldsymbol{\rho}' \cdot \boldsymbol{v}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times H_m\left[\frac{\sqrt{2}}{w_0}\left(u_x - \frac{v_x}{2}\right)\right] H_m\left[\frac{\sqrt{2}}{w_0}\left(u_x + \frac{v_x}{2}\right)\right] \\ & \times H_n\left[\frac{\sqrt{2}}{w_0}\left(u_y - \frac{v_y}{2}\right)\right] H_n\left[\frac{\sqrt{2}}{w_0}\left(u_y + \frac{v_y}{2}\right)\right] \\ & \times \{\exp[2\Omega_0(u_x + u_y)] \\ & + \exp[-\Omega_0(v_x + v_y)] \\ & + \exp[\Omega_0(v_x + v_y)] \\ & + \exp[-2\Omega_0(u_x + u_y)]\}, \end{aligned} \quad (5)$$

式中

$$\frac{1}{\epsilon^2} = \frac{1}{2w_0^2} + \frac{1}{\rho_0^2}. \quad (6)$$

光束的均方根束宽定义为<sup>[5, 6]</sup>

$$\begin{aligned} u(z) &= \sqrt{\frac{\iint \iint \mathcal{K}(\boldsymbol{\rho}', z) \rho'^2 d^2\rho'}{\iint \iint \mathcal{K}(\boldsymbol{\rho}', z) \lambda^2 \rho'} } \\ &= \sqrt{\frac{R}{R_0}}. \end{aligned} \quad (7)$$

由于  $R_0$  不随  $z$  的变化而变化, 故可表示为

$$\begin{aligned} R_0 &= \iint \mathcal{K}(\boldsymbol{\rho}, z = 0) d^2\rho \\ &= \frac{1}{2} 2^{m+n-1} m! n! w_0^2 \pi \exp(w_0^2 \Omega_0^2) \\ & \times L_m^0(-w_0^2 \Omega_0^2) L_n^0(-w_0^2 \Omega_0^2) + 1, \end{aligned} \quad (8)$$

$$R = \iint \mathcal{K}(\boldsymbol{\rho}', z) \rho'^2 d^2\rho', \quad (9)$$

式中  $L_\alpha^0$  表示指数为  $\alpha$  的关联拉盖尔多项式.

将 (5) 式代入 (9) 式, 并利用积分公式<sup>[18]</sup>

$$\begin{aligned} & \int x^2 \exp(-i2\pi xs) dx \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^2} \delta''(s), \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} & \int \exp[-(x - y)^2] H_m(x) H_n(x) dx \\ &= 2^n \sqrt{\pi} m! y^{n-m} L_n^{n-m}(-2y^2), \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} & \int \exp(-x^2) H_m(x + y) H_n(x + z) dx \\ &= 2^n \sqrt{\pi} m! z^{n-m} L_n^{n-m}(-2yz) \end{aligned} \quad (12)$$

和  $\delta$  函数的性质, 可将  $R$  的表示为

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{2} \left(\frac{z}{k}\right)^2 2^{m+n-1} m! n! w_0^2 \pi \\ & \times [\exp(w_0^2 \Omega_0^2) \{P_{1x} + P_{1y}\} + (P_{2x} + P_{2y})]. \end{aligned} \quad (13)$$

这里

$$P_{1x} = L_n^0(-w_0^2 \Omega_0^2) \left[ \left(\frac{k^2 w_0^2}{4z^2} + \frac{2}{\epsilon^2}\right) L_m^0(-w_0^2 \Omega_0^2) \right]$$

$$+ \frac{k^2 w_0^4 \Omega_0^2}{4z^2} L_m^0(-w_0^2 \Omega_0^2) + 2 \left( \frac{1}{w_0^2} - \Omega_0^2 \right) + \frac{\mathcal{X}(m+n)}{w_0^2}, \quad (19)$$

$$+ \frac{k^2 w_0^4 \Omega_0^2}{z^2} L_{m-2}^2(-w_0^2 \Omega_0^2) + C_3 = 4(0.545 C_n^2)^{6/5} k^{2/5}. \quad (20)$$

(16) 式等号右边  $C_1/C_0$  和  $C_2 z^2/C_0$  项表示光束在自由空间中衍射引起束宽的展宽, 而  $C_3 z^{16/5}$  项是由于大气湍流引起的光束扩展. 在 (20) 式中令  $C_n^2 = 0$ , 得到 H-ChG 光束在自由空间中的束宽公式

$$u(z)_{\text{free}} = \sqrt{\frac{C_1}{C_0} + \frac{C_2}{C_0} z^2}. \quad (21)$$

为直观描述光束抗拒湍流扩展的能力, 引入相对束宽. 相对束宽定义为 H-ChG 光束在湍流大气中传输的束宽与同一 H-ChG 光束在自由空间传输的束宽之比, 即

$$\frac{u(z)_{\text{turb}}}{u(z)_{\text{free}}} = \sqrt{1 + \frac{C_3 z^{16/5}}{C_1/C_0 + C_2 z^2/C_0}}. \quad (22)$$

$u(z)_{\text{turb}}/u(z)_{\text{free}}$  越小, 湍流引起光束扩展就越小. 因此, 可用  $u(z)_{\text{turb}}/u(z)_{\text{free}}$  定量比较光束参数 (光束阶数  $m$ ,  $n$  参数  $\Omega_0$ , 束腰宽度  $w_0$ ) 变化时, 与自由空间比较, 在湍流大气中光束束宽扩展受湍流影响的大小.

由 (16) 式和角扩展定义<sup>[19]</sup> 得到 H-ChG 光束在湍流大气中的角扩展公式

$$\theta_{\text{spturb}} = \frac{u(z)}{z} \Big|_{z \rightarrow \infty} = \sqrt{\frac{C_2}{C_0} + C_3 z^{6/5}}. \quad (23)$$

令  $C_n^2 = 0$ , 得到 H-ChG 光束在自由空间中的角扩展公式

$$\theta_{\text{sfree}} = \frac{u(z)}{z} \Big|_{z \rightarrow \infty} = \sqrt{\frac{C_2}{C_0}}. \quad (24)$$

类似地, 引入相对角扩展

$$\frac{\theta_{\text{spturb}}}{\theta_{\text{sfree}}} = \sqrt{1 + \frac{C_3 z^{6/5}}{C_2/C_0}}. \quad (25)$$

用以定量比较光束参数变化时在湍流大气中光束角扩展受湍流影响的大小.

(16) 和 (23) 式是较为普遍的解析结果, 下面给出三个重要的特例.

