第 58 卷 第 5 期 2009 年 5 月
1000-3290/2009/58(05)/2902-05

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.58, No.5, May, 2009

含时空关联噪声生长方程的标度奇异性分析*

张丽萍†
(中国矿业大学物理系,徐州 221008)
(2008 年 9 月 4 日收到;2008 年 10 月 22 日收到修改稿)

基于动力学重整化群理论研究表面界面生长动力学标度奇异性问题，得到含时空关联噪声的表面生长方程标度奇异指数的一般结果,并将此方法应用于几种典型的局域生长方程——Kardar-Parisi-Zhang(KPZ)方程、线性生长方程、Lai-Das Sarma-Villain(LDV)方程.结果表明,在长波长极限下局域生长方程的动力学标度奇异性与最相关项、基底维数以及噪声有关,并且若出现标度奇异性,只会是超粗化(super rough)奇异标度行为,而不是内禀(intrinsically)奇异标度行为.

关键词:标度奇异性,动力学重整化群理论,时空关联噪声
PACC:0540,0250

1. 引 言

近年来,表面界面在远离平衡状态下的粗化生长问题受到越来越多地关注,研究其生长机理和规律对于研究许多重要的物理现象(如晶体生长、肿瘤生长、流体在多孔介质中的浸入等)有着十分重要的实际意义[1-6].在动力学标度理论中,表面界面的标度行为通常可以用总的表面宽度(有时也称为粗糙度)$W(L,t)$的标度性质来表示的.$W(L,t)$的定义为

$$W(L,t)=\frac{1}{\sqrt{L}}\langle\sum_x[h(\boldsymbol{x},t)-\bar{h}_{\mathrm{L}}(t)]^2\rangle^{1/2},$$

式中 L 表示生长系统的横向尺度,$h(\boldsymbol{x},t)$ 为 t 时刻 $\boldsymbol{x}$ 处表面的生长高度,$\bar{h}_{\mathrm{L}}(t)=\frac{1}{\sqrt{L}}\sum_x h(\boldsymbol{x},t)$ 表示在 t 时刻表面的平均生长高度,$\langle\cdots\rangle$ 表示对噪声的统计平均.Family-Vicsek[6] 提出当生长表面具有标准的自仿射结构时,$W(L,t)$ 满足动力学标度规律 $W(L,t)=L^{\alpha}f(t/L^{\alpha/\beta})$,这里 α 是粗化指数,β 是生长指数,$z=\alpha/\beta$ 是动力学指数.标度函数 $f(u)$ 具有渐进行为 $f(u)\sim u^{\alpha/z}$(当 $u\to0$ 时)和 $f(u)\sim\mathrm{const}$(当 $u\to\infty$ 时),所以系统总的表面宽度 $W(L,t)$ 具有渐进行为

$$W(L,t)\sim\begin{cases}t^{\beta}, & t\ll L^z,\\ L^{\alpha}, & t\gg L^z,\end{cases}\tag{1}$$

L^z 称为系统的特征时间.

近来研究发现,非自仿射标度性或奇异标度性也广泛存在于表面界面的粗化生长过程中[7-14].当表面界面粗化生长不满足 Family-Vicsek 自仿射标度,呈现所谓奇异标度性质,即整个表面的标度性质和局域标度的性质不相同.当出现奇异标度时,局域表面宽度 $w(l,t)$要由下列标度关系替代:

$$w(l,t)\sim\sqrt{g(L,t)}=t^{\beta}f_A(l/t^{1/z}),\tag{2}$$

其中 $g(l,t)=\langle\overline{[h(\boldsymbol{x}+l,t)-h(\boldsymbol{x},t)]^2}\rangle$为高度差涨落关联函数.奇异标度函数

$$f_A(u)\sim\begin{cases}u^{\alpha_{\mathrm{loc}}}, & u\ll1,\\ \mathrm{const}, & u\gg1.\end{cases}\tag{3}$$

