

# 光声互作用模型中的 Pancharatnam 相位\*

郑力明<sup>1)†</sup> 王发强<sup>2)</sup> 刘颂豪<sup>2)</sup>

1) 暨南大学信息科学技术学院电子工程系, 广州 510632)

2) 华南师范大学信息光电子科技学院, 广州 510006)

(2008 年 10 月 23 日收到, 2008 年 11 月 20 日收到修改稿)

通过解析求解简单极化激元模型的 Pancharatnam 相位, 研究了温度、耦合强度、声子与光子频率差、平均光子数等对其演化的影响. 结果表明, Pancharatnam 相位随时间振荡, 且振荡频率和振荡波形随时间变化, 这种变化随着温度升高和耦合强度、声子与光子频率差增加而加大. 系统 Pancharatnam 相位随时间的演化在平均光子数较小时表现比较有规律, 但随着平均光子数的增加, 它趋于混沌化.

关键词: 极化激元, Pancharatnam 相位, Mach-Zehnder 干涉仪, 相干态

PACC: 0365, 0760L, 7136

## 1. 引 言

长期以来, 人们对于量子力学波函数中相位的重要性及其客观意义缺乏深刻的认识, 直到 Aharonov-Bohm (AB) 效应和 Berry 几何相位被发现<sup>[1, 2]</sup>. 这两项重要的发现, 促使人们对量子力学几何相位问题展开深入且广泛的研究<sup>[3-8]</sup>, 并在实验系统中观测到了相关现象<sup>[9-12]</sup>, 目前人们已经可以在单光子水平观测几何相位<sup>[11]</sup>. 另外, Berry 关于几何相位的概念已经被推广, 如 Aharonov 将 Berry 相推广到非绝热演化系统<sup>[13]</sup>, Samuel 和 Pati 将 Berry 相推广到非回复系统<sup>[14, 15]</sup>, Uhlmann 将几何相推广到混态和非么正演化系统<sup>[16, 17]</sup>, 尤其重要的是 Bhandari 和 Samuel 将 Pancharatnam 定义的非绝热非回复光路中光波相位的比较推广到量子力学中<sup>[18, 19]</sup>, 比 Berry 相位更普遍. 在几何相位的应用方面, 由于几何相位只与系统状态在 Hilbert 空间中的演化路径有关, 且抗干扰, 因此, 可以被用来实现量子门和量子计算<sup>[20-22]</sup>, 另外, 也有利用 Pancharatnam-Berry 相位干涉原理进行波前形状控制的相关实验研究<sup>[23]</sup>.

另一方面, 声光相互作用也引起了相当广泛的研究<sup>[24]</sup>, 因为其在量子逻辑运算、声子压缩到光子压缩转移, 声子光子统计特性的转移等方面具有潜

在的应用前景.<sup>[25-27]</sup> 由于 Pancharatnam 相位可以通过 Mach-Zehnder 干涉仪测量, 因此, 本文研究相干光场与初始处于热平衡温度  $T$  的单模声子作用系统的 Pancharatnam 相位, 为量子光学测量、声光探测和量子通信等方面提供理论基础.

## 2. 理论模型和 Pancharatnam 相位

当光场与固体中振动晶格相互作用并耦合时, 将形成光子-声子的耦合模式, 其量子被称为极化激元 (polariton). 光场只与单模声子相互作用的极化激元系统虽然简单, 却能够被用来研究和解释许多声光作用的非经典行为<sup>[28-30]</sup>. 具体的系统 Hamiltonian 如下<sup>[28-30]</sup>:

$$H = \omega_a a^\dagger a + \omega_b b^\dagger b + \kappa (a^\dagger b^\dagger + ba), \quad (1)$$

其中  $a^\dagger (a)$  是频率为  $\omega_a$  声子产生(湮没)算符,  $b^\dagger (b)$  频率为  $\omega_b$  光子产生(湮没)算符,  $\kappa$  是声光耦合系数. 假设光场初始处于相干态, 而声子初始处于热平衡态. 则系统  $t$  时刻的态矢量为

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iHt} |Z \otimes \mathcal{S}(\vartheta)\rangle |0\rangle \rho, \quad (2)$$

其中  $\mathcal{S}(\vartheta) = \exp\{\mathcal{X}(a^\dagger \tilde{a}^\dagger - \tilde{a}a)\}$  是双模压缩算符,  $\tilde{a}^\dagger (\tilde{a})$  是作用在虚拟 Hilbert 空间的玻色型产生(湮没)算符<sup>[31, 32]</sup>, 其是热场动力学中为将非零温度下统计系综平均计算转化为等价的纯态平均而引入

\* 广东省自然科学基金项目(批准号 8151063201000051)和广东省科技计划项目(批准号 2005B10301017, 2006B11601001)资助的课题.

