第 58 卷 第 5 期 2009 年 5 月
1000-3290/2009/58(05)/2873-05
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol.58,No.5,May,2009

有限精度函数理论与 Einstein-Maxwell 方程的光子解

陈 光
(东华大学信息科学与技术学院,上海 201620)
(2008 年 7 月 18 日收到;2008 年 12 月 4 日收到修改稿)

提出了有限精度函数理论,并基于该理论求出了有限精度的 Einstein-Maxwell 方程的光子解,揭示了经典光子的电磁、引力与时空几何的重要性质.

关键词:有限精度函数理论,Einstein-Maxwell 方程,光子解
PACC:0230,0420

1. 引 言

本文首先介绍有限精度函数理论,它是作者前期初步工作的改进.该工作曾被用与经典广义相对论结合并讨论了 Oppenheimer 和 Snyder 的均匀密度零压星的引力塌缩解[1,2].我们发现了这个著名的引力解的不完整性并将其修正为一个静态的物质球解,导出了时空的离散结构并消除了时空奇点.接着,基于有限精度函数理论,我们将求出有限精度的 Einstein-Maxwell 方程的一个光子解,由此揭示出经典光子的电磁、引力与时空几何等方面的重要性质.

2. 有限精度函数理论

2.1. i 阶实数及其等价类

任一实数总可表示为 $A_i=\alpha_i C^i$.其中,C 为标度系数,是一个大于 1 的正实数;α_i 为 0 或满足 $C^{1/2}>|\alpha_i|\geqslant C^{-1/2}$的实数;$i\subset\{0,\pm1,\pm2,\cdots\}$.称 A_i 为以 C 为标度的 i 阶实数,简称 i 阶实数.

定义 i 阶实数的集合,其中任意的两个 i 阶实数 A_i 和 B_i 之差的绝对值小于或等于一个给定的 $i'\leqslant i$阶的正实数.称该集合为 i 阶实数 A_i 或 B_i 的一个 i' 阶等价类,记为 $\widetilde{A}_{ii'}$ 或 $\widetilde{B}_{ii'}$.又称其中的任意两个 i 阶实数 A_i 和 B_i 为 i' 阶等价的,记为 $A_i\overset{i'}{\approx}B_i$.

可知,以任一 i 阶实数 $A_i=\alpha_i C^i$ 为参考点可以在实数域上形成不同的 i' 阶等价类 $\widetilde{A}_{ii'}$.另外,一个 i 阶实数的 i' 阶等价类可以表示为 i'' 阶等价类的集合,而一个 i''阶等价类又可以表示为 i'''阶等价类的集合等等,其中 $i'\geqslant i''\geqslant i'''\geqslant\cdots$.

记实数域为 R,又记 R 上的实数等价类的全体为 $\widetilde{R}$.

2.2. 函 数

一个函数表示自变量与因变量之间的映射.自变量简称变量,而因变量简称函数.变量与函数均为 $\widetilde{R}$ 上的集合.

2.3. 函数的运算

2.3.1. 极限

设 $f(x)$为一 i 阶函数,A 是一个 i 阶实数,x_0 是 j 阶变量的一个元素.称 A 为$f(x)$当 x 趋于x_0 的极限,如果存在 x_0 的 j' 阶等价类和 A 的 i' 阶等价类,且当 x 属于x_0 的 j'阶等价类时,$f(x)$属于 A 的 i'阶等价类:

$$f(x)\overset{i'}{\approx}A,x\overset{j'}{\approx}x_0,\quad i'\leqslant i,j'\leqslant j. \tag{1}$$

2.3.2. 连续

设 i 阶函数$f(x)$在 $\widetilde{R}$ 的一个j 阶实数集合上有定义,且对应于该集合中的一个元素 x_0 有 i 阶函数值$f(x_0)$.称函数 $f(x)$在该元素 x_0 上连续,如果对应于 x_0 的 j'阶等价类,存在 $f(x_0)$的 i'阶等价类,且当 x 属于x_0 的 j'阶等价类时,$f(x)$属于 $f(x_0)$的 i'