由(2)和(3)式得

$$g(l,t)\sim\begin{cases}t^{2\beta}, & t\ll l^z,\\ t^{2\kappa}l^{2\alpha_{\mathrm{loc}}}, & t\gg l^z,\end{cases}\tag{4}$$

其中 $\kappa=\beta-\alpha_{\mathrm{loc}}/z$,$\alpha_{\mathrm{loc}}$为局域粗糙度指数.当 $\alpha\neq\alpha_{\mathrm{loc}}$则出现奇异标度,而当 $\alpha=\alpha_{\mathrm{loc}}$时(4)式就恢复到自仿射的 Family-Vicsek 正常标度关系[11-14].对于奇异标度行为,$\alpha_{\mathrm{loc}}=1$ 时为超粗化奇异标度行为,$\alpha_{\mathrm{loc}}<1$ 时为内禀奇异标度行为[12].

López 等人[15] 认为,表面界面的奇异动力学标度行为是由局域倾斜度相对应的生长表面的表面宽

* 国家自然科学基金(批准号:10674177),教育部留学回国人员科研启动基金(批准号:200318)和中国矿业大学青年基金(批准号:2006A043)资助的课题.
† E-mail:zhlip_77@163.com

度决定. 局域倾斜度 $Y=\nabla h$，那么 Y 的整体表面宽度值可以记作

$$W_Y(t)\sim\langle\overline{Y^2}\rangle^{1/2}. \tag{5}$$

局域倾斜度生长表面应满足正常标度性质

$$W_Y(L,t)\sim\begin{cases}t^{\kappa}, & t\ll l^{\hat{z}},\\ l^{\hat{\alpha}}, & t\gg l^{\hat{z}},\end{cases} \tag{6}$$

$\hat{\alpha}$，$\hat{z}$ 和 κ 分别表示相应的粗糙度指数、动力学指数和生长指数. 当 $\hat{\alpha}>0$，$\kappa>0$ 对应于表面生长的奇异标度行为，而当 $\hat{\alpha}<0$，$\kappa<0$ 对应于表面生长的正常标度行为，符合 Family-Vicsek 标度律.

2. 含时空关联噪声的生长方程的标度奇异性理论

表面界面粗化生长过程可以用相应的 Langevin 类型的连续性动力学方程来描述. 对于 Langevin 类型生长方程，是符合 Family-Vicsek 标度正常标度，还是呈现奇异标度行为，是人们所关注的问题. Hentschel 和 Family[16] 提出了一种对 Langevin 类型方程的直接标度分析方法. 唐刚等曾将该方法推广应用到几种典型的生长方程的标度讨论中，得到了令人满意的结果[17—19]. 我们也利用此方法分析了含核生长方程(growth kernel equation)的标度行为，结果与动力学重整化群理论所得结果符合[20,21]. López[15] 将直接标度方法推广到标度奇异性的分析，其结果与数值模拟结果一致. 最近 López 等人[22] 提出了动力学生长方程标度奇异性分析的动力学重整化群理论，并应用该理论分别对守恒和非守恒情况下生长动力学方程的标度奇异性进行分析，对导致方程呈现奇异动力学标度行为的微观物理机理进行了探讨，得到了十分合理的结果，但由于其未能考虑到噪声对于标度行为影响，因而讨论问题具有一定局限性. 研究发现在表面生长过程中，其噪声除随机白噪声外，在某些情况下噪声会呈现出趋向性. 通过各种不同实验得到的标度指数进行分析[23—26]，发现噪声会影响标度指数，从而形成一族普适类. 虽然关联噪声的起源还没有完全了解，但是，它已经成功地应用于相关实验的解释，如金刚石薄膜生长[27] 等. 因此，我们在讨论标度奇异性时，考虑了时空关联噪声对于标度指数的影响. 本文主要利用动力学重整化群理论，给出含时空关联噪声的动力学生长方程的奇异标度指数，讨论了标度奇异性条件. 在此基础上，将此方法成功用于具体生长方程，所得结果既符合直接标度分析方法得到的结果[15]，又与蒙特卡罗方法模拟含时空关联噪声的标度奇异性讨论符合[28].

