

超混沌 Lorenz 系统的常数脉冲与自适应脉冲的混合控制*

陈光平[†] 郝加波

(四川文理学院物理与工程技术系, 达州 635000)
(2008 年 5 月 1 日收到, 2008 年 6 月 30 日收到修改稿)

研究了超混沌 Lorenz 系统的控制问题, 基于脉冲控制原理和自适应控制策略, 提出了常数脉冲和自适应脉冲相结合的混合控制方法, 该方法可以扩大将系统控制到稳定周期轨道的控制参数的范围. 数值实验证明了这种混合控制的方法的有效性.

关键词: 超混沌 Lorenz 系统, 常数脉冲控制, 自适应脉冲控制

PACC: 0545

1. 引 言

超混沌系统是指具有两个以上正的李雅普诺夫指数的动力学系统. 超混沌系统比弱混沌系统具有更加复杂的动力学行为. 它在非线性电路、保密通信等领域具有重要的应用价值. 近年来, 关于超混沌的研究引起了大批非线性科学工作者的兴趣, 成为了非线性领域研究中的一个热点问题. 超混沌 Rossler 系统^[1]、超混沌 Chen 系统^[2]、超混沌 Lü 系统^[3]等不断被人们提出和研究, 获得了一些超混沌系统动力学规律; 不久前, 王兴元又提出了超混沌 Lorenz 系统^[4], 并且对它的动力学行为进行了详细研究.

混沌控制是指混沌的控制和诱导, 随着非线性科学的蓬勃发展, 人们发现混沌及其控制不仅具有深刻的理论意义, 而且存在广阔的应用前景. 目前国内外科研工作者提出了多种混沌控制的方法^[5-12], 在这些方法中, 脉冲控制是一种研究比较多的方法, 脉冲控制又可以分为小量常数脉冲控制和自适应脉冲控制等. 本文将常数脉冲方法和自适应脉冲方法用于超混沌 Lorenz 系统的控制发现, 单独使用其中一种脉冲方法控制超混沌时, 如果控制强度较小, 不能将超混沌系统控制到稳定周期轨道, 如果控制强度过大超混沌系统很快成为发散系统, 所以单独使用其中一种方法控制时, 能够将系统控制到稳定周

期轨道的参数范围很有限. 但是将两种方法结合起来, 对超混沌系统进行混合控制, 可以将控制参数范围大大扩展. 数值实验结果证明了本方法的有效性.

2. 脉冲控制原理

设 n 维连续非线性混沌系统为

$$\dot{x} = f(t, x) = Ax + \Phi(x), \quad (1)$$

其中 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ 是系统变量, f 为 $R^n \times R^n \rightarrow R^n$ 一阶连续导数, A 为方程(1)的线性部分的系数矩阵, $\Phi(x)$ 为方程(1)中的非线性部分. 在离散时刻 $\{t_k\}$ 其中 $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k < \lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \infty$ 时给系统施加脉冲控制作用 $\Delta x|_{t=t_k} = x(t_k^+) - x(t_k) = B_k x$, 其中 B_k 为 $n \times n$ 的常数矩阵,

$$x(t_k^+) = \lim_{t \rightarrow t_k^+} x(t), x(t_k) = \lim_{t \rightarrow t_k^-} x(t) = x(t_k^-).$$

于是(1)式的脉冲控制微分系统为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t, x), t \neq t_k, \\ \Delta x &= B_k x, t = t_k, \\ x(t_0^+) &= x_0 \quad (k = 1, 2, 3, \dots). \end{aligned} \quad (2)$$

由混沌系统的有界性有 $\|\Phi(x)\| \leq L_1 \|x\|$, 其中 L_1 为大于 0 的常数.

定理 设 $\lambda_2(A)$ 为矩阵 $A^T + A$ 的最大特征值, β_k 为 $(I + B_k^T)(I + B_k)$ 的最大特征值, 即记为

* 四川省教育厅重点科研基金(批准号:2008ZA037);四川省教育厅青年基金(批准号:07ZB076);四川文理学院自然科学基金(批准号:2007A01Z)资助的课题.

