

# 正多边形量子环自旋输运的严格解

李 鹏 邓文基<sup>†</sup>

(华南理工大学物理系, 广州 510641)

(2008 年 6 月 12 日收到 2008 年 9 月 16 日收到修改稿)

研究了存在 Rashba 自旋轨道相互作用的正多边形量子环的自旋输运特性, 采用量子网络的典型方法和 Landauer-Büttiker 电导公式, 严格求解了电子通过正多边形量子环的散射问题, 并得到了电导的解析表达式, 通过数值计算和解析分析, 进一步研究了量子环电导随电子波矢和自旋轨道相互作用强度变化的复杂形式, 包括源于自旋轨道耦合相互作用的电导零点系列。特别地, 还研究了正多边形环的边数趋近于无穷的极限情形, 与直接采用圆环模型获得的结果完全一致。

关键词: Rashba 自旋-轨道相互作用, 量子网络, 量子输运

PACC: 7320D, 7335, 7170C

## 1. 引言

自旋轨道相互作用(SOI)是一种典型的相对论效应<sup>[1]</sup>, 在固体材料和器件中主要表现为 Rashba 效应<sup>[2]</sup> 和 Dresselhaus 效应<sup>[3]</sup> 两种典型形式, 分别源于结构反演不对称性和体反演不对称性<sup>[4]</sup>。理论和实验研究都已经证明, 通过改变异质结上的门电压可以有效调节 Rashba 耦合强度<sup>[5]</sup>。人们期望 Rashba 效应成为自旋电子学实现低维半导体结构中自旋量子调控的有效手段<sup>[6,7]</sup>, 并由此启发了各种形式的自旋调控器件<sup>[8-13]</sup>, 其中基于圆环结构的自旋量子干涉效应得到了比较深入的研究<sup>[14-30]</sup>。

除了介观圆环这一典型结构, 人们对多边形量子环的自旋输运问题也表现出了浓厚的兴趣。Bercioux 等<sup>[31,32]</sup> 构建了以菱形为基元结构的量子网络模型, 并研究了源于 Rashba 效应的电子态波函数局域化现象。有关研究还被推广到包含 Dresselhaus 效应的更普遍情形<sup>[33,34]</sup>。为了完善自旋干涉器件的设计方案<sup>[9]</sup>, Koga 等<sup>[35]</sup> 也将过去的圆环结构改为正方形介观环结构, 他们不仅研究了电子通过同时存在 Rashba 效应和 Dresselhaus 效应的正方形、正三角形、正六边形和圆环结构的量子干涉效应<sup>[36]</sup>, 还在实验室制备了存在 Rashba 效应的正方形量子环阵列, 并观测了源于 SOI 的自旋干涉效应<sup>[37]</sup>。

圆环结构 SOI 哈密顿量的正确形式曾经是一个有争议的问题<sup>[17]</sup>。从几何上看, 边数无限增多的正多边形当然可以逼近圆环; 如果不考虑 SOI, 根据量子波导理论<sup>[38]</sup> 也可以简单证明正多边形模型可以正确地描述电子通过圆环的量子输运过程。然而 SOI 的存在使问题变得复杂化<sup>[39]</sup>, 没有明显的理由可以保证正多边形量子环模型可以一致地描述圆环结构的自旋输运过程。

Bercioux 等<sup>[34]</sup> 曾经探讨了存在 Rashba SOI 的正多边形量子环的输运性质。通过比较系统的数值计算和模拟, 作者不仅得到电子通过正方形、正六边形和正八边形的平均透射率, 而且还采用自旋旋转算符近似得到了正多边形边数趋近于无穷时的极限结果, 显示了可以逼近圆环情形的趋势<sup>[23]</sup>。van Veenhuizen 等<sup>[36]</sup> 也采用自旋演化矩阵的方法独立地研究了类似的问题, 得到了存在 SOI 的正多边形量子环(多边形边数分别为 3, 4, 6 和  $+\infty$ ) 电导的近似表达式。虽然这些近似结果基本上能够满足目前相关实验的精度要求, 但据此仍然不能判定正多边形量子环模型是否与圆环模型一致。

本文的主要内容是寻求有关存在 Rashba SOI 的正多边形量子环的自旋输运问题的严格解。建立了正多边形量子环自旋输运问题的网络模型, 并给出了描述电子散射过程的基本公式。求解了电子通过任意正多边形量子环的散射问题, 得到了透射振幅

<sup>†</sup> 通讯联系人, E-mail: phwjdeng@scut.edu.cn

和反射振幅的解析表达式。在此基础上,还根据 Landauer-Büttiker 电导理论<sup>[23,40]</sup>给出了任意多边形量子环电导的一般解析表达式,并进行了相关的数值计算和讨论。同时,还讨论了正多边形边数趋近于无穷的极限情形,证明了量子网络方案给出与直接采用圆环模型完全一致的结果。