† 通讯联系人. E-mail: zlmqit@126.com

的<sup>[31]</sup>,  $\text{th}(\vartheta) = \exp(-\beta\omega_a/2)$ ,  $\beta = 1/k_B T$ ,  $k_B$  是 Boltzmann 常数,  $T$  是声子所处的热平衡温度,  $|Z\rangle$  是光场所处的相干态,  $|0, 0\rangle$  是双模真空算符, 一个模式对应于声子, 另一个模式则对应于虚拟 Hilbert 空间算符  $\tilde{a}^\dagger(\tilde{a})$ .

为计算系统的态矢量, 引入如下正则变换:

$$S = \exp\{r(ba - a^\dagger b^\dagger)\}, \quad (3)$$

其中  $r$  为压缩参数. 将以上变换插入(2)式, 可以将态矢量简化为

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= \text{sech}(\vartheta)\text{sech}(r)e^{-|z|^{2/2}} S e^{-iH_s t} \\ &\times e^{\mathcal{X}(b^\dagger \text{chr} - \text{ashr})} e^{a^\dagger b^\dagger \text{thr} + a^\dagger \tilde{a}^\dagger \text{tl}(\vartheta)\text{sech}(r)} \\ &\times |0, 0, 0\rangle, \end{aligned} \quad (4)$$

其中

$$\begin{aligned} H_s &= S^\dagger H S = E_a a^\dagger a + E_b b^\dagger b + E_0, \\ E_a &= \frac{\omega_a + \omega_b}{2} \left\{ \sqrt{1 - k^2} + \frac{\omega_a - \omega_b}{\omega_a + \omega_b} \right\}, \\ E_b &= \frac{\omega_a + \omega_b}{2} \left\{ \sqrt{1 - k^2} - \frac{\omega_a - \omega_b}{\omega_a + \omega_b} \right\}, \\ E_0 &= \frac{\omega_a + \omega_b}{2} \left\{ \sqrt{1 - k^2} - 1 \right\}, \\ k &= \frac{2\kappa}{\omega_a + \omega_b} = \text{th}2r. \end{aligned}$$

在上式中适时插入相干态的完备性恒等式

$\int \frac{d^2 \zeta}{\pi} |\zeta\rangle \langle \zeta| = I$ , 并利用正规乘积下的算符积分技术(IWOP)<sup>[33]</sup>, 经过繁琐但不复杂的计算可以得到系统  $t$  时刻态矢量为

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= e^{-|z|^{2/2 - iE_0 t}} \alpha \exp\{\delta a^\dagger b^\dagger + \gamma b^\dagger \\ &+ \xi a^\dagger \tilde{a}^\dagger + \eta \tilde{a}^\dagger\} |0, 0, 0\rangle, \end{aligned} \quad (5)$$

其中

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\text{sech}\vartheta}{\text{ch}^2(r) - e^{-(E_a + E_b)t} \text{sh}^2(r)}, \\ \delta &= \frac{(e^{-(E_a + E_b)t} - 1)\text{thr}}{1 - e^{-(E_a + E_b)t} \text{th}^2(r)}, \\ \gamma &= \frac{Z e^{-iE_b t}}{\text{ch}^2(r) - e^{-(E_a + E_b)t} \text{sh}^2(r)}, \\ \xi &= \frac{e^{-iE_a t} \text{th}\vartheta}{\text{ch}^2(r) - e^{-(E_a + E_b)t} \text{sh}^2(r)}, \\ \eta &= \frac{Z \text{th}(r) \text{th}(\vartheta) (e^{-(E_a + E_b)t} - 1)}{1 - e^{-(E_a + E_b)t} \text{th}^2(r)}. \end{aligned}$$

Mach-Zehnder 干涉仪中的纯态和混态 Pancharatnam 相位测量原理是在干涉仪的一个臂中引入  $\mathcal{U}(1)$  相位  $\chi$ , 并将与光场作用子系统作为附加