当  $\Omega_0 = 0$  时 (16) 和 (23) 式化为 H-G 在湍流大气中的均方根束宽和角扩展公式

$$u(z)_{\text{turb}} = \sqrt{\frac{m+n+1}{2} w_0^2 + \frac{\mathcal{X}(m+n+1)}{k^2 w_0^2} z^2 + 4(0.545 C_n^2)^{6/5} k^{2/5} z^{16/5}}, \quad (26)$$

$$\theta_{\text{spturb}} = \sqrt{\frac{\mathcal{X}(m+n+1)}{k^2 w_0^2} + 4(0.545 C_n^2)^{6/5} k^{2/5} z^{6/5}}. \quad (27)$$

当  $m = n = 0$  时 (16) 和 (23) 式化为 ChG 光束在湍流大气中的均方根束宽和角扩展公式

$$+ \frac{k^2 w_0^4 \Omega_0^2}{z^2} L_{m-2}^2(-w_0^2 \Omega_0^2) + \left( \frac{2}{w_0^2} + \frac{k^2 w_0^2}{2z^2} \right) L_{m-1}^1(-w_0^2 \Omega_0^2) + \frac{k^2 w_0^4 \Omega_0^2}{z^2} L_{m-1}^1(-w_0^2 \Omega_0^2)], \quad (14)$$

$$P_{2x} = \left( \frac{k^2 w_0^2}{4z^2} + \frac{2}{\varepsilon^2} \right) L_m^0(0) - \Omega_0^2 L_m^0(0) + \left( \frac{2}{w_0^2} + \frac{k^2 w_0^2}{2z^2} \right) L_{m-1}^1(0). \quad (15)$$

将  $P_{1x}$  中  $m$  与  $n$  互换可得到  $P_{1y}$ , 将  $P_{2x}$  中  $m$  换成  $n$  得到  $P_{2y}$ .

将 (8) (13) 式代入 (7) 式, 得到 H-ChG 光束在湍流大气中的均方根束宽为

$$u(z)_{\text{turb}} = \sqrt{\frac{C_1}{C_0} + \frac{C_2}{C_0} z^2 + C_3 z^{16/5}}, \quad (16)$$

式中

$$C_0 = k^2 \left[ \exp(-w_0^2 \Omega_0^2) L_m^0(-w_0^2 \Omega_0^2) \times L_n^0(-w_0^2 \Omega_0^2) + 1 \right], \quad (17)$$

$$C_1 = k^2 w_0^2 \left\{ \exp(-w_0^2 \Omega_0^2) \left( \frac{1 + w_0^2 \Omega_0^2}{2} \times L_m^0(-w_0^2 \Omega_0^2) L_n^0(-w_0^2 \Omega_0^2) + w_0^2 \Omega_0^2 [L_n^0(-w_0^2 \Omega_0^2) L_{m-2}^2(-w_0^2 \Omega_0^2) + L_m^0(-w_0^2 \Omega_0^2) L_{n-2}^2(-w_0^2 \Omega_0^2)] + \frac{1 + 2w_0^2 \Omega_0^2}{2} [L_n^0(-w_0^2 \Omega_0^2) L_{m-1}^1(-w_0^2 \Omega_0^2) + L_m^0(-w_0^2 \Omega_0^2) L_{n-1}^1(-w_0^2 \Omega_0^2)] \right) + \frac{m+n+1}{2} \right\}, \quad (18)$$

$$C_2 = \exp(-w_0^2 \Omega_0^2) \left\{ \frac{2}{w_0^2} L_m^0(-w_0^2 \Omega_0^2) L_n^0(-w_0^2 \Omega_0^2) + \frac{2}{w_0^2} [L_{m-1}^1(-w_0^2 \Omega_0^2) L_n^0(-w_0^2 \Omega_0^2) + L_m^0(-w_0^2 \Omega_0^2) L_{n-1}^1(-w_0^2 \Omega_0^2)] \right\}$$

$$u(z)_{\text{turb}} = \sqrt{\frac{w_0^2}{2} \left[ 1 + \frac{w_0^2 \Omega_0^2 \exp(w_0^2 \Omega_0^2)}{1 + \exp(w_0^2 \Omega_0^2)} \right] + \frac{2}{k^2} \left[ \frac{1}{w_0^2} - \frac{\Omega_0^2}{1 + \exp(w_0^2 \Omega_0^2)} \right] z^2 + \frac{4}{k^2} (0.545 C_n^2 k^2)^{5/5} z^{16/5}}, \quad (28)$$

$$\theta_{\text{spturb}} = \sqrt{\frac{2}{k^2} \left[ \frac{1}{w_0^2} - \frac{\Omega_0^2}{1 + \exp(w_0^2 \Omega_0^2)} \right] + \frac{4}{k^2} (0.545 C_n^2 k^2)^{5/5} z^{6/5}}. \quad (29)$$

当  $m = n = 0, \Omega_0 = 0$  时 (16) 和 (23) 式化为高斯光束在湍流大气中的均方根束宽和角扩展公式

$$u(z)_{\text{turb}} = \sqrt{\frac{1}{2} w_0^2 + \frac{2}{k^2 w_0^2} z^2 + 4(0.545 C_n^2)^{5/5} k^{2/5} z^{16/5}}, \quad (30)$$

$$\theta_{\text{spturb}} = \sqrt{\frac{2}{k^2 w_0^2} + 4(0.545 C_n^2)^{5/5} k^{2/5} z^{6/5}}. \quad (31)$$

### 3. H-ChG 光束在湍流大气中的束宽扩展和角扩展

图 1 为在  $z = 5$  和  $25 \text{ km}$  处 H-ChG 光束束宽  $u(z)_{\text{turb}}$  和相对束宽  $u(z)_{\text{turb}}/u(z)_{\text{free}}$  随大气折射率结构常数  $C_n^2$  的变化. 光束在自由空间中的束宽  $u(z)_{\text{free}}$  与  $C_n^2$  无关. 由图 1 可见,  $C_n^2$  越大, 光束在湍流大气中的束宽  $u(z)_{\text{turb}}$  和相对束宽  $u(z)_{\text{turb}}/u(z)_{\text{free}}$  越大, 束宽扩展受到湍流的影响也越大. 此外,  $u(z)_{\text{turb}}$  和  $u(z)_{\text{turb}}/u(z)_{\text{free}}$  随传输距离  $z$  的增加而增大. 这些结论也可直接从 (16) 和 (22) 式得出.