## 2. 模型和基本公式

研究正  $2N$  边形量子环的自旋输运问题,如图 1 所示。 $2N$  段等长的量子线在  $x-y$  平面上连接成正多边形量子网络,量子线上存在 Rashba 形式的自旋轨道相互作用,正多边形环上相对两个节点通过无 SOI 的正常金属引线与左右外界电子库相连。在左右两端电子库零偏压极限下,形成由左向右的电流。忽略子带杂交效应,假定量子线是单通道的<sup>[41,42]</sup>,描述电子在沿  $\hat{\gamma}$  方向量子线上运动的哈密顿量可以简化为<sup>[31,32,34]</sup>

$$H = \frac{p_\gamma^2}{2m^*} - \frac{\hbar k_{\text{so}}}{m^*} p_\gamma (\hat{z} \times \hat{\gamma}) \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad (1)$$

其中  $p_\gamma = -i\hbar \partial/\partial \ell$  是沿  $\hat{\gamma}$  方向运动的电子的动量算符,  $m^*$  是电子的有效质量,  $\boldsymbol{\sigma}$  为泡利算符,  $\hat{z}$  表示垂直于多边形环平面的  $z$  轴正方向的单位矢量,而  $k_{\text{so}}$  描述 Rashba 自旋轨道耦合强度。

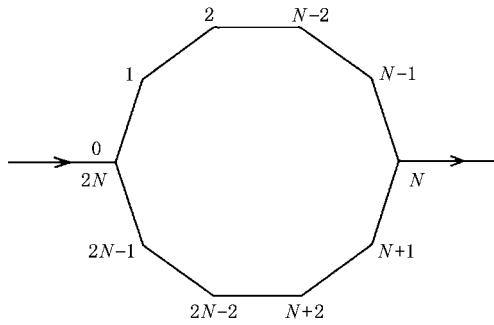


图 1 正  $2N$  边形量子环自旋输运示意图  $N=5$ 。电子通过左端引线由环上节点 0 入射,再由连接于对称节点  $N$  的右端引线出射

考虑能量为  $E$  的电子由左端引线射入正多边形量子环,在左右两端引线上电子的波函数可分别设为

$$\begin{aligned} \psi_{\text{left}}(\ell) &= A e^{ik_0 \ell} + B e^{-ik_0 \ell}, \\ \psi_{\text{right}}(\ell) &= F e^{ik_0 \ell}, \end{aligned} \quad (2)$$

其中入射电子的波矢  $k_0 = \sqrt{2m^* E}/\hbar$ ,  $A$ ,  $B$  和  $F$  分

别是入射、反射和透射波函数的概率幅,均为二阶旋量。根据式(1)的哈密顿量,电子在直线形量子线上任意点  $\ell$  处的波函数可由两端点  $a, b$  的波函数  $\psi_a$  和  $\psi_b$  表示为<sup>[31]</sup>

$$\begin{aligned} \psi_{ab}(\ell) &= \frac{e^{ik_{\text{so}} \ell (\hat{z} \times \hat{\gamma}_{ab}) \cdot \boldsymbol{\sigma}}}{\sin(kl_{ab})} \{ \sin[k(l_{ab} - \ell)] \psi_a \\ &\quad + \sin(k\ell) e^{-ik_{\text{so}} l_{ab} (\hat{z} \times \hat{\gamma}_{ab}) \cdot \boldsymbol{\sigma}} \psi_b \}, \end{aligned} \quad (3)$$

其中  $k = \sqrt{k_0^2 + k_{\text{so}}^2}$ ,  $\ell$  描述电子在量子线上沿  $\hat{\gamma}_{ab}$  方向由  $a$  到  $b$  的位置坐标,在  $a$  和  $b$  两个端点,分别为  $\ell_a = 0$  和  $\ell_b = l_{ab}$ 。(3) 式给出的波函数自动满足波函数连续条件,即  $\psi_{ab}(0) = \psi_a$ ,  $\psi_{ab}(\ell_b) = \psi_b$ 。考虑到概率流守恒的普遍要求,它还需要满足节点  $a$  处的连接条件,即 Griffith 边条件<sup>[24,38]</sup>

$$\sum_{a,b} \frac{\partial}{\partial \ell} [e^{-ik_{\text{so}} \ell (\hat{z} \times \hat{\gamma}_{ab}) \cdot \boldsymbol{\sigma}} \psi_{ab}] = 0, \quad (4)$$

其中符号  $a, b$  表示求和涉及与节点  $a$  直接相连的所有节点  $b$ 。以(3)式的波函数代入(4)式可得关于任意内部节点  $a$  的方程

$$M_{aa} \psi_a - \sum_{a,b} M_{ab} \psi_b = 0, \quad (5)$$

其中

$$\begin{aligned} M_{aa} &= \sum_{a,b} \cos(kl_{ab}), \\ M_{ab} &= \frac{R_{ab}}{\sin(kl_{ab})}, \\ R_{ab} &\equiv e^{-ik_{\text{so}} l_{ab} (\hat{z} \times \hat{\gamma}_{ab}) \cdot \boldsymbol{\sigma}}. \end{aligned} \quad (6)$$