内部自由度来处理, 则干涉仪输出的态叠加干涉条纹强度<sup>[34, 35]</sup>

$$I = 1 + V \cos(\chi - \phi_t), \quad (6)$$

其中  $\phi_t$  为 Pancharatnam 相位. 由前面的结果, 可以得到系统的 Pancharatnam 相位为

$$\phi_t = \arg \langle \psi(0) | \psi(t) \rangle,$$

其中  $\arg$  表示求复数相位,

$$\begin{aligned} \langle \psi(0) | \psi(t) \rangle &= \langle 0, 0, Z | S^\dagger(\vartheta) | \psi(t) \rangle \\ &= e^{-|z|^2 - iE_0 t} \alpha \text{sech}(\vartheta) \\ &\times \exp\left[\frac{\gamma + (\beta\eta - \gamma\xi)\text{th}(\vartheta)}{1 - \xi\text{th}(\vartheta)} Z^*\right] \\ &[1 - \xi\text{th}(\vartheta)]. \end{aligned} \quad (7)$$

### 3. 结果与讨论

下面, 我们将对上节的结果进行数值计算和讨论. 为方便讨论, 本文采用归一化的耦合参数  $k = 2\kappa/(\omega_a + \omega_b)$  以及归一化的时间  $\omega_b t$ .

首先, 讨论弱耦合( $k = 0.02$ )且声子频率与光子频率相差较大( $\omega_a = 0.01\omega_b$ )时, Pancharatnam 相位随时间的变化规律. 从图 1(a)和(b)可以看出, 系统的 Pancharatnam 相位随时间作振荡, 且振荡频率和波形随时间不断变化. 对比图 1 中的虚线和实线, 发现当温度升高时, Pancharatnam 相位的振荡频率和波形随时间的变化比低温时的变化要大. 因为, 平均声子数随温度升高而增加, 且声子数的波动方差也随之增加, 对系统的 Pancharatnam 相位造成影响. 同时还发现当光场的平均光子数为  $|z|^2 = 1$  时, Pancharatnam 相位随时间变化与  $|z|^2 = 25$  时相比更加有规律. 因为, 光场光子数波动方差与平均光子数成正比.

其次, 讨论强耦合( $k = 0.2$ )且声子频率与光子频率相差较大( $\omega_a = 0.01\omega_b$ )时, Pancharatnam 相位随时间的变化规律. 对比图 1 和图 2 中(a)(b)的对应虚实线, 可以发现耦合强度影响 Pancharatnam 相位的振荡频率和波形, 并且在高温情况时的影响比低温大. 这是因为耦合强度增加, 意味声光相互作用也增大, 相位随时间的演化自然产生很大的变化. 同时, 由图 2(b)可以看出, 当光场的平均光子数为  $|z|^2 = 1$  时, 耦合强度增加将使 Pancharatnam 相位的振荡曲线随时间增加逐渐向大于零的正方向漂移.

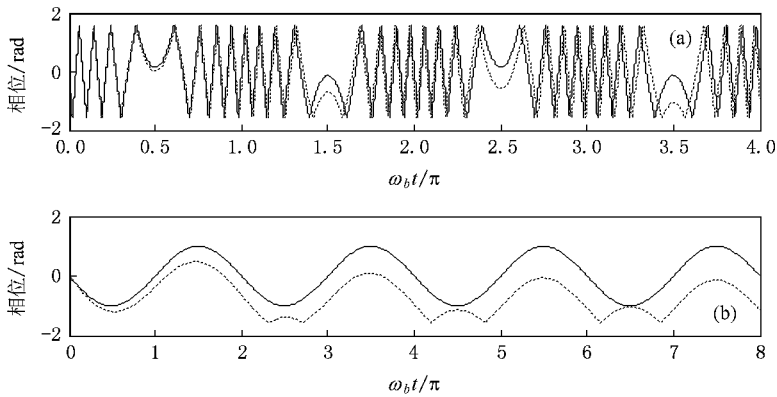


图1 Pancharatnam 相位随归一化时间的演化曲线(其中实线  $T = 10\text{ K}$ , 虚线  $T = 1000\text{ K}$ )  
 (a)  $Z = 5, k = 0.02, \omega_a = 0.01\omega_b$  (b)  $Z = 1, k = 0.02, \omega_a = 0.01\omega_b$