[†] E-mail: chengp205@yahoo.com.cn

$$\lambda_2(A) = \lambda_{\max}(A^T + A),$$

$$\beta_k = \lambda_{\max}[(I + B_k^T)(I + B_k)].$$

1) 若 $\lambda_2(A) + 2L_1 = \eta < 0$ (η 为常数) 并且存在一个常数 $\alpha (0 \leq \alpha < -\eta)$ 使得

$$\ln(\alpha \beta_k) - \alpha(t_k - t_{k-1}) \leq 0, k = 1, 2, \dots$$

则系统 (2) 的平凡解是全局指数稳定的.

2) 若 $\lambda_2(A) + 2L_1 = \eta \geq 0$ (η 为常数) 并且存在一个常数 $\alpha \geq 1$, 使得

$$\ln(\alpha \beta_k) + \eta\tau \leq 0, k = 1, 2, \dots$$

则 $\alpha = 1$ 表明系统 (2) 的平凡解是稳定的, $\alpha > 1$ 表明系统的平凡解是全局渐进稳定的.

证明 构造一个李雅普诺夫函数 $V(x) = x^T x$, 当 $t \in (t_{k-1}, t_k], k = 1, 2, \dots$, 它沿着系统 (2) 的全导数为

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) &= (Ax + \Phi)^T x + x^T (Ax + \Phi) \\ &= x^T (A^T + A)x + (\Phi^T x + x^T \Phi) \\ &= x^T (A^T + A)x + 2\Phi^T x \\ &\leq (\lambda_2(A) + 2L_1)V(x(t)), \end{aligned}$$

即

$$V(x(t)) \leq V(x(t_{k-1}^+)) \exp((\lambda_2(A) + 2L_1)(t - t_{k-1})), t \in (t_{k-1}, t_k], k = 1, 2, \dots$$

又

$$\begin{aligned} V(x(t_k^+)) &= [(I + B_k)x(t_k)]^T (I + B_k)x(t_k) \\ &\leq \beta_k V(x(t_k)), k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

所以当 $t \in (t_0, t_1]$,

$$V(x(t)) \leq V(x(t_0^+)) \exp((\lambda_2(A) + 2L_1)(t - t_0)),$$

则

$$V(x(t_1)) \leq V(x(t_0^+)) \exp((\lambda_2(A) + 2L_1)(t_1 - t_0)),$$

于是

$$\begin{aligned} V(x(t_1^+)) &\leq \beta_1 V(x(t_1)) \\ &\leq V(x(t_0^+)) \exp((\lambda_2(A) + 2L_1)(t_1 - t_0)). \end{aligned}$$

同理可得当 $t \in (t_1, t_2]$ 时, 有

$$\begin{aligned} V(x(t)) &\leq V(x(t_1^+)) \exp((\lambda_2(A) + 2L_1)(t - t_1)) \\ &\leq \beta_1 V(x(t_0^+)) \exp((\lambda_2(A) + 2L_1)(t - t_0)). \end{aligned}$$

当 $t \in (t_k, t_{k+1}]$ 时,

$$\begin{aligned} V(x(t)) &\leq V(x(t_0^+)) \beta_1 \beta_2 \dots \beta_k \\ &\quad \times \exp((\lambda_2(A) + 2L_1)(t - t_0)). \end{aligned}$$