以(2)式定义的引线中的波函数代入(4)式可得入射、透射和反射波函数在节点 0 和  $N$  处分别满足的方程

$$M_{00} \psi_0 - \sum_{0,b} M_{0b} \psi_b = \frac{ik_0(B - A)}{k}, \quad (7)$$

$$M_{NN} \psi_N - \sum_{N,b} M_{Nb} \psi_b = \frac{ik_0 F}{k}, \quad (8)$$

其中  $M_{00}$ ,  $M_{NN}$ ,  $M_{0b}$  和  $M_{Nb}$  等可由(6)式中的节点  $a$  替换成 0 和  $N$  并对它们最近邻节点求和而得到,即  $M_{0b}$  中  $b$  取节点 1 和  $2N-1$ ,  $M_{Nb}$  中  $b$  取节点  $N-1$  和  $N+1$ 。

## 3. 正多边形量子环

根据(5)–(8)各式的联立方程组,可以求解电子通过任意量子网络的散射问题,并根据 Landauer-Buttiker 输运理论<sup>[23,40]</sup>进一步确定量子网络的电导。

对于如图 1 所示的特殊情形 ,一般形式的量子网络方程(5)–(8)各式可以简化为

$$2\cos(kl)\psi_a - \sum_{a,b} R_{ab}\psi_b = 0, \quad (9)$$

$$2\cos(kl)\psi_0 - \sum_{0,b} R_{0b}\psi_b = \frac{ik_0 \sin(kl)}{k}(B - A), \quad (10)$$

$$2\cos(kl)\psi_N - \sum_{N,b} R_{Nb}\psi_b = \frac{ik_0 \sin(kl)}{k}F, \quad (11)$$

其中正多边形的边长  $l_{ab} \equiv l$ , 量子环上下臂几何对称 ,长度相等 ,记为  $L = Nl$ . 再考虑到引线与量子环连接点的波函数连续性条件 ,还可得到

$$\begin{aligned} \psi_0 &= A + B, \\ \psi_N &= F. \end{aligned} \quad (12)$$

综合以上各式 ,我们得到了关于  $2N+2$  个未知量  $\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_{2N}, B$  和  $F$  的  $2N+2$  个联立方程 ;入射波函数的振幅  $A$  是由实验控制的外部条件 .

我们发现(9)式可以分解为顺时针方向和逆时针方向两个独立的传播模式 ,即

$$\begin{aligned} \psi_n^{(+)} &= e^{ikl}\psi_n - R_{n,n-1}\psi_{n-1}, \\ \psi_n^{(-)} &= \psi_n - e^{ikl}R_{n,n-1}\psi_{n-1}, \end{aligned} \quad (13)$$

并且

$$\begin{aligned} \psi_{n+1}^{(+)} &= e^{ikl}R_{n+1,n}\psi_n^{(+)}, \\ \psi_{n+1}^{(-)} &= e^{ikl}R_{n+1,n}\psi_n^{(-)}. \end{aligned} \quad (14)$$

从而可以得到

$$\begin{aligned} \frac{k}{k_0}[2\cos(2kL)] - D_{2N,N}U_{N,0} - U_{0,N}D_{N,2N}[\mathbf{1}(A + B) \\ = i\sin(2kL)(B - A) + i\sin(kL)(D_{2N,N} + U_{0,N})F, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \frac{k}{k_0}[2\cos(2kL)] - D_{N,2N}U_{0,N} - U_{N,0}D_{2N,N}]F \\ = i\sin(kL)(D_{N,2N} + U_{N,0})(B - A) \\ + i\sin(2kL)F, \end{aligned} \quad (16)$$

其中

$$U_{N,0} \equiv R_{N,N-1}R_{N-1,N-2}\dots R_{1,0},$$

$$D_{2N,N} \equiv R_{2N,2N-1}R_{2N-1,2N-2}\dots R_{N+1,N},$$

$$U_{0,N} = U_{N,0}^{-1},$$

$$D_{N,2N} = D_{2N,N}^{-1}.$$

确定旋转算符  $R_{n+1,n}$  的连乘是解析求解(15)和(16)式的关键 . 在  $\sigma_z$  表象中旋转算符的矩阵形式为

$$R_{n+1,n} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -e^{-i\vartheta_{n+1,n}}\sin\alpha \\ e^{-i\vartheta_{n+1,n}}\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \quad (17)$$

其中  $\vartheta_{n+1,n}$  是由节点  $n+1$  指向节点  $n$  的有向线段与  $x$  轴正向的夹角 ,  $\alpha \equiv k_{so}l$  , 并且  $\vartheta_{n,n+1} = \vartheta_{n+1,n} +$