对于表面界面生长过程，相应动力学方程为[22]

$$\partial h/\partial t=G(\nabla h)+\eta(x,t), \tag{7}$$

式中函数 $G(\nabla h)$ 定义一个包括相关对称性和守恒律的实际生长模型，这里 $\eta(x,t)$ 是时空关联噪声. 则 $\eta(x,t)$ 满足

$$\langle\eta(x,t)\cdot\eta(x',t')\rangle=2D\mid x-x'\mid^{2\rho-d}\mid t-t'\mid^{2\theta-1}, \tag{8}$$

式中的 D 表示噪声的幅度值，d 是基底维数，ρ，θ 是噪声衰减因子. 对方程(7) 两边作用算符 ∇，则有关局域倾斜度的演化动力学方程为[22]

$$\partial Y/\partial t=\nabla G(Y)+\nabla\eta(x,t), \tag{9}$$

式中 $Y(x,t)$ 可以看作一个新的生长表面，且生长过程守恒. 对方程(9) 进行分析得到平均局域倾斜度的标度性质，就能判断出方程(7) 所表示的连续性动力学方程是否具有奇异标度性了.

将 $G(Y)$ 按幂函数进行展开，展开式中可能有几项，但在长波长极限下，其标度行为由最相关项来决定，对于最相关项的表达式可以统一写作[22]

$$G(Y)\sim b^{-n}Y^{m}\quad(n\geqslant 0,m\geqslant 1). \tag{10}$$

对方程(9) 进行自仿射标度变换 $x\to xb$，$t\to tb^{\hat{z}}$，$Y\to Yb^{\hat{\alpha}}$. 可得速度项、最相关项和守恒噪声项的标度变换关系 $\frac{\partial Y}{\partial t}\sim b^{\hat{\alpha}-\hat{z}}\frac{\partial Y}{\partial t}$，$\nabla G(Y)\sim b^{\hat{\alpha}m-(n+1)}\nabla G(Y)$，$\nabla\eta(x,t)\sim b^{\rho+\frac{-d-\hat{z}}{2}-1+\hat{z}\theta}\nabla\eta(x,t)$. 利用动力学重整化群理论，在出现标度行为区域内，重新标度后上面三项应同等关联，在此基础上解方程组得

$$\hat{\alpha}=\frac{n+2\rho+2\theta(n+1)-d-1}{2m+(2\theta-1)(m-1)},$$
$$\kappa=\frac{2\theta(n+1)+n+2\rho-d-1}{2(n+m)-(2\rho-d)(m-1)}. \tag{11}$$

对特定动力学生长方程，如果能够确定出其相应的 n 和 m 值，就可通过(11)式确定其动力学标度奇异性. 当 $\hat{\alpha}>0$，$\kappa>0$，即 $d<2\theta(n+1)+n+2\rho-1$ 对应于表面生长的奇异标度行为，当 $\hat{\alpha}<0$，$\kappa<0$，即 $d>2\theta(n+1)+n+2\rho-1$ 对应于表面生长的正常标度行为，符合 Family-Vicsek 标度律. 可以断定含时空关联噪声的生长方程在长波长极限下的标度性质由噪声衰减因子 θ，ρ，最相关项，以及基底维数 d 共同决定. 下面我们利用(11)式讨论具体生长方程的标度奇异性.

3. 含时空关联噪声的 Kardar-Parisi-Zhang(KPZ)方程标度奇异性分析

Kardar,Parisi 和 Zhang[29] 仔细分析表面界面动力学生长过程后,考虑到侧向生长(即局域的垂直生长)的贡献,在动力学方程中引入低阶的非线性项,则表面生长方程就可以用以下方程来描述,这就是著名的 KPZ 方程

$$\partial h/\partial t = \nu\nabla^2 h + \frac{\lambda}{2}(\nabla h)^2 + \eta(\boldsymbol{x},t), \qquad (12)$$

式中,$\eta(\boldsymbol{x},t)$若为时空关联噪声,满足(8)式.