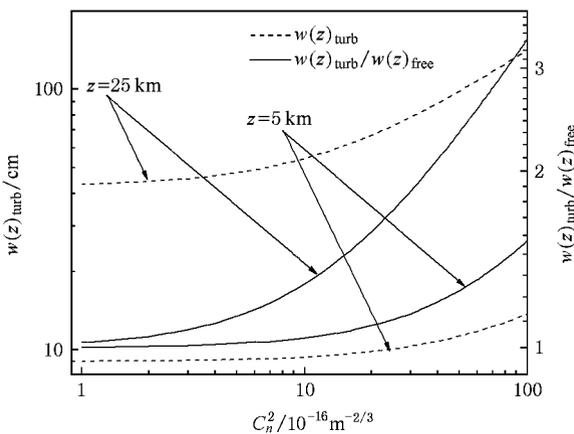


图 1 不同传输距离处 H-ChG 光束束宽和相对束宽随大气折射率结构常数  $C_n^2$  的变化. 计算参数为  $m = n = 1, w_0 = 2 \text{ cm}, \Omega_0 = 50 \text{ m}^{-1}$

图 2 为在  $z = 2, 5$  和  $25 \text{ km}$  处 H-ChG 光束在湍流大气和自由空间中传输时, 光束束宽  $u(z)_{\text{turb}}$  和  $u(z)_{\text{free}}$  和相对束宽  $u(z)_{\text{turb}}/u(z)_{\text{free}}$  随阶数  $m, n$  的

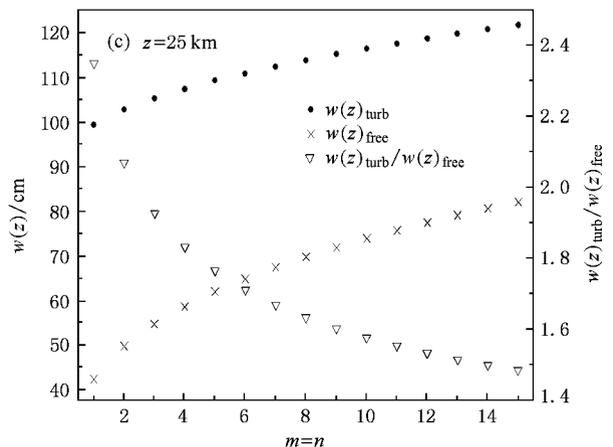
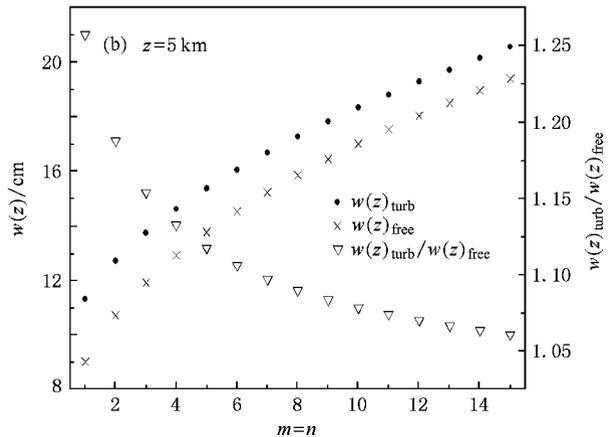
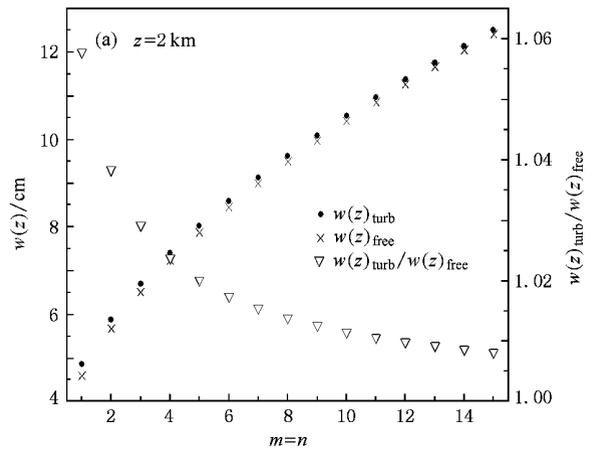


图 2 H-ChG 光束束宽和相对束宽随光束阶数  $m, n$  的变化. 计算参数为  $w_0 = 2 \text{ cm}, \Omega_0 = 50 \text{ m}^{-1}, C_n^2 = 5 \times 10^{-15} \text{ m}^{-2/3}$ . (a)  $z = 2 \text{ km}$ , (b)  $z = 5 \text{ km}$ , (c)  $z = 25 \text{ km}$

变化.由图 2 可见,  $m, n$  越大, 光束的束宽  $w(z)_{\text{turb}}$  和  $w(z)_{\text{free}}$  越大, 相对束宽  $w(z)_{\text{turb}}/w(z)_{\text{free}}$  越小, 即光束阶数越大, 束宽扩展受到湍流的影响越小.

图 3 为在  $z = 1, 5$  和  $25 \text{ km}$  处 H-ChG 光束束宽和相对束宽随参数  $\Omega_0$  的变化. 由图 3 可知, 在不同