$\pi$ ,  $R_{n,n+1} = R_{n+1,n}^{-1}$ . 注意到(17)式可以改写为

$$R_{n+1,n} = T(-\vartheta_{n+1,n})S_\alpha T(\vartheta_{n+1,n}),$$

其中

$$\begin{aligned} T(\vartheta_{n+1,n}) &\equiv \begin{pmatrix} e^{i\vartheta_{n+1,n}/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\vartheta_{n+1,n}/2} \end{pmatrix}, \\ S_\alpha &\equiv \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (18)$$

并且

$$T(\vartheta)T(\vartheta') = T(\vartheta + \vartheta'),$$

所以我们可以将旋转算符的连乘  $U_{N,0}$  和  $D_{N,2N}$  改写为

$$U_{N,0} = T(-\vartheta_{N,N-1})S_\alpha T(-\delta)]^N T(\vartheta_{1,0} + \delta), \quad (19)$$

$$D_{2N,N} = T(-\vartheta_{2N,2N-1})[S_\alpha T(-\delta)]^N T(\vartheta_{N,N-1} + \delta). \quad (20)$$

这里  $\delta = \vartheta_{n,n-1} - \vartheta_{n+1,n} = \pi/N$  为如图 1 所示的正  $2N$  边形的外角 , 并且  $\vartheta_{N,N-1} = (\delta + \pi)/2$ ,  $\vartheta_{2N,2N-1} = (\delta - \pi)/2$ . 注意到

$$S_\alpha T(-\delta) = \begin{pmatrix} e^{-i\delta/2}\cos\alpha & -e^{i\delta/2}\sin\alpha \\ e^{-i\delta/2}\sin\alpha & e^{i\delta/2}\cos\alpha \end{pmatrix} \quad (21)$$

是一个典型的  $SU(2)$  矩阵 , 总可以改写为标准形式<sup>[43]</sup>

$$\begin{aligned} U(\hat{n}, \phi) &= \cos\phi + i\sigma_n \sin\phi, \\ U(\hat{n}, \phi) &= e^{i\phi_n}, \end{aligned} \quad (22)$$

其中  $\sigma_n = \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \hat{i}\sin\theta\cos\varphi + \hat{j}\sin\theta\sin\varphi + \hat{k}\cos\theta$  方向的泡利算符 , 在  $\sigma_z$  表象中表示为

$$\sigma_n = \begin{pmatrix} \cos\theta & e^{-i\varphi}\sin\theta \\ e^{i\varphi}\sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}, \quad (23)$$

并且  $\sigma_n^2 = 1$ . 对比方程(21)和(22)可以确定参数  $\phi$ ,  $\theta$  和  $\varphi$  , 即

$$\begin{aligned} \cos\phi &= \cos\alpha \cos\frac{\delta}{2}, \\ \cos\theta &= -\frac{\cos\alpha}{\sin\phi} \sin\frac{\delta}{2}, \\ \cos\varphi &= -\frac{\sin\alpha}{\sin\phi \sin\theta} \sin\frac{\delta}{2}. \end{aligned} \quad (24)$$

利用  $U(\hat{n}, \phi)^\dagger = U(\hat{n}, N\phi)$  公式(19)和(20)可展开为

$$\begin{aligned} U_{N,0} &= \left( \sin\frac{\delta}{2}\cos\alpha + i\sigma_y \sin\alpha \right) \\ &\times \frac{\sin(N\phi)}{\sin\phi} + i\sigma_z \cos(N\phi), \end{aligned} \quad (25)$$

$$D_{2N,N} = \left( \sin\frac{\delta}{2}\cos\alpha - i\sigma_y \sin\alpha \right)$$

$$\times \frac{\sin(N\phi)}{\sin\phi} + i\sigma_z \cos(N\phi). \quad (26)$$

代入(15)和(16)两式,可以得到反射振幅  $B$  和透射振幅  $F$  与入射波振幅  $A$  的关系,即

$$B = \frac{-\sin^2(N\phi) + \cos^2(kL) + (k_0/2k)^2 \sin^2(kL)}{\sin^2(N\phi) - [\cos(kL) - (k_0/2k)\sin(kL)]^2} A, \quad (27)$$

$$F = \frac{(k_0/k)\sin(kL)\sin(N\phi)}{\sin^2(N\phi) - [\cos(kL) - (k_0/2k)\sin(kL)]^2} \\ \times \left[ \frac{\sin(\delta/2)\cos\alpha}{\sin\phi} + i\sigma_y \frac{\sin\alpha}{\sin\phi} \right] A. \quad (28)$$

由此可得到反射率  $R \equiv B^\dagger B/A^\dagger A$  和透射率  $T \equiv F^\dagger F/A^\dagger A$  的解析表达式

$$R = \frac{[4\cos(2N\phi) + 4\cos(2kL) + (k_0/k)(1 - \cos(2kL))]^2}{[(k_0/k)(1 - \cos(2kL)) - 4\cos(2kL) - 4\cos(2N\phi)]^2 + 16(k_0/k)^2 \sin^2(2kL)}, \quad (29)$$

$$T = \frac{64(k_0/k)^2 \sin^2(kL) \sin^2(N\phi)}{[(k_0/k)(1 - \cos(2kL)) - 4\cos(2kL) - 4\cos(2N\phi)]^2 + 16(k_0/k)^2 \sin^2(2kL)}. \quad (30)$$

容易验证  $R + T = 1$ , 满足概率流守恒的要求.