对于 KPZ 方程 $G(\nabla h) = \nu\nabla^2 h + \frac{\lambda}{2}(\nabla h)^2$,分析表明,在标度区域,$G(\nabla h)$ 中最相关项为非线性项 $\frac{\lambda}{2}(\nabla h)^2$[16],对该项进行空间尺寸的标度变换 $\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}b$ 则$\frac{\lambda}{2}(\nabla h)^2 \to \frac{\lambda}{2}b^0(\nabla h)^2$ 与(10) 式对比得 $n = 0$,$m = 2$ 代入(11) 式可得

$$\hat{\alpha} = \frac{2\rho + 2\theta - d - 1}{3 + 2\theta},\qquad \kappa = \frac{2\theta + 2\rho - d - 1}{4 - 2\rho + d}. \qquad (13)$$

我们知道 $\hat{\alpha} > 0$,$\kappa > 0$ 对应于表面生长的奇异标度行为.对于含时空关联噪声的 KPZ 方程,当 $d < 2\rho + 2\theta - 1$ 时,方程表现为奇异标度行为,反之,则表面生长符合正常标度行为.对于 KPZ 方程利用直接标度分析方法[19] 或动力学重整化群理论[30] 得到 $\alpha = \frac{2\rho + 4\theta - d + 2}{3 + 2\theta}$,$z = \frac{4 - 2\rho + d}{3 + 2\theta}$,根据 $\alpha_{\rm loc} = \beta z - z\kappa = \alpha - z\kappa$,得 $\alpha_{\rm loc} = 1$.因此,当 $d < 2\rho + 2\theta - 1$ 时,KPZ 方程表现为超粗化奇异标度行为.

对含白噪声($\theta = 0$,$\rho = 0$)的 KPZ 方程

$$\hat{\alpha} = \frac{-d - 1}{3},\kappa = \frac{-d - 1}{4 + d}, \qquad (14)$$

只有当 $d < -1$ 时,才会表现为奇异标度行为.因此,在长波长极限条件下含白噪声的 KPZ 方程符合 Family-Vicsek 正常标度关系.这一结果和夏辉等[31] 使用直接标度分析方法得到的结果符合.

4. 含时空关联噪声的线性生长方程标度奇异性分析

线性生长方程为

$$\partial h/\partial t = (-1)^{\varphi+1}\nu\nabla^{2\varphi}h + \eta(\boldsymbol{x},t), \qquad (15)$$

这里 φ 是大于或等于 1 的整数.当 $\varphi = 1$,上式变为 Edwards-Wilkinson (EW)方程[32].当 $\varphi = 2$,上式变为著名的 Mullins-Wolf-Villain 方程[33].Mullins-Wolf-Villain 方程已经引起多方关注,可以很好地描述许多实验.例如,Si 在 Si(111) 基底的外延生长[34],在室温下 Pt 在玻璃上溅射过程[35].虽然还没有发现 $\varphi \geqslant 3$ 与具体实验的关系,但它能帮助人们了解局域表面高度涨落对于表面超粗化的影响.因此线性生长方程的研究是非常有价值的[36].

对于线性生长方程 $G(\nabla h) = (-1)^{\varphi+1}\nu\nabla^{2\varphi}h$,对该项进行空间尺寸的标度变换 $\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}b$,则$(-1)^{\varphi+1}\nu\nabla^{2\varphi}h \to (-1)^{\varphi+1}\nu\nabla^{2\varphi-1}(\nabla h) \to (-1)^{\varphi+1}b^{1-2\varphi}\nu\nabla^{2\varphi-1}(\nabla h)$ 与(10) 式对比得 $n = 2\varphi - 1$,$m = 1$ 代入(11) 式可得

$$\hat{\alpha} = \frac{2\varphi + 2\rho + 4\theta\varphi - d - 2}{2},\qquad \kappa = \frac{4\theta\varphi + 2\varphi + 2\rho - d - 2}{4\varphi}. \qquad (16)$$