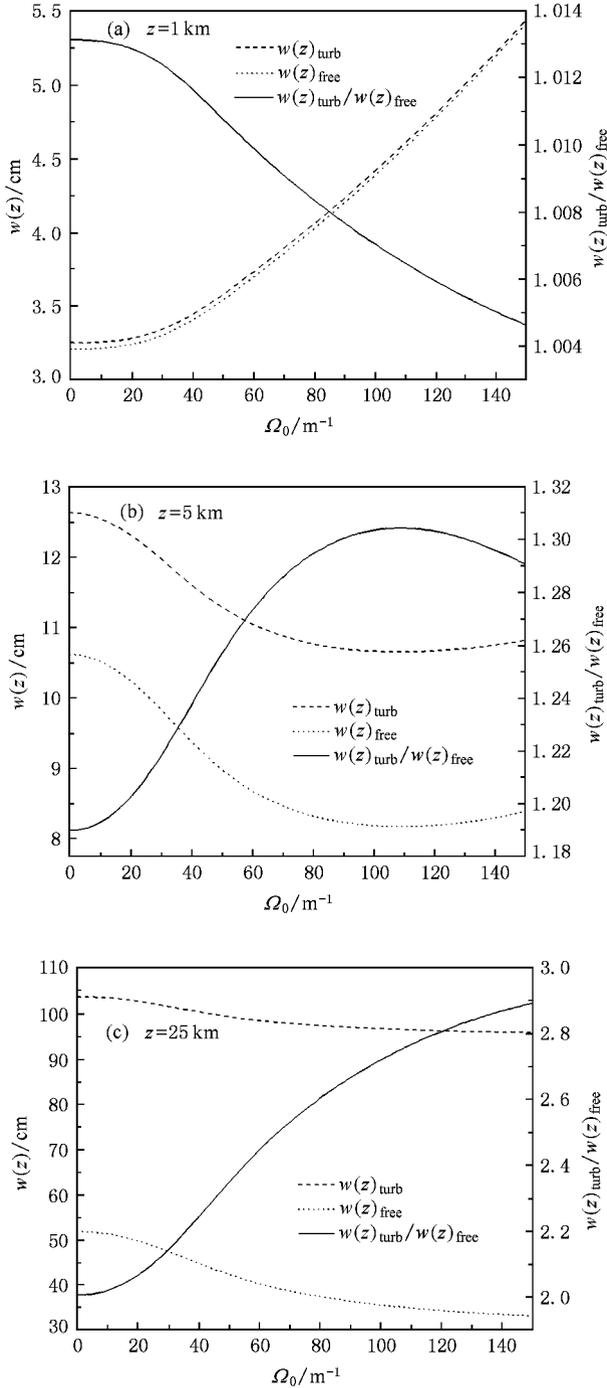


图 3 H-ChG 光束束宽和相对束宽随参数  $\Omega_0$  的变化 计算参数为  $m = n = 1$ ,  $w_0 = 2 \text{ cm}$ ,  $C_n^2 = 5 \times 10^{-15} \text{ m}^{-2/3}$ . (a)  $z = 1 \text{ km}$ , (b)  $z = 5 \text{ km}$ , (c)  $z = 25 \text{ km}$

的传输距离  $z$  处, 随着  $\Omega_0$  的增加, 束宽扩展受湍流影响不同. 在传输距离较小(例如  $z = 1 \text{ km}$ )时, 束宽  $w(z)_{\text{turb}}$  和  $w(z)_{\text{free}}$  随  $\Omega_0$  的增加而增加, 相对束宽  $w(z)_{\text{turb}}/w(z)_{\text{free}}$  随  $\Omega_0$  的增加而减小, 即  $\Omega_0$  越大的 H-ChG 光束的束宽扩展受湍流影响越小, 如图 3(a) 所示. 随着传输距离  $z$  的增加(例如  $z = 5 \text{ km}$ ), 束宽  $w(z)_{\text{turb}}$  和  $w(z)_{\text{free}}$  随  $\Omega_0$  的增加不再单调的变化, 表现为先减小后增加, 而相对束宽为先增加后减小, 如图 3(b) 所示. 当  $\Omega_0 = 109 \text{ m}^{-1}$  时  $w(z)_{\text{turb}}/w(z)_{\text{free}} = 1.30$ , 束宽扩展受湍流影响最大. 在  $z = 25 \text{ km}$  处,  $\Omega_0$  越大, 束宽  $w(z)_{\text{turb}}$  和  $w(z)_{\text{free}}$  越小, 相对束宽越大, 如图 3(c) 所示. 这意味着  $\Omega_0$  越大, H-ChG 光束的束宽扩展受湍流影响就越大. 对所得结果作如下物理解释: 由(17)–(19)式可知, 随  $\Omega_0$  的增加,  $C_1/C_0$  为单调增加,  $C_2 z^2/C_0$  为单调减小. 当传输距离  $z$  较小时, 与  $C_2 z^2/C_0$  相比,  $C_1/C_0$  占主导地位, 束宽随着  $\Omega_0$  的增加而增加, 束宽扩展受湍流影响随着  $\Omega_0$  的增加而减小. 随着传输距离的增加, 如  $z = 5 \text{ km}$  时,  $C_2 z^2/C_0$  对束宽的影响增加, 光束的束宽由  $C_2 z^2/C_0$  和  $C_1/C_0$  共同决定. 因此随  $\Omega_0$  的增加, 束宽先减小后增加, 束宽扩展受湍流影响先增加后减小, 束宽扩展受湍流影响最大值时的  $\Omega_0$  值由  $\frac{d}{d\Omega_0} \left( \frac{C_1}{C_0} + \frac{C_2 z^2}{C_0} \right) = 0$  决定. 当传输距离足够大时, 与  $C_1/C_0$  相比,  $C_2 z^2/C_0$  占主导地位, 束宽随  $\Omega_0$  的增加而减小, 束宽扩展受湍流的影响随  $\Omega_0$  的增加而增加, 与图 3(c) 的结果一致.

图 4 为在  $z = 1, 5$  和  $25 \text{ km}$  处 H-ChG 光束束宽和相对束宽随束腰宽度  $w_0$  的变化. 由图 4(a) 和 (b) 可见, 在传输距离  $z$  不是足够大时, 随束腰宽度  $w_0$  的增加, 束宽  $w(z)_{\text{turb}}$  和  $w(z)_{\text{free}}$  先减小后增加, 束宽扩展受湍流的影响先增加后减小. 当  $z = 25 \text{ km}$  时(图 4(c)),  $w_0$  越大,  $w(z)_{\text{turb}}$  和  $w(z)_{\text{free}}$  越小, 束宽扩展受湍流影响越大. 图 4(a) 与图 3(a) 不同的原因如下: 虽然  $C_1/C_0$  也随  $w_0$  增加而单调增加,  $C_2 z^2/C_0$  随  $w_0$  增加而单调减小, 但当  $w_0 \rightarrow 0$  时,  $C_1/C_0 \rightarrow 0$ , 因此传输距离  $z$  较小时, 与  $C_2 z^2/C_0$  相比,  $C_1/C_0$  也不占主导地位, 束宽由  $C_1/C_0$  和  $C_2 z^2/C_0$  共同决定. 束宽扩展受湍流影响最大时的  $w_0$  值由  $\frac{d}{dw_0} \left( \frac{C_1}{C_0} + \frac{C_2 z^2}{C_0} \right) = 0$  决定. 从图 4(a) 和 (b) 可以看出, 在  $z = 1$  和  $5 \text{ km}$  处, 当束腰宽度  $w_0$  为 1.6 和