阶等价类：

$$f(x) \overset{i'}{\approx} f(x_0), x \overset{j'}{\approx} x_0,$$
$$i' \leqslant i, j' \leqslant j. \tag{2}$$

2.3.3. 微分与导数

设 $f(x)$ 为 j 阶变量 x 的 k 阶函数，Δx 为 x 的一个 $j'(j' \leqslant j)$ 阶等价类中的最左边的 $j''(j'' \leqslant j')$ 阶等价类中的任一元素与最右边的 j'' 阶等价类中的任一元素之差，则称

$$\mathrm{d}y \overset{k''}{\approx} f(x + \Delta x) - f(x),$$
$$k'' \leqslant k', k' \leqslant k \tag{3}$$

为 k 阶函数 $f(x)$ 的微分．又称 $\mathrm{d}x \overset{j''}{\approx} \Delta x$ 为 j 阶变量 x 的微分．

如果对于任一 Δx，存在 i 阶实数 $f'(x)$ 的 $i'(i' \leqslant i)$ 阶等价类：

$$f'(x) \overset{i'}{\approx} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \overset{i'}{\approx} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \tag{4}$$

则称 $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导数．

称 $f'(x)$ 为 x 的导函数并简称导数，如果(4)式在 $\tilde{R}$ 的一个实数等价类集合中的每一个点上均成立．

2.3.4. 积分

1)不定积分

如果 i 阶函数 $f(x)$ 在 $\tilde{R}$ 的一个 j 阶实数集合上有定义，且 $f(x)$ 是 k 阶函数 $F(x)$ 的导数，从而 $f(x)\mathrm{d}x$ 是 $F(x)$ 的微分，即

$$f(x) \overset{i'}{\approx} F'(x) \overset{i'}{\approx} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}, i' \leqslant i$$

或

$$\mathrm{d}F(x) \overset{k''}{\approx} f(x)\mathrm{d}x,$$
$$k'' \leqslant k', k' \leqslant k,$$

则称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数．

易证，如果在 $\tilde{R}$ 的一个集合上，$F(x)$ 是函数 $f(x)$ 的一个原函数，则 $F(x) + \eta$ 也是 $f(x)$ 的原函数，这里 $\eta \overset{k''}{\approx} D$，而 D 为任意的实常数．

称 i 阶函数 $f(x)$ 的 k 阶原函数 $F(x) + \eta$ 的全体为 i 阶函数 $f(x)$ 的不定积分，并记

$$\int f(x)\mathrm{d}x \overset{k'}{\approx} F(x) + \eta. \tag{5}$$

2)定积分

设 $f(x)$ 为 $\tilde{R}$ 的一个 j 阶实数的 $j'(j' \leqslant j)$ 阶等价类的集合上的 i 阶连续函数，a 和 b 分别为这个集合上的两个实数且 $a < b$，而 $[a, b]$ 为这个集合上的包含 a 和 b 以及所有小于 b 和大于 a 的 j 阶实数的 j' 阶等价类的一个子集，其中每个 j' 阶等价类具有一个最左边和一个最右边的 $j''(j'' \leqslant j')$ 阶等价类，共有 $\omega + 1$ 个这样的 j'' 阶等价类：$\{\tilde{x}_l, l = 0, 1, \cdots, \omega\}$．在每个 j'' 阶等价类中任取一个实数 $x_l \in \tilde{x}_l$，$l = 0, 1, 2, \cdots, \omega$，并形成一个实数点列

$$\Delta_\omega \overset{j''}{\approx} \{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_\omega\},$$
$$a \overset{j''}{\approx} x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_\omega \overset{j''}{\approx} b.$$

定义 $\Delta x_l \overset{j''}{\approx} x_l - x_{l-1}$，$l = 1, 2, \cdots, \omega$，并形成 k 阶和

$$\sum_{l=1}^{\omega} f(x_{l'})\Delta x_l, x_{l-1} \leqslant x_{l'} \leqslant x_l.$$