1) 当 $\lambda_2(A) + 2L_1 = \eta < 0$, 且存在 $\alpha (0 \leq \alpha < -\eta)$ 则 $\forall t \in (t_k, t_{k+1}]$,

$$\begin{aligned} V(x(t)) &\leq V(x(t_0^+)) \beta_1 \beta_2 \dots \beta_k \\ &\quad \times \exp((\lambda_2(A) + 2L_1)(t - t_0)) \end{aligned}$$

$$= V(x(t_0^+)) \beta_1 \beta_2 \dots \beta_k \exp(\eta(t - t_0))$$

$$\leq V(x(t_0^+)) \beta_1 \beta_2 \dots \beta_k$$

$$\times \exp(-\alpha(t - t_0))$$

$$\times \exp((\eta + \alpha)(t - t_0))$$

$$= V(x(t_0^+)) \beta_1 \exp(-\alpha(t_1 - t_0)) \beta_2$$

$$\times \exp(-\alpha(t_2 - t_1)) \dots \beta_k$$

$$\times \exp(-\alpha(t_k - t_{k-1}))$$

$$\times \exp((\eta + \alpha)(t_1 - t_0))$$

$$\leq V(x(t_0^+)) \exp((\eta + \alpha)(t - t_0)),$$

即

$$V(x(t)) \leq V(x(t_0^+)) \exp((\eta + \alpha)(t - t_0)), t \geq t_0.$$

则原脉冲系统的平凡解是全局指数稳定的.

2) 当 $\lambda_2(A) + 2L_1 = \eta \geq 0$, 可得到当 $t \in (t_k,$

$t_{k+1}]$ 时

$$\begin{aligned} V(x(t)) &\leq V(x(t_0^+)) \beta_1 \beta_2 \dots \beta_k \\ &\quad \times \exp((\lambda_2(A) + 2L_1)(t - t_0)) \\ &\leq V(x(t_0^+)) \beta_1 \beta_2 \dots \beta_k \\ &\quad \times \exp(\eta(t_{k+1} - t_0)) \\ &\leq V(x(t_0^+)) \beta_1 \exp(\eta(t_2 - t_1)) \beta_2 \\ &\quad \times \exp(\eta(t_3 - t_2)) \dots \beta_k \exp(\eta(t_{k+1} - t_k)) \\ &\quad \times \exp(\eta(t_1 - t_0)) \\ &\leq V(x(t_0^+)) \frac{1}{\alpha^k} \exp(\eta(t_1 - t_0)). \end{aligned}$$

由此得出定理的结论 2) 成立.

从定理可知, 对于一个给定系统, 其系数矩阵特征值 $\lambda_2(A)$ 是确定的, 能否将系统控制到不动点将取决于脉冲控制的时间间隔 $\tau = t_{k+1} - t_k$ 和常数矩阵 B_k , 而 B_k 就是脉冲控制强度. 通常取 $B_k = \text{diag}(r)$, 选择合适的控制强度 r 可以将系统 (2) 稳定到不动点或周期轨道.

当 r 为常数时的脉冲控制叫做常数脉冲控制; 当 r 与系统变量 x_i 有关时, 这种脉冲控制就是文献 [5] 提出的自适应脉冲控制, 常数脉冲与自适应脉冲关系如下:

$$r = \begin{cases} p, & \text{常数脉冲,} \\ kx_i^j, & \text{自适应脉冲.} \end{cases} \quad (3)$$

自适应脉冲控制方法对受控系统的具有较大兼容性, 可以根据不同的实际需把系统控制到周期轨道或者不动点, 自适应脉冲的脉冲强度随着系统的演变而变化, 具有较大的灵活性等优点. 然而, 对于不同的系统, 系统量 x_i 的演化范围也不同, 某些

系统的 x_i^j 可能大, 容易使脉冲强度 kx_i^j 过大, 造成系统发散. 为了防止其发散, 必须使得控制参数 k 特别小, 这将降低自适应脉冲控制实用价值, 也成了它的一个缺点. 为了利用自适应脉冲控制的优点, 扬弃其缺点, 我们提出将自适应脉冲与常数脉冲相结合的混合控制方法. 设计思路如下.

在 $t = t_k$ 时加入控制 r , 当 $|kx_i^j|$ 大于某一个常数 p 时, 取 $r = p$ 实施常数脉冲控制; 当 $|kx_i^j|$ 小于这个常数时, 取 $r = kx_i^j$ 实施自适应脉冲控制.