对于含时空关联噪声的线性生长方程,当 $d < 2\rho + 2\varphi + 4\varphi\theta - 2$ 时,方程表现为奇异标度行为.利用标度分析方法得到对于线性生长方程 $\alpha = \frac{2\varphi + 2\rho + 4\theta\varphi - d}{2}$,$z = \frac{2\varphi(2\varphi + 2\rho + 4\theta\varphi - d - 2)}{4\theta\varphi + 2\varphi + 2\rho - d - 2}$,由 $\alpha_{\rm loc} = \alpha - z\kappa$,得 $\alpha_{\rm loc} = 1$,因此,我们得到当 $d < 2\rho + 2\varphi + 4\varphi\theta - 2$ 时,方程表现为超粗化奇异标度行为,此结论与文献[28,36]结果符合.

对于含白噪声($\theta = 0$,$\rho = 0$)的线性生长方程

$$\hat{\alpha} = \frac{2\varphi - d - 2}{2},\qquad \kappa = \frac{2\varphi - d - 2}{4\varphi}, \qquad (17)$$

当 $d < 2\varphi - 2$ 时,$\hat{\alpha} > 0$,$\kappa > 0$ 含白噪声的线性生长方程会出现超粗化奇异标度行为.特殊地,当 $\varphi = 1$ 时,线性生长方程变为 EW 方程,出现奇异标度行为的条件为 $d < 1$,因此 EW 方程所描述的是正常标度行为.当 $\varphi = 2$ 时,线性生长方程变为 Mullins-Wolf-Villain 方程,出现奇异标度行为的条件变为 $d < 2$.当 $d = 1$ 时,对于 Mullins-Wolf-Villain 方程利用(17) 式得 $\hat{\alpha} = 1/2$,$\kappa = 1/8$ 与 López 分析 1 + 1 维生长动力学方程所得结果一致[15].

5. 含时空关联噪声的 Lai-Das Sarma-Villain(LDV)方程标度奇异性分析

LDV 方程是 Lai 等人[37] 为研究外延生长过程中,生长表面高度的涨落行为而提出来的,方程通常

表示为

$$\partial h/\partial t = -\nabla^2[\kappa\nabla^2 h + \lambda/2(\nabla h)^2] + \eta(x,t), \tag{18}$$

这里 κ 是扩散系数，$\eta(x,t)$是噪声，用来表示生长过程中的随机性.研究表明，LDV 方程可以用来描述外延生长过程中几种离散生长模型的涨落行为.噪声项也是时空关联噪声符合(8)式.LDV 方程的局域倾斜度表面的演化方程为

$$G(\nabla h) = -\nabla^2[\kappa\nabla^2 h + \lambda/2(\nabla h)^2]. \tag{19}$$

对于 LDV 方程，分析表明，在标度区域中最相关项为非线性项 $-\lambda/2\,\nabla^2(\nabla h)^2$，这是由于在空间尺度足够大的情况下，非线性项的作用将要超过扩散项成为动力学演化的主导项[16].对非线性项进行空间尺寸标度变换 $x\to xb$，有 $-\lambda/2\,\nabla^2(\nabla h)^2\to -\lambda/2b^{-2}\nabla^2(\nabla h)^2$ 将上式与(10)式对比发现，$n=2$，$m=2$ 代入(11)式可得

$$\hat{\alpha} = \frac{1+2\rho+6\theta-d}{2\theta+3}, \quad \kappa = \frac{6\theta+1+2\rho-d}{8-2\rho+d}. \tag{20}$$

当 $d<2\rho+2\theta+1$ 时，含时空关联噪声的 LDV 方程表现为奇异标度行为，利用直接标度分析方法[17]或动力学重整化群理论[37]对于 LDV 方程进行分析可得 $\alpha=\dfrac{2\rho+8\theta-d+4}{3+2\theta}$，$z=\dfrac{8-2\rho+d}{3+2\theta}$，代入 $\alpha_{\mathrm{loc}}=\alpha-z\kappa$，得 $\alpha_{\mathrm{loc}}=1$.因此，当 $d<2\rho+2\theta+1$ 时，LDV 方程表现为超粗化奇异标度行为.