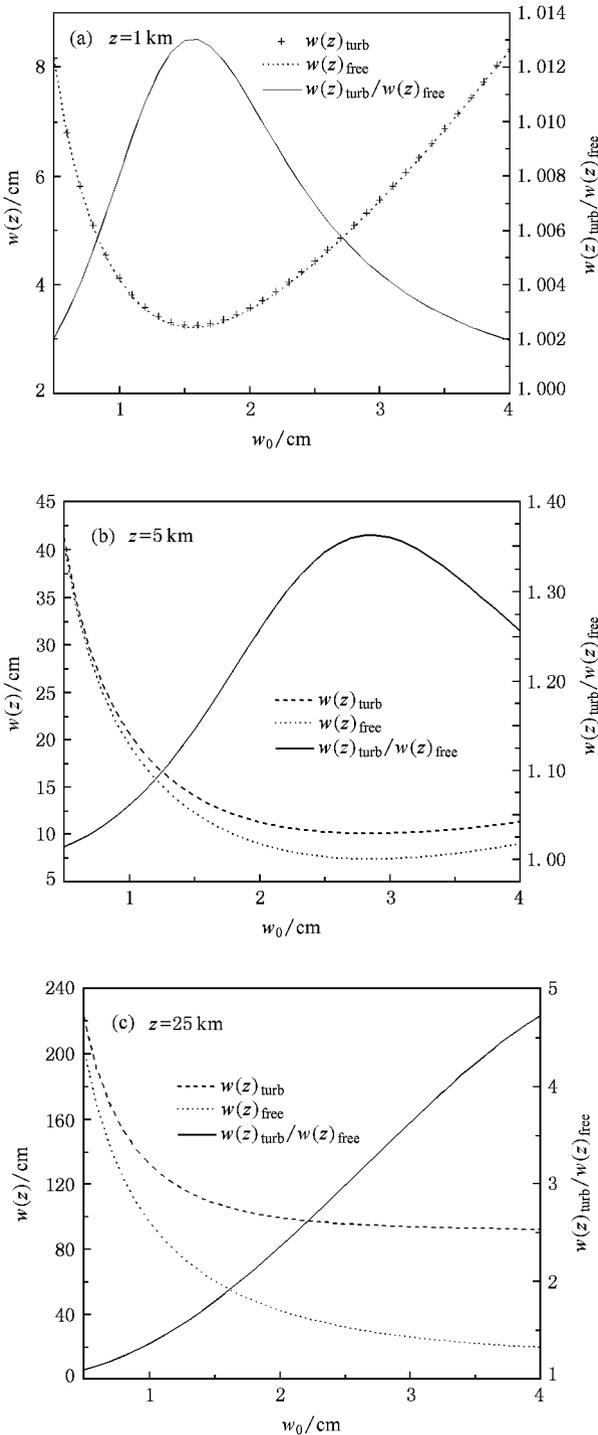


图 4 H-ChG 光束束宽扩展和相对束宽扩展随束腰宽度  $w_0$  的变化 计算参数为  $m = n = 1, \Omega_0 = 50 \text{ m}^{-1}, C_n^2 = 5 \times 10^{-15} \text{ m}^{-2/3}$ .  
(a)  $z = 1 \text{ km}$ , (b)  $z = 5 \text{ km}$ , (c)  $z = 25 \text{ km}$

2.9 cm 时相对束宽分别取最大值  $u(z)_{\text{turb}}/u(z)_{\text{free}} = 1.01, 1.36$ . 当传输距离足够远时, 如  $z = 25 \text{ km}$  处, 与  $C_1/C_0$  相比  $C_2 z^2/C_0$  占主导地位, 相对束宽随  $w_0$  的增加而增加, 即  $w_0$  越小的 H-ChG 光束的束宽扩

展受湍流影响越小, 如图 4(c) 所示.

图 5 为在  $z = 25$  和  $30 \text{ km}$  处 H-ChG 光束在大气湍流中传输时光束角扩展  $\theta_{\text{spturb}}$  和相对角扩展  $\theta_{\text{spturb}}/\theta_{\text{spfree}}$  随大气折射率结构常数  $C_n^2$  的变化. 光束在自由空间的角扩展  $\theta_{\text{spfree}}$  与  $C_n^2$  和  $z$  无关. 由图 5 可以看出,  $C_n^2$  越大, 光束在湍流中的角扩展  $\theta_{\text{spturb}}$  和相对角扩展  $\theta_{\text{spturb}}/\theta_{\text{spfree}}$  越大, 角扩展受到湍流的影响越大. 此外,  $\theta_{\text{spturb}}$  和  $\theta_{\text{spturb}}/\theta_{\text{spfree}}$  随传输距离  $z$  的增加而增大. 这是 (23) 和 (25) 式的直接结果.

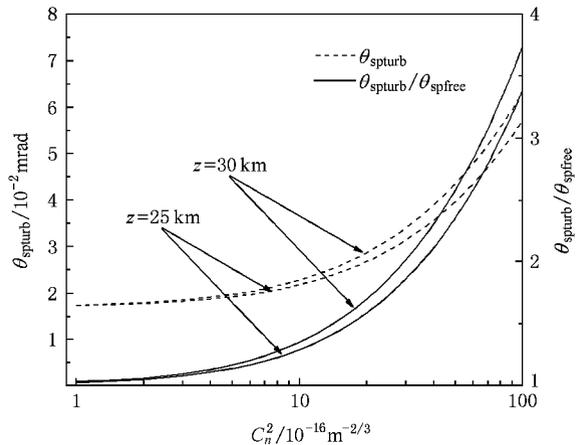


图 5 不同传输距离处 H-ChG 光束角扩展和相对角扩展随大气折射率结构常数  $C_n^2$  的变化 计算参数为  $m = n = 1, w_0 = 2 \text{ cm}, \Omega_0 = 50 \text{ m}^{-1}$

图 6 为在  $z = 25 \text{ km}$  处 H-ChG 光束分别在湍流大气和自由空间中传输时光束角扩展  $\theta_{\text{spturb}}, \theta_{\text{spfree}}$  和相对角扩展  $\theta_{\text{spturb}}/\theta_{\text{spfree}}$  随阶数  $m, n$  的变化. 由图 6 可以看出,  $m, n$  越大, 光束的角扩展  $\theta_{\text{spturb}}, \theta_{\text{spfree}}$  越大, 相对角扩展  $\theta_{\text{spturb}}/\theta_{\text{spfree}}$  越小, 即光束的阶数  $m, n$  越大, 光束角扩展受到湍流的影响越小.

图 7 为在  $z = 25 \text{ km}$  处 H-ChG 光束分别在湍流大气和自由空间中传输时光束角扩展  $\theta_{\text{spturb}}, \theta_{\text{spfree}}$  和相对角扩展  $\theta_{\text{spturb}}/\theta_{\text{spfree}}$  随参数  $\Omega_0$  的变化. 由图 7 可以看出,  $\Omega_0$  越大, 光束的角扩展  $\theta_{\text{spturb}}, \theta_{\text{spfree}}$  越小, 相对角扩展  $\theta_{\text{spturb}}/\theta_{\text{spfree}}$  越大, 即光束的  $\Omega_0$  越大, 光束角扩展受到湍流的影响越大.