再次,讨论强耦合( $k = 0.2$ )且声子频率与光子频率相差相对较小( $\omega_a = 0.02\omega_b$ )时, Pancharatnam 相位随时间的变化规律. 对比图 2 和图 3 中(a)(b)的对应虚实线, 可以发现声子频率与光子频率相差

影响 Pancharatnam 相位的振荡频率和波形, 并且在高温情况时的影响比低温大. 图 3 中虚实线差异比图 2 中相对应的曲线差异要大, 这是因为频率差变小, 光子频率与晶格振动频率更加接近共振.

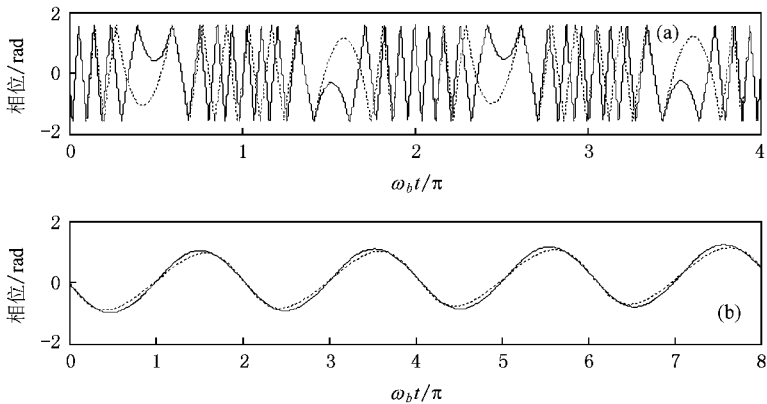


图2 Pancharatnam 相位随归一化时间的演化曲线(其中实线  $T = 10\text{ K}$ , 虚线  $T = 1000\text{ K}$ )  
 (a)  $Z = 5, k = 0.2, \omega_a = 0.01\omega_b$  (b)  $Z = 1, k = 0.2, \omega_a = 0.01\omega_b$

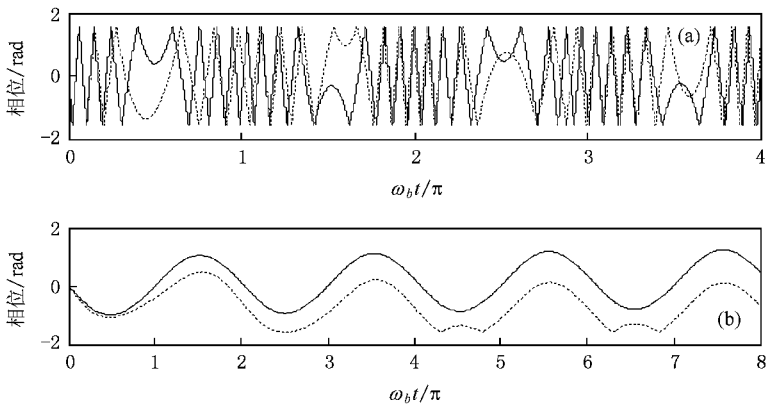


图3 Pancharatnam 相位随归一化时间的演化曲线(其中实线  $T = 10\text{ K}$ , 虚线  $T = 1000\text{ K}$ )  
 (a)  $Z = 5, k = 0.2, \omega_a = 0.02\omega_b$  (b)  $Z = 1, k = 0.2, \omega_a = 0.02\omega_b$

最后,我们讨论平均光子数较大 ( $|z|^2 = 225$ ) 时,系统 Pancharatnam 相位随时间的变化规律.由图 4 可以看出无论是低温还是高温,随着平均光子数的增大,系统 Pancharatnam 相位的变化将变得非常

无规律,相位的演化将更加混沌化.因为,当平均光子数增大后,光场光子数波动方差也增大,不同光子数态演化所产生的相位叠加后,其变化规律将变得非常复杂.另外,计算还发现,光场的初始相位对系