对于含白噪声的 LDV 方程 $\theta=0$，$\rho=0$，则

$$\hat{\alpha} = \frac{1-d}{3}, \quad \kappa = \frac{(1-d)}{(d+8)}. \tag{21}$$

此结果和使用直接标度分析方法得到的结果一致[31].在 $d<1$ 的情况下，$\hat{\alpha}>0$，$\kappa>0$，含白噪声的 LDV 才会出现奇异标度性质.故在长波长极限下含白噪声的 LDV 方程只会呈现 Family-Vicsek 正常标度性质，描述的应当是具有自仿射分形标度行为的分子束外延生长过程.

6. 结　论

本文利用动力学重整化群理论，分析了含时空关联噪声的局域生长方程的动力学标度奇异性质，得到了含时空关联噪声的表面生长的奇异标度指数 $\hat{\alpha}$ 和 κ 的一般表达式.结果表明，生长方程的动力学标度性质与基底的维数 d，最相关项，以及噪声有关.在此基础上，我们将此结果具体应用于几种典型局域生长方程——KPZ 方程、线性生长方程、LDV 方程，结果与使用直接标度分析方法得到的结果符合，也与数值模拟结果一致.同时我们发现对于含时空关联噪声的 KPZ 方程，线性生长方程，LDV 方程，在长波长极限条件下，如果出现奇异标度行为时，只会是超粗化奇异标度行为，而不会出现内禀奇异粗化行为.需要说明的是，若要讨论含守恒时空关联噪声(噪声符合$\langle\eta_c(x,t)\cdot\eta_c(x',t')\rangle=-2D_c\nabla^2|x-x'|^{2\rho-d}|t-t'|^{2\theta-1}$)的生长方程的奇异标度行为，只需将(11)式进行 $d\to d+2$ 变换，具体过程与前述类似，这里就不再赘述.

感谢中国矿业大学物理系唐刚教授在本文修改过程中给予的建议与帮助.

[1] Meakin P 1998 *Fractal, Scaling and Growth far from Equilibrium* (Cambridge: Cambridge University Press)

[2] Barabasi A L, Stanley 1995 *Fractal Concepts in Surface Growth* (Cambridge: Cambridge University Press)

[3] Halpin H T, Zhang Y C 1995 *Phys. Rep.* **254** 215

[4] Krug J 1997 *Adv. Phys.* **46** 139

[5] Family F, Vicsek T 1991 *Dynamics of Fractal Surfaces* (Singapore: World Scientific Press)

[6] Family F, Vicsek T 1985 *J. Phys.* A **18** L75

[7] Das Sarma S, Lanczycki C J, Kotlyar R *et al* 1996 *Phys. Rev.* E **53** 359

[8] Brú A, Pastor J M, Fernaud I *et al* 1998 *Phys. Rev. Lett.* **81** 4008

[9] Santamaria J, Gomez M E, Vicent J L *et al* 2002 *Phys. Rev. Lett.* **89** 190601

[10] Huo S, Schwarzacher W 2001 *Phys. Rev. Lett.* **86** 256

[11] López J M, Rodríguez M A 1996 *Phys. Rev.* E **54** R2189

[12] López J M, Rodríguez M A, Cuerno R 1997 *Phys. Rev.* E **56** 3993

[13] López J M, Rodríguez M A, Cuerno R 1997 *Physica* A **246** 329

[14] Ramasco J J, López J M, Rodríguez M A 2000 *Phys. Rev. Lett.* **84** 2199

[15] López J M 1999 *Phys. Rev. Lett.* **83** 4594

[16] Hentschel H G E, Family F 1991 *Phys. Rev. Lett.* **66** 1982

[17] Tang G, Ma B K 2001 *International Journal of Modern Physics* B **15** 2275

[18] Tang G, Ma B K 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 851 (in Chinese) [唐刚、马本堃 2001 物理学报 **50** 851]