如果不存在 SOI, 即  $k_{so} = 0$ ,  $R_{ab} = 1$ , 则以上结果简化为

$$B = -\frac{3\sin(k_0 L)}{5\sin(k_0 L) + 4\cos(k_0 L)} A, \\ F = \frac{4i}{5\sin(k_0 L) + 4i\cos(k_0 L)} A, \quad (31)$$

$$R = \frac{9\sin^2(k_0 L)}{16 + 9\sin^2(k_0 L)}, \\ T = \frac{16}{16 + 9\sin^2(k_0 L)}. \quad (32)$$

系统的反射率  $R$  和透射率  $T$  只依赖于电子从入射节点 0 到出射节点  $N$  的动力学相位变化  $k_0 L$ . 事实上, 只要多边形环上下臂的长度  $L$  保持不变, 环的形状和边长可以任意改变而不影响电子的量子输运特性. 而(31)式的一个显著特征则是入射电子的自旋态在输运过程中始终保持不变. 电子在正常金属导线中的量子输运过程与电子的自旋自由度无关,

这正是传统电子学的突出特点.

值得强调的是, 如果  $\sin(kL) = 0$ , 则(3)式不再成立. 此时我们直接求解定态薛定谔方程可以得到

$$\psi_{n,n+1}(\ell) = \sin(k\ell) e^{ik_{so}\ell(\hat{z} \times \hat{\gamma}_{n,n+1}) \cdot \sigma} \xi_n, \quad (33)$$

其中  $\xi_n = e^{iknl} \xi_0$ ,  $\ell$  是从节点  $n$  到节点  $n+1$  方向的局部坐标. 对于(33)式的驻波, 概率流处处为零, 并且

$$B = -A, \\ F = 0, \quad (34)$$

即具有这些特殊能量的入射电子完全反射. 作为特例, 这一结论已经包含在一般表达式(27)和(28)中.

根据 Landauer-Büttiker 公式<sup>[23, 40]</sup>

$$G = \frac{e^2}{h} \sum_{\sigma' \sigma} T^{\sigma' \sigma}, \quad (35)$$

可以计算得到零偏压下量子环的电导, 式中  $T^{\sigma' \sigma}$  表示电子由入射自旋态  $\sigma$  散射到自旋态  $\sigma'$  的透射率,  $\sigma\sigma' = \uparrow, \downarrow$ . 由(30)式不难证明  $T^{\uparrow\uparrow} + T^{\downarrow\uparrow} = T^{\uparrow\downarrow} + T^{\downarrow\downarrow} = T$ , 所以

$$G/G_0 = \frac{16\sin^2(kL)\sin^2(N\phi)}{\left[\left(\frac{k_0}{k} + \frac{4k}{k_0}\right)\sin^2(kL) - \frac{4k}{k_0}\cos^2(N\phi)\right]^2 + 4\sin^2(2kL)}, \quad (36)$$

其中电导常数  $G_0 \equiv 2e^2/h$ . 若  $k_{so} = 0$ , 则由(24)式可得  $N\phi = \pi/2$ , 电导公式(36)简化为

$$G/G_0 = \frac{16}{16 + 9\sin^2(k_0 L)}. \quad (37)$$

图 2 中的实线显示了无 SOI 的多边形量子环的电导  $G$  随  $k_0 L$  在  $0.64G_0 - G_0$  范围内周期变化, 周期为  $\pi$ , 并且不出现零电导的情况. 虽然电导  $G$  近似

地仍然是  $k_0 L$  的周期函数, 但 SOI 将改变量子环电导的数值. 特别地, 如果入射波矢取特殊值使得  $\sin(kL) = 0$ , 只要存在微弱的 Rashba 自旋轨道耦合, 即  $k_{so} \neq 0$ , 则由(24)式可知  $\cos(N\phi) \neq 0$ , 从而  $G = 0$ . 如图 2 所示, 在  $kL = n\pi$  (其中  $n = 1, 2, 3, \dots$ ) 这样一些特殊波矢附近, 量子环迅速趋近零电导. 以  $k_{so} L = 0.3\pi$  和  $k_{so} L = 0.88\pi$  两种典型情况为例, 前一种情

形下的电导曲线(虚线)与无 SOI 的量子环的电导曲线(实线)基本一致,仅在零电导点附近出现明显差别;而后一种情形下的电导(点线)却与无 SOI 量子环的情形处处明显偏离,电导远远低于无 SOI 情形下最小值  $0.64G_0$ .