图 8 为在  $z = 25 \text{ km}$  处 H-ChG 光束分别在湍流大气和自由空间中传输时光束角扩展  $\theta_{\text{spturb}}, \theta_{\text{spfree}}$  和相对角扩展  $\theta_{\text{spturb}}/\theta_{\text{spfree}}$  随束腰宽度  $w_0$  的变化. 由图 8 可以看出,  $w_0$  越大, 光束的角扩展  $\theta_{\text{spturb}}, \theta_{\text{spfree}}$  越小, 相对角扩展  $\theta_{\text{spturb}}/\theta_{\text{spfree}}$  越大, 即  $w_0$  越大, 光束角

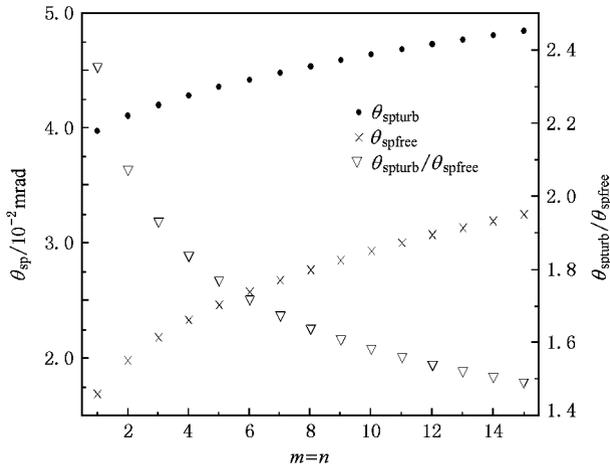


图 6 H-ChG 光束角扩展和相对角扩展随阶数  $m, n$  的变化 计算参数为  $z = 25 \text{ km}$ ,  $w_0 = 2 \text{ cm}$ ,  $\Omega_0 = 50 \text{ m}^{-1}$ ,  $C_n^2 = 5 \times 10^{-15} \text{ m}^{-2/3}$

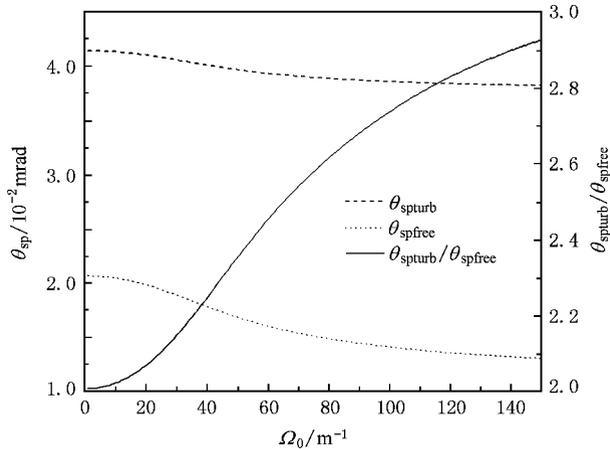


图 7 H-ChG 光束角扩展和相对角扩展随参数  $\Omega_0$  的变化 计算参数为  $z = 25 \text{ km}$ ,  $m = n = 1$ ,  $w_0 = 2 \text{ cm}$ ,  $C_n^2 = 5 \times 10^{-15} \text{ m}^{-2/3}$

扩展受到湍流的影响越大. 比较图 2(c) 图 6、图 3(c) 图 7、图 4(c) 和图 8 可以发现, 当光束传输足够远时, 束宽和角扩展随光束参数的变化趋势一致. 其原因是当光束传输足够远 (16) 式中第一项  $C_1/C_0$  远小于第二项  $C_2 z^2/C_0$  和第三项  $C_3 z^{16/5}$ . 当  $C_1/C_0$  项可忽略时, 束宽定义 (16) 式和角扩展定义 (23) 式在  $z$  取常数时随光束参数  $m, n, \Omega_0$  和  $w_0$  的变化趋势是一致的.

研究表明, 对于 H-G 光束和高斯光束, 光束阶数  $m, n$ , 束腰宽度  $w_0$ , 高斯光束的束腰宽度变化时, 与自由空间比较, 在湍流大气中的束宽扩展和角扩展受湍流影响与 H-ChG 光束是一致的. 例如对于

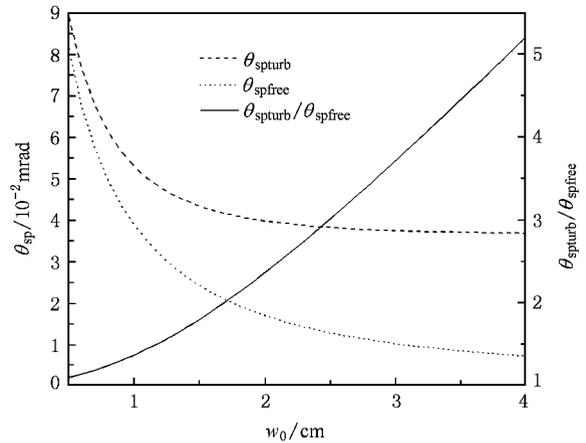


图 8 H-ChG 光束角扩展和相对角扩展束腰宽度  $w_0$  的变化 计算参数为  $m = n = 1$ ,  $\Omega_1 = 50 \text{ m}^{-1}$ ,  $C_n^2 = 5 \times 10^{-15} \text{ m}^{-2/3}$

H-ChG 光束, 阶数  $m, n$  越大, 参数  $\Omega_0$  和束腰宽度  $w_0$  越小, 角扩展受湍流影响越小; 阶数  $m, n$  越大, 束宽扩展受湍流影响越小. 传输距离不太远时, 随着束腰宽度的增加, 束宽扩展受湍流影响先增加后减小, 当光束传输足够远, 束腰宽度  $w_0$  越小, 束宽扩展受湍流影响越小. 但对 ChG 光束, 则不完全相同.