[19] Tang G, Ma B K 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 994(in Chinese)[唐刚、马本堃 2002 物理学报 **51** 994]

[20] Tang G, Zhang L P, Wu Y X *et al*. 2003 *Chin. Phys. Lett.* **20** 2008

[21] Zhang L P, Tang G, Xia H *et al* 2004 *Physica* A **388** 431

[22] López J M, Castro M, Gallego R 2005 *Phys. Rev. Lett.* **94** 166103

[23] Koscielny-Bunde E, Bund A, Havlin S *et al* 1998 *Phys. Rev. Lett.* **81** 729

[24] Ausloos M, Ivanova K 2001 *Eur. Phys. J.* B **20** 537

[25] Bunde A, Havlin S, Kantelhardt J W *et al* 2000 *Phys. Rev. Lett.* **85** 3736

[26] Buldyrev S V, Goldberger A L, Havlin S *et al* 1995 *Phys. Rev.* E **51** 5084

[27] Cattani M, Salvadori M C 2000 *Thin Solid Films* **376** 264

[28] Hamouda A B, Pimpinelli A, Phaneuf R J 2008 *Surface Science* (accepted)

[29] Kardar M, Parisi G, Zhang Y C 1986 *Phys. Rev. Lett.* **56** 889

[30] Medina E, Hwa T, Kardar M, Zhang Y C 1989 *Phys. Rev.* A **39** 3053

[31] Xia H, Tang G, Hao D P 2006 *Journal of Beijing Normal University* (Natural Science) **42** 161(in Chinese)[夏 辉、唐 刚、郝大鹏 2006 北京师范大学学报(自然科学版) **42** 161]

[32] Edwards S F, Wilkinson D R 1982 *Proc. R. Soc. London, Ser.* A **381** 17

[33] Wolf D E, Villain J 1990 *Europhys. Lett.* **13** 389

[34] Yang H N, Wang G C, Lu T M 1994 *Phys. Rev. Lett.* **73** 2348

[35] Jeffries J H, Zuo J K, Craig M M 1996 *Phys. Rev. Lett.* **76** 4931

[36] Pang N N, Tzeng W J 2004 *Phys. Rev.* E **70** 011105

[37] Lai Z W, Das Sarma S 1991 *Phys. Rev. Lett.* **66** 2348

Anomalous scaling of the growth equations with spatially and temporally correlated noise*

Zhang Li-Ping†

(*Department of Physics, China University of Mining and Technology, Xuzhou* 221008, *China*)

(Received 4 September 2008; revised manuscript received 22 October 2008)

Abstract

A dynamic renormalization-group method is generalized to explore the anomalously dynamic scaling property of kinetic roughening growth equation and the general conclusion on the anomalous exponents of the growth equation with spatially and temporally correlated noise is drawn. The results of the anomalous exponents are employed in several typical local growth equations, which include the Kardar-Parisi-Zhang(KPZ) equation, linear equation and Lai-Das Sarma-Villain(LDV) equation, to judge the condition of anomalous scaling behaviors. Analysis shows that within the long wavelength limit the dynamic scaling property of a growth equation is related to the most relevant term, the dimension of the system and noise; and if the anomalous scaling of the equation exists, super-roughening instead of intrinsic anomalous roughening will be displayed in local growth models.

Keywords: anomalous scaling, dynamic renormalization-group theory, spatially and temporally correlated noise

PACC: 0540, 0250

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10674177), the Scientific Research Foundation for the Returned Overseas Chinese Scholars from Ministry of Education, China (Grant No. 200318), the Science Foundation of China University of Mining and Technology for Young Scholars (Grant No. 2006A043).

† E-mail: zhlip_77@163.com