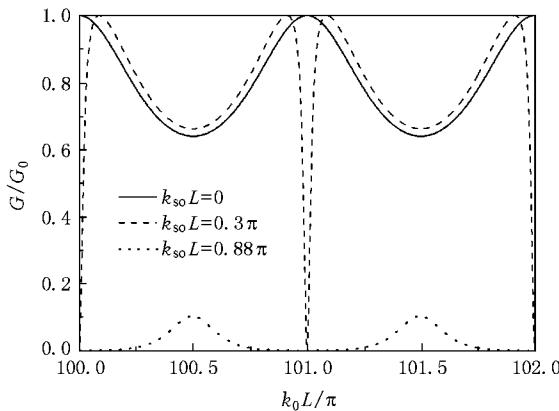


图 2 不同 Rashba 耦合强度情形下,  $k_{\text{so}}L = 0, 0.3\pi, 0.88\pi$ , 正六边形量子环的电导随入射波矢  $k_0L$  变化的函数关系

为了更深入地认识 SOI 对电导的调制,可以选定入射波矢  $k_0$  研究电导  $G$  随  $k_{\text{so}}L$  的变化.对于实际系统<sup>[5, 28-30]</sup>,以 InAlAs/InGaAs 异质结为例<sup>[29]</sup>,描述自旋轨道耦合强度的  $k_{\text{so}}$  取值在  $1.31-5.87 \mu\text{m}^{-1}$  之间,入射电子的 Fermi 波长约为  $\lambda_F \approx 31.4 \text{ nm}$ ,因而  $k_0 \approx 0.2 \text{ nm}^{-1}$ ,  $k_0/k_{\text{so}} \approx 17-76$ . 设  $k_0L = 101.5\pi$ , 则  $L \approx 1.5 \mu\text{m}$  与实际样品的尺寸相符.

图 3 以正方形和正六边形为例显示量子环的电

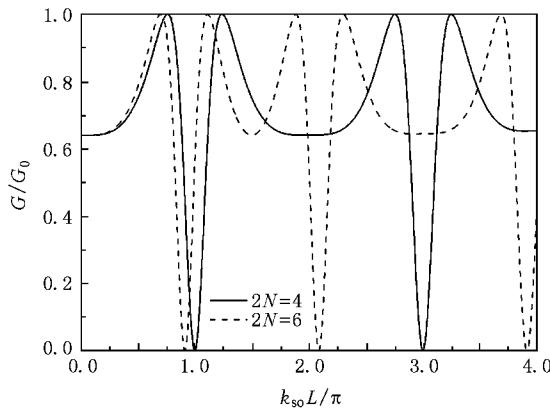


图 3 正方形( $2N = 4$ )和正六边形( $2N = 6$ )量子环的电导随 Rashba 耦合强度变化的函数关系 入射电子的波矢  $k_0L = 101.5\pi$

导  $G$  随 Rashba 耦合强度  $k_{\text{so}}L$  的变化方式. 在我们所选择的耦合强度数值范围内,  $k_{\text{so}}L \in [0, 4\pi]$ ,  $kL \in$

$[101.5\pi, 101.6\pi]$ (36)式不出现由  $\sin^2(kL)$  决定的零点, 电导零点的位置由  $\sin(N\phi) = 0$ , 即由  $\phi = m\pi/N$  按下列方程确定:

$$\cos\left(\frac{k_{\text{so}}L}{N}\right) = \frac{\cos(m\pi/N)}{\cos(\pi/2N)} \quad (m = 1, 2, \dots, N-1). \quad (38)$$

图 3 中的实线是正方形量子环的电导随  $k_{\text{so}}L$  在区间  $[0, 4\pi]$  的变化曲线, 第一个电导零点为  $k_{\text{so}}L = \pi$ , 第二个电导零点为  $k_{\text{so}}L = 3\pi$ . 图 3 中的虚线是正六边形量子环的电导曲线, 三个电导零点分别为  $k_{\text{so}}L \approx 0.91\pi, 2.08\pi, 3.91\pi$ . 类似的计算和分析可以推广到任意正多边形环的情形.

#### 4. 圆环极限

如果我们以边数趋于无穷大的正多边形来逼近圆环, 则  $\delta = \pi/N \rightarrow 0$ ,  $\alpha = k_{\text{so}}L/N \rightarrow 0$ , 根据(24)式可得  $\phi \rightarrow 0$ , 并且

$$N\phi = \frac{\pi}{2} \left[ \left( \frac{2k_{\text{so}}L}{\pi} \right)^2 + 1 \right]^{1/2}, \quad (39)$$

代入(36)式可以得到量子圆环的电导公式<sup>[21-24]</sup>. 此时电导  $G$  随  $k_{\text{so}}L$  变化的方式如图 4 所示.