#### 4. ChG 光束在湍流大气中的束宽扩展和角扩展

图 9 为在  $z = 1, 5$  和  $25 \text{ km}$  处 ChG 光束束宽和相对束宽随  $\Omega_0$  的变化. 由图 9 可知, 在不同的传输距离  $z$  处, 随  $\Omega_0$  的增加, 光束束宽扩展受湍流影响不同. 在传输距离较小 ( $z = 1 \text{ km}$ ) 时, 束宽  $w(z)_{\text{urb}}$  和  $w(z)_{\text{free}}$  随  $\Omega_0$  的增加而增加, 相对束宽随  $\Omega_0$  的增加而减小, 如图 9(a) 所示. 随着传输距离  $z$  的增加 (如  $z = 5, 25 \text{ km}$ ), 束宽  $w(z)_{\text{urb}}$  和  $w(z)_{\text{free}}$  随  $\Omega_0$  的增加不再单调地增加, 表现为先减小后增加, 相对束宽先增加后减小, 如图 9(b)(c) 所示. 其原因如下: 对于 ChG 光束, 随  $\Omega_0$  的增加,  $C_1/C_0$  单调增加,  $C_2 z^2/C_0$  则为先减小后增加而不是单调减小. 因此当传输距离足够远时 (如在  $z = 25 \text{ km}$  处), 与  $C_2 z^2/C_0$  相比较,  $C_1/C_0$  影响很小, 束宽  $w(z)_{\text{urb}}$  和  $w(z)_{\text{free}}$  随  $\Omega_0$  的增加仍然为先减小后增加, 这与 H-ChG 光束不同.

图 10 为在  $z = 25 \text{ km}$  处 ChG 光束分别在湍流大气和自由空间中传输时, 角扩展  $\theta_{\text{spturb}}$ ,  $\theta_{\text{spfree}}$  和相对角扩展  $\theta_{\text{spturb}}/\theta_{\text{spfree}}$  随 Ch 参数  $\Omega_0$  的变化. 由图 10 可

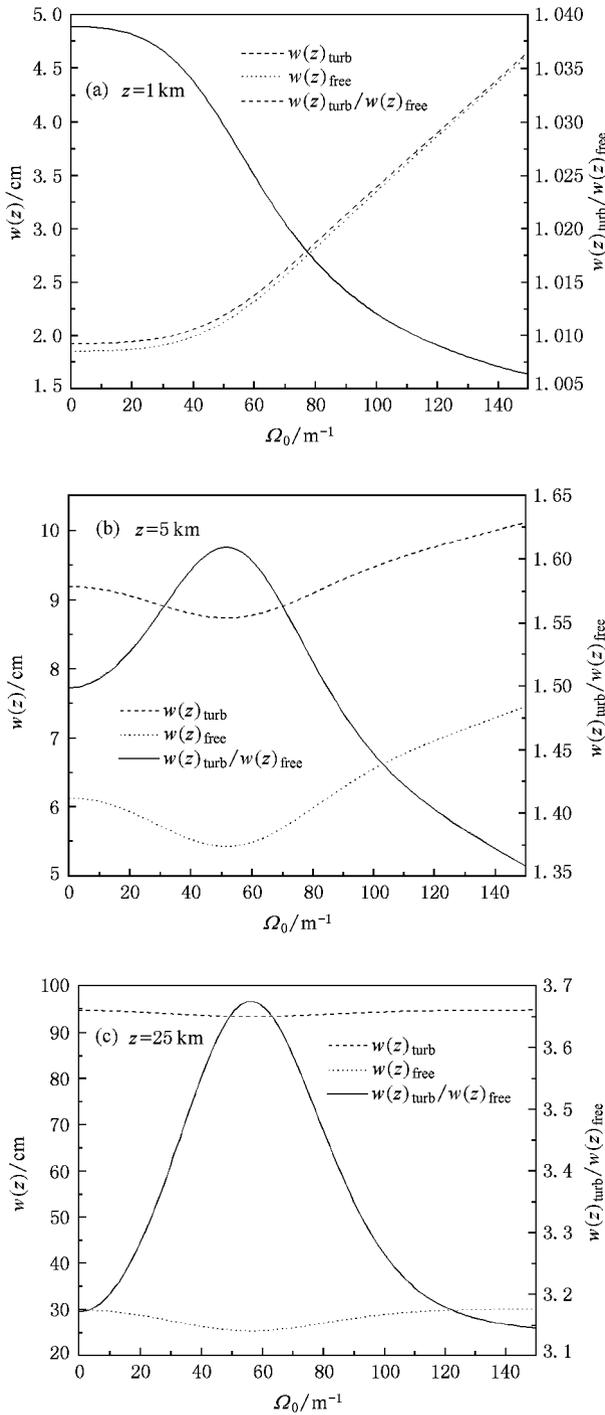


图 9 ChG 光束束宽和相对束宽随参数  $\Omega_0$  的变化 计算参数为  $w_0 = 2 \text{ cm}$ ,  $C_n^2 = 5 \times 10^{-15} \text{ m}^{-2/3}$ . (a)  $z = 1 \text{ km}$ , (b)  $z = 5 \text{ km}$ , (c)  $z = 25 \text{ km}$

以看到,随着  $\Omega_0$  的增大,角扩展  $\theta_{\text{spturb}}$ ,  $\theta_{\text{spfree}}$  先减小后增加,相对角扩展  $\theta_{\text{spturb}}/\theta_{\text{spfree}}$  先增加后减小,即随  $\Omega_0$  的增加,光束角扩展受到湍流的影响先增加后减小,其变化趋势与图 9(c) 一致。

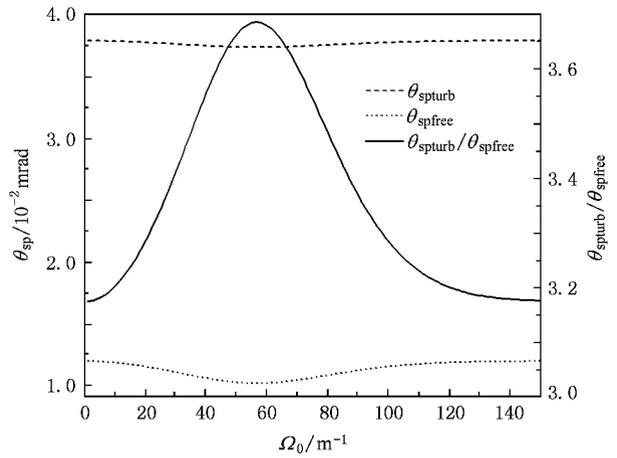


图 10 ChG 光束角扩展和相对角扩展随参数  $\Omega_0$  的变化 计算参数为  $z = 25 \text{ km}$ ,  $w_0 = 2 \text{ cm}$ ,  $C_n^2 = 5 \times 10^{-15} \text{ m}^{-2/3}$