混合控制器表达式为

$$r = \begin{cases} p, & |kx_i^j| > p, \\ kx_i^j, & |kx_i^j| \leq p, \end{cases} \quad t = t_k. \quad (4)$$

下面以超混沌 Lorenz 系统为例子, 进行数值仿真实验.

3. 数值仿真实验研究结果

超混沌 Lorenz 系统表示为

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a(x_2 - x_1) + x_4, \\ \dot{x}_2 &= cx_1 - x_2 - x_1x_3, \\ \dot{x}_3 &= x_1x_2 - bx_3, \\ \dot{x}_4 &= -x_2x_3 + dx_4. \end{aligned} \quad (5)$$

文献 [4] 研究发现当 $a = 10, b = 8/3, c = 28$, 当 d

取不同的值时该系统出现不同的动力学行为. $-6.43 \leq d \leq -3.21$ 时系统(5)处于混沌状态; $-3.21 < d \leq -1.52$ 时系统做周期运动. $-1.52 < d \leq 0.06$ 时系统处于超混沌状态. 当 $d = -1$ 时呈现超混沌行为, 我们对其进行控制.

根据脉冲控制思想, 设计出受控超混沌 Lorenz 系统如下:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a(x_2 - x_1) + x_4, \\ \dot{x}_2 &= cx_1 - x_2 - x_1x_3, \\ \dot{x}_3 &= x_1x_2 - b(1+r)x_3, \\ \dot{x}_4 &= x_2x_3 + dx_4. \end{aligned} \quad (6)$$

3.1. 常数脉冲控制

常数脉冲控制时, 采用四阶 Runge-Kutta 法, 取步长为 0.005, 运算 30000 步. 取 $r = p$, 对于不同的 p 值, $p = 2$ 时, 控制强度较弱, 系统仍然处于混沌; $p = 4$ 和 $p = 10$ 时, 系统处于稳定的周期轨道; $p = 11$ 时, 控制强度过大, 系统很快被控制到不动点 $(4.0410, 74.9173, 9.4606, -708.7634)$. 可见, 仅采用常数脉冲控制时, 控制系统到达稳定周期轨道的控制参数 p 的范围大致为 $2 < p < 11$. 当 $p > 200$ 时系统将会发散. 控制结果如图 1 所示.