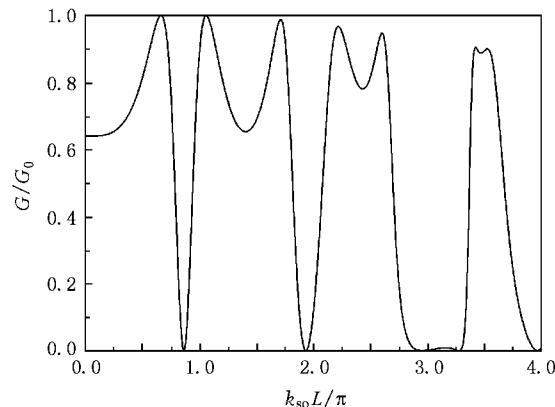


图 4 边数  $2N \rightarrow \infty$  的正多边形量子环的电导随 Rashba 耦合强度  $k_{\text{so}}L/\pi$  变化的函数关系  $G_0 = 2e^2/h$ , 入射电子的波矢  $k_0L = 10.5\pi$

由  $\sin(kL) = 0$  导致的电导零点可以确定为

$$k_{\text{so}}L = \sqrt{(m_1\pi)^2 - (k_0L)^2}, \quad (40)$$

其中  $m_1$  为正整数, 依赖于入射电子的波矢  $k_0L$ . 在图 4 中取入射电子的波矢为  $k_0L = 10.5\pi$ , 由此导致的电导零点为  $m_1 = 11$ , 对应的 Rashba 自旋轨道耦合强度为  $k_{\text{so}}L \approx 3.28\pi$ . 另外, 由  $\sin(N\phi) = 0$  导致的

电导零点可以确定为

$$k_{so}L = \frac{\pi}{2} \sqrt{(2m_2)^2 - 1}, \quad (41)$$

其中  $m_2 = 1, 2, 3, 4, \dots$ , 或者  $k_{so}L \approx 0.87\pi, 1.94\pi, 2.96\pi, 3.97\pi, \dots$ , 与入射电子的波矢  $k_0L$  无关, 并且当  $m_2 \gg 1$  时,  $k_{so}L \approx m_2\pi$ . 我们也采用(36)式计算了  $2N=10000$  的正多边形的电导, 与直接根据圆环电导公式计算的电导曲线完全符合.

## 5. 结 论

本文研究了存在 Rashba 自旋轨道相互作用的正多边形量子环的自旋输运特性. 运用量子网络的

典型方法和 Landauer-Büttiker 公式, 严格求解了电子通过正多边形量子环的散射问题, 并得到了电导的解析表达式. 不仅提出了严格求解正多边形自旋输运问题的一般方法, 而且还确定了量子环电导随入射电子波矢和 Rashba 自旋轨道耦合强度变化的复杂形式, 包括源于自旋轨道耦合相互作用的电导零点系列, 为实验研究提供了更准确的理论预言<sup>[33, 34, 36]</sup>. 特别地, 我们还研究了正多边形环边数趋近于无穷大( $N \rightarrow \infty$ )时的极限情形, 证明了有关的散射问题和电导的解析表达式与直接采用圆环模型得到的相应结果完全一致.