## 5. 结 论

本文以 H-ChG 光束为例,对大气湍流中光束的束宽扩展和角扩展做了详细的比较研究.与文献 [5, 7-20] 中使用束宽和角扩展不同,本文使用了相对束宽和相对角扩展来比较光束抗拒湍流影响的能力,其主要优点是从相对束宽和相对角扩展随光束参数变化的曲线可直观和定量地比较当光束参数变化时束宽和角扩展对湍流影响的灵敏程度.特别是当束宽扩展和角扩展随光束参数非单调变化时,使用相对束宽和相对角扩展来研究问题更显示出其优点.数值计算和分析表明,折射率结构常数  $C_n^2$  越小,光束束宽和角扩展越小.H-ChG 光束的阶数  $m, n$  越大,参数  $\Omega_0$  越小和束腰宽度  $w_0$  越小,角扩展受湍流影响越小.阶数  $m, n$  越大的 H-ChG 光束的束宽扩展受湍流影响越小.  $w(z)_{\text{turb}}/w(z)_{\text{free}}$  随参数  $\Omega_0$  和束腰宽度  $w_0$  变化比较复杂,在一定传输距离内为非单调变化.但当传输距离较短时,参数  $\Omega_0$  越大, H-ChG 光束的束宽扩展受湍流影响越小.当传输距离足够长时,  $\Omega_0$  和  $w_0$  越小的 H-ChG 光束束宽扩展受湍流影响越小.湍流大气中光束束宽扩展和角扩展有区别,其物理原因在于束宽公式中自由空间衍射引起扩展有两项  $(C_1/C_0 + C_2 z^2/C_0)$ ,而在角扩展公式中自由空间衍射引起扩展仅有一项  $(C_2/C_0)$ ,二者又有联系是因为在公式中又都含有衍射引起的扩展项和湍流引起的扩展项.仅当传输距离足够远,当  $C_1/C_0 \ll C_2 z^2/C_0$  时,束宽扩展和角扩展随光束

参数变化趋势才一致. 一般而言, 湍流对光束扩展的影响都可用自由空间中存在的光束初始扩展越大, 光束扩展受湍流影响就越小来解释. 对非单调变化情况, 可从  $u(z)_{\text{urb}}$  和  $\theta_{\text{sturb}}$  的解析公式出发, 对所得

结果给出合理的物理解释. H-G, ChG 和高斯光束在湍流大气中的扩展可作为 H-ChG 光束的特例来处理.

- [ 1 ] Andrews L C , Phillips R 1998 *Laser Beam Propagation through Random Media* (Beltingham : SPIE Press )
- [ 2 ] Rao R Z 2005 *Light Propagation in the Turbulent Atmosphere* (Hefei : Anhui Science and Technology Press )( in Chinese )[ 饶瑞中 2005 光在湍流大气中的传播(合肥 :安徽科学技术出版社 )]
- [ 3 ] Wu J 1990 *J. Mod. Opt.* **37** 671
- [ 4 ] Wu J , Boardman A D 1991 *J. Mod. Opt.* **38** 1355
- [ 5 ] Gbur G , Wolf E 2002 *J. Opt. Soc. Am. A* **19** 1592
- [ 6 ] Salem M , Shirai T , Dogarin A , Wolf E 2003 *Opt. Commun.* **216** 261
- [ 7 ] Shirai T , Dogariu A , Wolf E 2003 *J. Opt. Soc. Am. A* **20** 1094
- [ 8 ] Young C Y , Gilchrest Y V , Macon B R 2002 *Opt. Eng.* **41** 1097
- [ 9 ] Ji X L , Chen X , Lü B D 2008 *J. Opt. Soc. Am. A* **25** 21
- [ 10 ] Eyyuboğlu H T 2005 *Opt. Commun.* **245** 37
- [ 11 ] Cai Y , He S 2006 *Appl. Phys. Lett.* **89** 041117
- [ 12 ] Ji X L , Xiao X , Lü B D 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 3996 ( in Chinese )[ 季小玲、肖 希、吕百达 2004 物理学报 **53** 3996 ]
- [ 13 ] Dogariu A , Amarande S 2003 *Opt. Lett.* **28** 10
- [ 14 ] Casperson L W , Tovar A A 1998 *J. Opt. Soc. Am. A* **15** 954
- [ 15 ] Mandel L , Wolf E 1995 *Optical Coherence and Quantum Optics* ( Cambridge : Cambridge University Press )
- [ 16 ] Yura H T 1972 *Appl. Opt.* **11** 1399
- [ 17 ] Wang S , Plonus M A 1979 *J. Opt. Soc. Am.* **69** 1297
- [ 18 ] Gradysteyn I S , Ryzhik I M 1980 *Tables of Integrals , Series and Products* ( New York , Academic Press )
- [ 19 ] Shirai T , Dogariu A , Wolf E 2003 *Opt. Lett.* **28** 610
- [ 20 ] Yang A L , Zhang E T , Ji X L , Lü B D 2008 *Opt. Express* **16** 8366

# A comparative study of the beam-width spreading and angular spread in atmospheric turbulence<sup>\*</sup>

Yang Ai-Lin Li Jin-Hong Lü Bai-Da<sup>†</sup>

( *Institute of Laser Physics and Chemistry, Sichuan University, Chengdu 610064, China* )

( Received 30 June 2008 ; revised manuscript received 9 August 2008 )

## Abstract

Taking the Hermite-cosh-Gaussian (H-ChG) beam as a typical example, the beam-width spreading and angular spread of H-ChG beams propagating through atmospheric turbulence are thoroughly studied. The relative beam-width and relative angular spread instead of the beam-width and angular spread have been used to study the sensitivity of a beam to the effect of turbulence. It is found that the smaller the refraction index structure constant  $C_n^2$  is, the less the beam-width spreading and angular spread of H-ChG beams are. The angular spread of H-ChG beams with larger beam orders  $m, n$ , smaller parameter  $\Omega_0$  and smaller waist width  $w_0$  is less affected by turbulence. This conclusion also holds true for the beam-width spreading of H-ChG beams for the case of the propagation distance is sufficiently long. The variation of the relative beam-width of H-ChG beams versus  $\Omega_0$  and  $w_0$  is analyzed if the propagation distance being not so long. The results are illustrated by numerical examples and the validity of the results is explained physically. The spreading of Hermite-Gaussian, cosh-Gaussian and Gaussian beams in atmospheric turbulence can be treated as special cases of H-ChG beams.

**Keywords** : beam-width spreading and angular spread, atmospheric turbulence, Hermite-cosh-Gaussian beam

**PACC** : 4260H, 9265D

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China ( Grant Nos. 10574097, 10874125 ).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail : baidalu0@tom.com