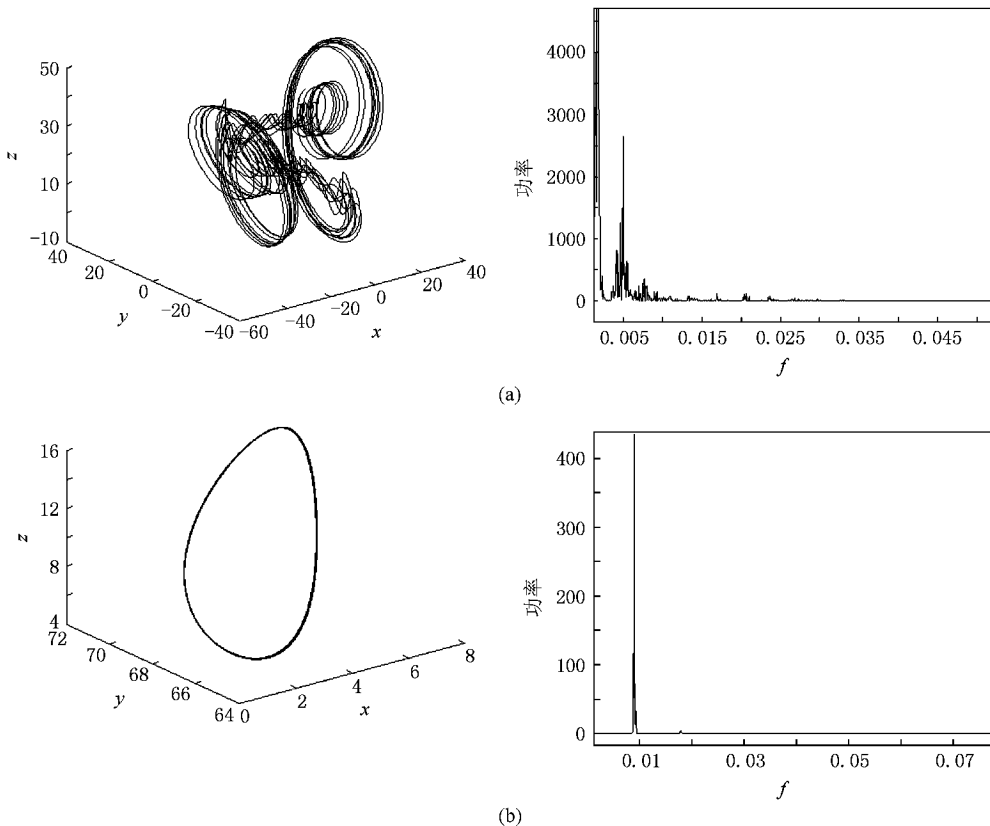


图 1 常数脉冲控制 $p = 2$ (a), $p = 10$ (b) 时, 对应的相位图和功率谱

3.2. 自适应脉冲控制

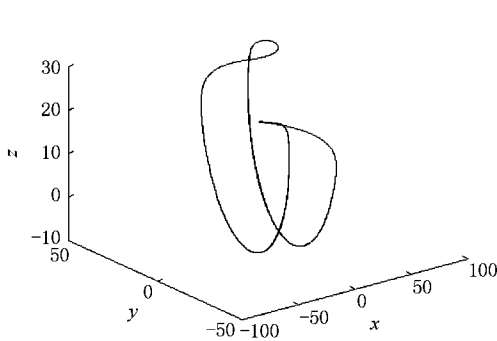
设计受控系统方程

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a(x_2 - x_1) + x_4, \\ \dot{x}_2 &= cx_1 - x_2 - x_1x_3, \\ \dot{x}_3 &= x_1x_2 - b(1 + kx_3^j)x_3, \\ \dot{x}_4 &= -x_2x_3 + dx_4, \end{aligned} \quad (j = 1, 2, 3, \dots) \quad (7)$$

下面对幂指数 j 较小的几种情况进行实验研究. 研究将系统控制到稳定周期轨道的控制参数范围.

由数值实验结果可得

1) $j = 1$ 时, 控制参数 $k > 0.3$, 控制强度过大, 系统发散; 当 $k = 0.3$ 时, 系统开始被控制到周期轨道上, 随着控制强度的减弱, 当 $k = 0.04$ 时, 系统就进入混沌区. 因此, 将系统控制到稳定周期轨道的控制参数 k 的范围 $0.04 < k < 0.3$.

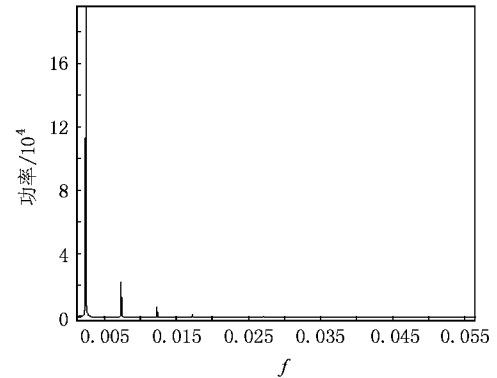
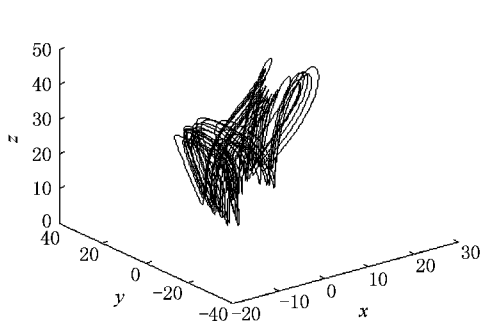


2) $j = 2$ 时, 控制参数 $k > 0.07$, 控制强度过大, 系统发散; 当 $k = 0.07$ 时系统开始被控制到周期轨道上, 随着控制强度的减弱, 当 $k = 0.01$ 时, 系统就进入混沌区. 因此, 将系统控制到稳定周期轨道的控制参数 k 的范围 $0.01 < k < 0.07$.