- 
- [ 1 ] Sakurai J J 1994 *Modern Quantum Mechanics* (revised Ed.) (Boston: Addison-Wesley) p304
- [ 2 ] Rashba E I 1960 *Fiz. Tverd Tela* (Leningrad) **2** 1224
- [ 3 ] Dresselhaus G, Kip A F, Kittel C 1955 *Phys. Rev.* **98** 368
- [ 4 ] Winkler R 2003 *Spin-orbit Coupling Effects in Two-dimensional Electron and Hole Systems* (Berlin, Heidelberg: Springer) p69
- [ 5 ] Nitta J, Akazaki T, Takayanagi H, Enoki T 1997 *Phys. Rev. Lett.* **78** 1335
- [ 6 ] Wolf S A, Awschalom D D, Buhrman R A, Daughton J M, von Molnar S, Roukes M L, Chtchelkanova A Y, Treger D M 2001 *Science* **294** 1488
- [ 7 ] Zutic I, Fabian J, Sarma S D 2004 *Rev. Mod. Phys.* **76** 323
- [ 8 ] Data S, Das B 1990 *Appl. Phys. Lett.* **56** 665
- [ 9 ] Nitta J, Meijer F E, Takayanagi H 1999 *Appl. Phys. Lett.* **75** 695
- [ 10 ] Egues J C, Burkard G, Loss D 2003 *Appl. Phys. Lett.* **82** 2658
- [ 11 ] Cartoixa X, Ting D Z Y, Chang Y C 2003 *Appl. Phys. Lett.* **83** 1462
- [ 12 ] Hall K C, Lau W H, Gündogdu K, Flatté M E, Boggess T F 2003 *Appl. Phys. Lett.* **83** 2937
- [ 13 ] Bandyopadhyay S, Cahay M 2004 *Appl. Phys. Lett.* **85** 1433
- [ 14 ] Ando T 1989 *Phys. Rev. B* **40** 5325
- [ 15 ] Oreg Y, Entin-Wohlman O 1992 *Phys. Rev. B* **46** 2393
- [ 16 ] Souma S, Nikolic B K 2004 *Phys. Rev. B* **70** 195346
- [ 17 ] Meijer F E, Morpurgo A F, Klapwijk T M 2002 *Phys. Rev. B* **66** 033107
- [ 18 ] Aronov A G, Lyanda-Geller Y B 1993 *Phys. Rev. Lett.* **70** 343
- [ 19 ] Mathur H, Stone A D 1992 *Phys. Rev. Lett.* **68** 2964
- [ 20 ] Qian T Z, Su Z B 1994 *Phys. Rev. Lett.* **72** 2311
- [ 21 ] Choi T, Cho S Y, Ryu C M, Kim C K 1997 *Phys. Rev. B* **56** 4825
- [ 22 ] Shen S Q, Li Z J, Ma Z S 2004 *Appl. Phys. Lett.* **84** 996
- [ 23 ] Frustaglia D, Richter K 2004 *Phys. Rev. B* **69** 235310
- [ 24 ] Molnar B, Peeters F M, Vasilopoulos P 2004 *Phys. Rev. B* **69** 155335
- [ 25 ] Splettstoesser J, Governale M, and Zulicke U 2003 *Phys. Rev. B* **68** 165341
- [ 26 ] Sheng J S, Chang K 2006 *Phys. Rev. B* **74** 235315
- [ 27 ] Citro R, Romeo F 2007 *Phys. Rev. B* **75** 073306
- [ 28 ] Konig M, Tschechelkin A, Hankiewicz E M, Jairo Sinova, Hock V, Daumer V, Schafer M, Becker C R, Buhmann H, Molenkamp L W 2006 *Phys. Rev. Lett.* **96** 076804
- [ 29 ] Bergsten T, Kobayashi T, Sekine Y, Nitta J 2006 *Phys. Rev. Lett.* **97** 196803
- [ 30 ] Grbic B, Leturcq R, Ihn T, Ensslin K, Reuter D, Wieck A D 2007 *Phys. Rev. Lett.* **99** 176803
- [ 31 ] Bercioux D, Governale M, Cataudella V, Ramaglia V M 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 056802
- [ 32 ] Bercioux D, Governale M, Cataudella V, Ramaglia V M 2005 *Phys. Rev. B* **72** 075305
- [ 33 ] Ramaglia V M, Cataudella V, Filippis G D, Perroni C A 2006 *Phys. Rev. B* **73** 155328
- [ 34 ] Bercioux D, Frustaglia D, Governale M 2005 *Phys. Rev. B* **72** 113310
- [ 35 ] Koga T, Nitta J, van Veenhuizen M J 2004 *Phys. Rev. B* **70** 161302R
- [ 36 ] van Veenhuizen M J, Koga T, Nitta J 2006 *Phys. Rev. B* **73** 235315
- [ 37 ] Koga T, Sekine Y, Nitta J 2006 *Phys. Rev. B* **74** 041302R
- [ 38 ] Xia J B 1992 *Phys. Rev. B* **45** 3593
- [ 39 ] Zulicke U, Schroll C 2002 *Phys. Rev. Lett.* **88** 29701
- [ 40 ] Datta S 1997 *Electronic Transport in Mesoscopic Systems* (Cambridge: Cambridge University Press) p57
- [ 41 ] Mireles F, Kirczenow G 2001 *Phys. Rev. B* **64** 024426
- [ 42 ] Governale M, Zulicke U 2002 *Phys. Rev. B* **66** 073311
- [ 43 ] Ma Z Q 2007 *Group Theory for Physicists* (Singapore: World Scientific Publishing Company) Chapt. 4

# Exact solutions to the transportation of electrons through equilateral polygonal quantum rings with Rashba spin-orbit interaction

Li Peng Deng Wen-Ji<sup>†</sup>

( Department of Physics , South China University of Technology , Guangzhou 510641 , China )

( Received 12 June 2008 ; revised manuscript received 16 September 2008 )

## Abstract

The quantum transportation of electron through equilateral polygonal quantum rings with Rashba spin-orbit interaction is studied. By using the typical method of quantum network and the Landauer-Büttiker formalism , we solve analytically the scattering problem of electron through any equilateral polygonal quantum ring , and obtain the relevant formula for spin transportation conductance. The characters of conductance varying with wave-vector of electron and the strength of spin-orbit interaction are investigated , and the series of zero conductance points originating from spin-orbit interaction is determined. In the limit of infinite number of borders of equilateral polygon , we prove that the formula is consistent with the results obtained directly from the circular model of quantum rings .

**Keywords** : Rashba spin-orbit interaction , quantum network , quantum transport

**PACC** : 7320D , 7335 , 7170C

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail : phwjdeng@scut.edu.cn