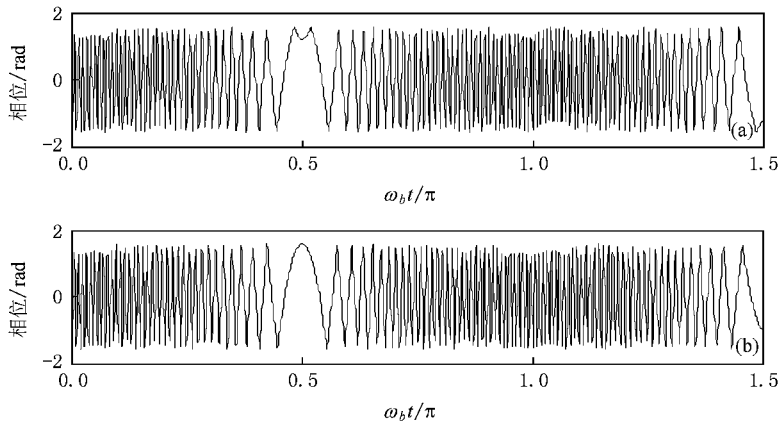


图 4 Pancharatnam 相位随归一化时间的演化曲线 ( $Z = 15, k = 0.02, \omega_a = 0.02\omega_b$ ) (a)  $T = 10$  K (b)  $T = 1000$  K

统的 Pancharatnam 相位演化没有影响.

## 4. 结 论

综上所述,本文研究了简单极化激元模型中的 Pancharatnam 相位演化特征,给出了 Pancharatnam 相位的解析表达式,并计算和讨论了温度等系统参数变化对 Pancharatnam 相位的影响.

研究结果显示:1)当温度升高时,Pancharatnam 相位的振荡频率和波形随时间的变化比低温时的变化要大.2)耦合强度、声子与光子频率差也将影响

Pancharatnam 相位随时间的振荡频率和波形.3)当平均光子数较小时,系统 Pancharatnam 相位随时间的演化比较有规律.随着平均光子数的增加,系统 Pancharatnam 相位随时间的演化将趋于混沌化.以上结论适用于上述简单模型,对于一般模型则不一定适用.

上述讨论显示,平均光子相当小时,Pancharatnam 相位演化比较有规律.随着单光子探测设备的商业化和逐渐普及,微弱光信号下的 Pancharatnam 相位探测已经成为可能.有理由相信,本文的研究结果对量子光学测量、量子信息、声光探测和量子通信等领域的研究有一定的指导意义.

- [ 1 ] Aharonov Y, Bohm D 1959 *Phys. Rev.* **115** 485
- [ 2 ] Berry M V 1984 *Roy. Soc. (London) A* **392** 45
- [ 3 ] Shapere A, Wilczek F 1989 *Geometric Phase in Physics* (Singapore: World Scientific)
- [ 4 ] Fonseca-Romero K M, Aguiar-Pinto A C, Thomaz M T 2002 *Physica A* **307** 142
- [ 5 ] Li C F, Guo G C 1996 *Acta Phys. Sin.* **45** 897 (in Chinese) [李春芳、郭光灿 1996 物理学报 **45** 897]
- [ 6 ] Li B Z, Zhang D G, Wu J H, Yan F L 1997 *Acta Phys. Sin.* **46** 227 (in Chinese) [李伯臧、张德刚、吴建华、阎凤利 1997 物理学报 **46** 227]
- [ 7 ] Li H Z 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 1643 (in Chinese) [李华钟 2004 物理学报 **53** 1643]
- [ 8 ] Ben-Aryeh Y 2004 *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.* **6** R1
- [ 9 ] Suter D, Mueller K T, Pines A 1988 *Phys. Rev. Lett.* **60** 1218
- [ 10 ] Bhandari R, Samuel J 1988 *Phys. Rev. Lett.* **60** 1211
- [ 11 ] Kwiat P G, Chiao R 1991 *Phys. Rev. Lett.* **66** 588
- [ 12 ] Webb C L, Godun R M, Summy G. S, Oberthaler M K, Featonby P D, Foot C J, Burnett K 1999 *Phys. Rev. A* **60** R1783
- [ 13 ] Aharonov Y, Anandan J 1987 *Phys. Rev. Lett.* **58** 1593
- [ 14 ] Samuel J, Bhandari R 1988 *Phys. Rev. Lett.* **60** 2339
- [ 15 ] Pati A K 1995 *Phys. Rev. A* **52** 2576
- [ 16 ] Uhlmann A 1986 *Rep. Math. Phys.* **24** 229
- [ 17 ] Uhlmann A 1991 *Lett. Math. Phys.* **21** 229
- [ 18 ] Pancharatnam S 1956 *Proc. Indian Acad. Sci. A* **44** 247
- [ 19 ] Bhandari R, Samuel J 1988 *Phys. Rev. Lett.* **60** 1211