如果对于任一点列 Δ_ω，这些和式都是 $k'(k' \leqslant k)$ 阶等价的，则称其为 f 在 $[a, b]$ 上的定积分，并记

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \overset{k'}{\approx} \sum_{l=1}^{\omega} f(x_{l'})\Delta x_l. \tag{6}$$

以上定义可以直接地推广到多元函数．

2.4. 有限精度的函数理论与无限精度的函数理论的关系

首先，建立在实数等价类集合上的函数理论是一个有限精度的数学理论，而建立在实数域上的现有的函数理论则是一个无限精度的数学理论．其次，在无限精度函数理论中包含了无穷大和无穷小，这些量并不是实数，而是数学的奇点，因此无限精度函数理论并不是一个奇性自由的数学理论．有限精度函数理论不包含无穷大和无穷小，因而是一个奇性自由的数学理论．另外，任一无限精度的函数都可以扩展为有限精度的函数．例如，对于无限精度函数理论意义上的任一连续区间 $[a, b]$ 上的函数，可以选取特定的标度系数 C 并选取 $\omega + 1$ 个 $i''(i'' = i' - 1)$ 阶等价类将 $[a, b]$ 加以分割并映射为 ω 个 i' 阶等价类，其中除了包含 a 和 b 的两个 i'' 阶等价类之外，其他任一 i'' 阶等价类同时属于相邻的两个 i' 阶等价类．相应地，连续函数的值也可以映射为 i' 阶等价类的集合．由此可以得到一个有限精度的函数，使得有限精度函数在其变量的等价类上的取值为无限精度函数值的一个等价类，并在等价类上保持相应的极限、连续、导数、微分和积分的性质，等等．同时，对于给定阶数的实数等价类例如 $0(i = 0)$ 阶实数的 $-1(i' = -1)$ 阶等价类变量而言，当 $C \to \infty$ 时，有 $\omega \to \infty$，这时有限精度函数将退化为无限精度函数；而对于给定的标度系数 C 的实数等价类变量而言，当等

价关系“ $\overset{i'}{\approx}$ ”中的 i' 取遍所有整数时，有限精度函数也将退化为无限精度函数. 实际上，当 i' 遍取所有整数时，有限精度函数理论中的等价关系“ $\overset{i'}{\approx}$ ”也就等同于无限精度函数理论中的相等关系“ $=$ ”. 这就意味着：一方面，有限精度的函数理论包含了无限精度的函数理论；另一方面，对于任一无限精度的体系，可以在保持其形式不变的情况下，将其中的函数与变量及其运算符号均赋予有限精度函数理论的含义，使之成为一个有限精度的体系.

可知，在有限精度函数理论中可以通过改变标度系数 C 和阶数 i 及相应的等价类并由等价关系而赋予所表示的体系以不同的精度或不确定性，并在一定的条件下退化为无限的精度或确定的形式. 从而有限精度函数理论将可以统一地描述确定和不确定的系统.

最后，作为有限精度函数理论中函数的值域或定义域的等价类集合一般是一个离散点集，并在特殊的情况下可以近似地表示为一个连续统. 于是，有限精度函数理论将不但可以描述一般的离散系统，而且还可以描述特殊的连续系统，从而达到了离散与连续的统一.

由此可见，有限精度函数理论是无限精度函数理论的改进与扩展.