- [ 20 ] Jones J A , Vedral V , Ekert A , Castagnoli G 1999 *Nature* **403** 689
- [ 21 ] Falci G , Fazio R , Palma G M , Siewert J , Vedral V 2000 *Nature* **407** 355
- [ 22 ] Wang Z S , Wu C F , Feng X L , Kwek L C , Lai C H , Oh C H , Vedral V 2007 *Phys. Rev. A* **76** 044303
- [ 23 ] Marrucci L , Manzo C , Paparo D 2006 *Appl. Phys. Lett.* **88** 221102
- [ 24 ] Leibfried D , Blatt R , Monroe C , Wineland D 2003 *Rev. Mod. Phys.* **75** 281
- [ 25 ] Zou X B , Pahlke K , Mathis W 2002 *Phys. Rev. A* **65** 064303
- [ 26 ] Semiao F L , Vidiella-Barranco A , Roversi J A 2002 *Phys. Lett. A* **299** 423
- [ 27 ] Orszag M 2002 *Laser Phys.* **12** 1054
- [ 28 ] Ghoshal S , Chatterjee A 1995 *Phys. Rev. B* **52** 982
- [ 29 ] Ghoshal S , Chatterjee A 1999 *Phys. Rev. B* **59** 3916
- [ 30 ] Wang S L , Ma S G , Wang K L 2003 *Chin. Phys. Lett.* **20** 117
- [ 31 ] Takahashi Y , Umezawa 1975 *Collective Phenomena* **2** 55
- [ 32 ] Fan H Y 2001 *Entangled State Representations in Quantum Mechanics and Their Applications* ( Shanghai : Shanghai Jiaotong University Press ) chap 1 p26 ( in Chinese ) [ 范洪义 2001 量子力学纠缠态表象及应用( 上海交通大学出版社 ) 第 1 章第 26 页 ]
- [ 33 ] Fan H Y 1997 *Representation and Transformation Theory in Quantum Mechanics* ( Shanghai : Shanghai Scientific & Tech. Publishers ) chap 3 p43 ( in Chinese ) [ 范洪义 1997 量子力学表象与变换论( 上海科学技术出版社 ) 第 3 章第 43 页 ]
- [ 34 ] Wagh A G , Rakhecha V C 1995 *Phys. Lett. A* **197** 107
- [ 35 ] Sjoqvist E , Pati A K , Ekert A , Anandan J S , Ericsson M , Oi D K L , Vedral V 2000 *Phys. Rev. Lett.* **85** 2845

## Pancharatnam phase in interaction model of light and phonon<sup>\*</sup>

Zheng Li-Ming<sup>1)†</sup> Wang Fa-Qiang<sup>2)</sup> Liu Song-Hao<sup>2)</sup>

1) *Department of Electronic Engineering , College of Information Science and Technology , Jinan University , Guangzhou 510632 , China* )

2) *School of Information and Photoelectronic Science and Engineering , South China Normal University , Guangzhou 510006 , China* )

( Received 23 October 2008 ; revised manuscript received 20 November 2008 )

### Abstract

The Pancharatnam phase in simple polariton model is investigated , and the influences of temperature , coupling strength , frequency difference of photon and phonon and average photon number on the evolution dynamics of Pancharatnam phase are also discussed . The results show that the Pancharatnam phase oscillates with time , the oscillating frequency and wave-form vary with time , and the variation increases with the enhancement of temperature , coupling strength and frequency difference of photon and phonon . The system Pancharatnam phase evolves regularly when the average photon number of coherent light is small , while it becomes more chaotic as the average photon number increases .

**Keywords :** polariton , Pancharatnam phase , Mach-Zehnder interferometer , coherent state

**PACC :** 0365 , 0760L , 7136

<sup>\*</sup> Project supported by the Natural Science Foundation of Guangdong Province , China ( Grant No. 8151063201000051 ) and the Natural Science and Technology Programme of Guangdong Province , China ( Grant Nos. 2005B10301017 , 2006B11601001 ) .

<sup>†</sup> E-mail : zlmqit@126.com