3. 有限精度的 Einstein-Maxwell 方程的光子解

已知，无限精度的 Einstein 引力场方程为

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -8\pi G T_{\mu\nu}. \tag{7}$$

若取共形平直时空度规为

$$g_{\mu\nu} = \zeta^2 \eta_{\mu\nu},$$
$$\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1), \tag{8}$$

并将其代入(7)式则可导出能量动量张量为

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi G}\Big[2\zeta_{,\mu}\zeta_{,\nu} - \zeta\zeta_{,\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\eta^{\rho\lambda}(\zeta_{,\rho}\zeta_{,\lambda} - 2\zeta\zeta_{,\rho\lambda})\Big]. \tag{9}$$

而无限精度的 Maxwell 电磁场方程为

$$F^{\mu\nu}_{;\nu} = 0, F_{\mu\nu;\lambda} + F_{\nu\lambda;\mu} + F_{\lambda\mu;\nu} = 0,$$
$$F_{\mu\nu} = A_{\nu;\mu} - A_{\mu;\nu}. \tag{10}$$

相应的电磁场能量动量张量为

$$T_{\mu\nu} = F_{\mu\lambda}F^{\lambda}_{\nu} + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}. \tag{11}$$

基于有限精度函数理论，可将上述体系中的时空坐标和场都由一个连续统替换为相应的实数等价类的集合，并将由符号“ $=$ ”所表示的相等关系替换为由符号“ $\overset{i'}{\approx}$ ”所表示的等价关系. 在这样的变换中，对于 i 阶实数 $A_i = \alpha_i C^i$，我们选取标度系数 C 为一个充分大的正实数. 对于等价关系“ $A_i \overset{i'}{\approx} B_i$ ”，当 i' 取给定值时，表示两个 i 阶实数 A_i 和 B_i 之间是 $i' = i-1$ 阶等价的，而当 i' 不取给定值时，则表示 A_i 和 B_i 之间是无限精度等价亦即是相等的. 如是，基于有限精度函数理论，我们联解(7)—(11)式的变换形式，同时选择横规范，并选取这样的坐标系使得电磁场沿着 Z 轴的方向传播，则可得到如下的解：

共形因子

$$\zeta \overset{-1}{\approx} 1 \pm \beta(x^0 - x^3 - \tau), \tag{12}$$

其中 $\zeta \overset{-1}{\approx} 1, \beta(x^0 - x^3 - \tau) \overset{-1}{\approx} 0, x^0 \overset{-i'}{\approx} t, x^3 \overset{i'}{\approx} z$，而 β 和 τ 为参量.

电磁势

$$A_1 \overset{-2}{\approx} b(\zeta - 1) \overset{-2}{\approx} \pm b\beta(t - z - \tau),$$
$$b^2 \overset{i'}{\approx} \frac{1}{2\pi G}. \tag{13}$$

电磁场

$$E_1 \overset{0}{\approx} \pm b\beta,$$
$$E_2 \overset{0}{\approx} \pm b\beta, \tag{14}$$

亦即

$$E_1 \overset{0}{\approx} b\beta,$$
$$B_2 \overset{0}{\approx} b\beta, \tag{14a}$$

或

$$E_1 \overset{0}{\approx} -b\beta,$$
$$B_2 \overset{0}{\approx} -b\beta. \tag{14b}$$

电磁场的能量动量张量

$$T_{\mu\nu} \overset{1}{\approx} \begin{cases} \dfrac{\beta}{2\pi G\zeta^2} \overset{1}{\approx} \dfrac{\beta}{2\pi G}, & \mu\nu = 00, 03, 30, 33, \\ 0, & \text{其他 } \mu\nu. \end{cases} \tag{15}$$

可知，(12)—(15)式描述了沿着 Z 轴方向运动的一个光子. 其中，在任一给定的时间坐标等价类上光子的电磁场在 Z 轴和垂直于 Z 轴的方向上具有有限尺度的分布，而在这种分布之外的时空是没有定义的. 这说明了光子具有离散的时空结构. 又考虑到引

力是由时空几何来表示的,这就意味着,光子是不存在外部引力场的.

对(15)式中的电磁场的能量密度 T_{00} 积分可以求出光子的能量为

$$E \overset{-1}{\approx} \int_{\Omega} T_{00} \sqrt{-g}\,\mathrm{d}\upsilon \overset{-1}{\approx} \int_{\Omega} T_{00}\,\zeta^4\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \overset{-1}{\approx} \int_{\Omega} \frac{\beta^2 \zeta^2}{2\pi G}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z. \tag{16}$$

又考虑到 $\zeta \overset{-1}{\approx} 1$,有

$$E \overset{-1}{\approx} \int_{\Omega} \frac{\beta^2 \zeta^2}{2\pi G}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \overset{-1}{\approx} \int_{\Omega} \frac{\beta^2 \zeta^4}{2\pi G}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \overset{-1}{\approx} \frac{\beta^2}{2\pi G}\upsilon, \tag{17}$$

其中光子的体积为

$$\upsilon \overset{-3}{\approx} \int_{\Omega} \zeta^4\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \overset{-3}{\approx} \int_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \overset{-3}{\approx} 2\pi G\,\frac{E}{\beta^2}. \tag{18}$$

由(12)式,当 $x^0 - \tau \overset{i'}{\approx} 0$ 时,有

$$|\beta(x^0 - x^3 - \tau)| \overset{-2}{\approx} |\beta x^3| \leqslant \beta\,|x^3|_{\max} \overset{-2}{\approx} \beta\,\frac{l}{2} \overset{-2}{\approx} \sigma \overset{-1}{\approx} 0,$$

从而有

$$l \overset{-3}{\approx} 2\,|x^3|_{\max} \overset{-3}{\approx} \frac{2\sigma}{\beta}. \tag{19}$$

这里,$l \overset{-3}{\approx} 2|x^3|_{\max}$,而 σ 为一个无量纲的常数且最多是 -1 阶的.再考虑到 β 具有能量的量纲,相关的能量自然是电磁场的能量 E,因此可设 β 与 E 之间相差一个无量纲的比例系数,适当选择时空标度可使得这个系数为 $\frac{1}{\sigma}$,从而有 $\beta \overset{i'}{\approx} \frac{E}{\sigma}$. 于是,由(18)和(19)式,可以导出

$$\upsilon \overset{-3}{\approx} Sl,\quad S \overset{i'}{\approx} \pi G,\quad l \overset{-3}{\approx} \frac{2\sigma^2}{E}. \tag{20}$$

其中,$S \overset{i'}{\approx} \pi G$ 为光子的横截面的面积,而 $l \overset{-3}{\approx} \frac{2\sigma^2}{E}$ 为光子的纵向长度.

综上所述,基于有限精度函数理论,我们求出了 Einstein-Maxwell 方程的光子解,这个经典光子具有如下的基本性质:

1)光子的电磁场具有有限的时空分布,其横向分布是一个半径为 Planck 长度的圆,而纵向分布则决定于光子的能量.一个具有 0 阶能量的光子,其电磁势是 -1 阶的,电磁场是 1 阶的,能量动量张量是 2 阶的,而纵向长度和体积都是 -2 阶的.

2)光子的内部时空几何是 -1 阶地等价于 Minkowski 时空的:$\zeta \overset{-1}{\approx} 1$.

3)光子不存在外部时空几何亦即外部引力场.这说明光子具有离散的时空结构,并且在光子与光子之间不存在引力相互作用.

[1] Chen G 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 2971(in Chinese)[陈 光 2005 物理学报 **54** 2971]

[2] Chen G 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 1539(in Chinese)[陈 光 2006 物理学报 **55** 1539]

Finite precision function theory and photon solution of Einstein-Maxwell equations

Chen Guang

(*College of Information Science and Technology*, *Donghua University*, *Shanghai* 201620, *China*)

(Received 18 July 2008; revised manuscript received 4 December 2008)

Abstract

This paper puts forward the finite precision function theory. Based on the function theory, a photon solution of finite precision Einstein-Maxwell equations is founded, and the important properties of electromagnetism, gravitation and space-time geometry of the classical photon are revealed.

Keywords: finite precision function theory, Einstein-Maxwell equations, photon solution

PACC: 0230, 0420