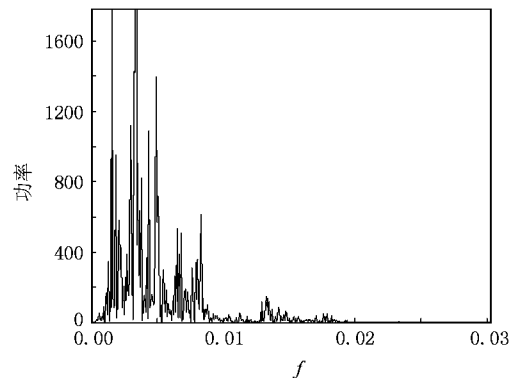
3) $j = 3$ 时, 将系统控制到周期轨道的控制参数 k 的范围 $0.000008 < k < 0.001$.

4) 当 $j = 4$ 时, $k > 0.0007$ 时系统发散; 当 $k = 0.0007$ 时, 系统控制在周期轨道; 当 $k = 0.000001$ 时将系统控制到混沌. 将系统控制到周期轨道的控制参数 k 的范围是 $0.000001 < k < 0.0005$.

5) $j = 5$ 时, $k > 0.000001$ 时系统将发散; 当 $k = 0.000001$ 时, 系统被控制到周期一轨道; 开始将系统控制到周期轨道. 随着控制参数 k 的减小, 控制强度减弱, 系统逐渐从周期一轨道变成多周期轨道. 当 $k = 0.00000001$ 时, 控制强度太弱, 不能将系统控制到周期轨道而进入混沌运动. 如图 2 所示.



(a)



(b)

图 2 自适应控制幂指数 $j = 5$ 时, $k = 0.000001$ (a), $k = 0.00000001$ (b) 时所对应的相位图和功率谱

结论 随着自适应控制项幂指数 j 的增大, 将超混沌系统控制到稳定周期轨道的控制参数越来越小, 直至趋于零.

3.3. 常数脉冲和自适应脉冲混合控制

综合以上实验分析, 可知仅使用常数脉冲控制

或者仅使用自适应脉冲控制系统,欲使系统被控制到稳定周期轨道,选取的控制参数范围都比较小.当系统控制参数大于这个范围时,很快成为发散系统;当系统控制参数小于这个范围时,系统仍然处于混沌状态,不能达到控制目的.因此,扩大控制参数范围,对于实际控制中设计控制器具有更大的灵活性与实用性.我们采取以下策略以期扩大控制参数范围.将自适应脉冲和常数脉冲结合起来,对超混沌 Lorenz 系统进行混合控制.以 $j = 4$ 为例,此时选择控制参数 $k = 0.001$,从上面实验知道,仅采用自适应脉冲控制,超混沌系统将很快发散不能达到混沌控制效果.现在我们加入常数限制 p ,当自适应控制

项 $|kx_3^4| > p$ 时,以常数 p 代替控制项 kx_3^4 ,当自适应控制项 $|kx_3^4| \leq p$ 时,采用自适应脉冲控制,取 $r = kx_3^4$.下面,我们对混合控制效果和影响因素进行研究.

3.3.1. 混合控制常数 p 对控制的影响

$j = 4, k = 0.001$ 时, $p > 190$ 时,系统发散, $p < 2.75$ 时系统混沌. p 在 2.75 到 190 范围内,可得控制到稳定周期轨道. $p = 185$ 时,步长取 0.001 在 30000 次运算中,自适应脉冲控制作用了 18452 次,常数脉冲控制作用了 11548 次; $p = 4$ 时,自适应脉冲控制作用 3557 次,常数脉冲作用 26443 次.

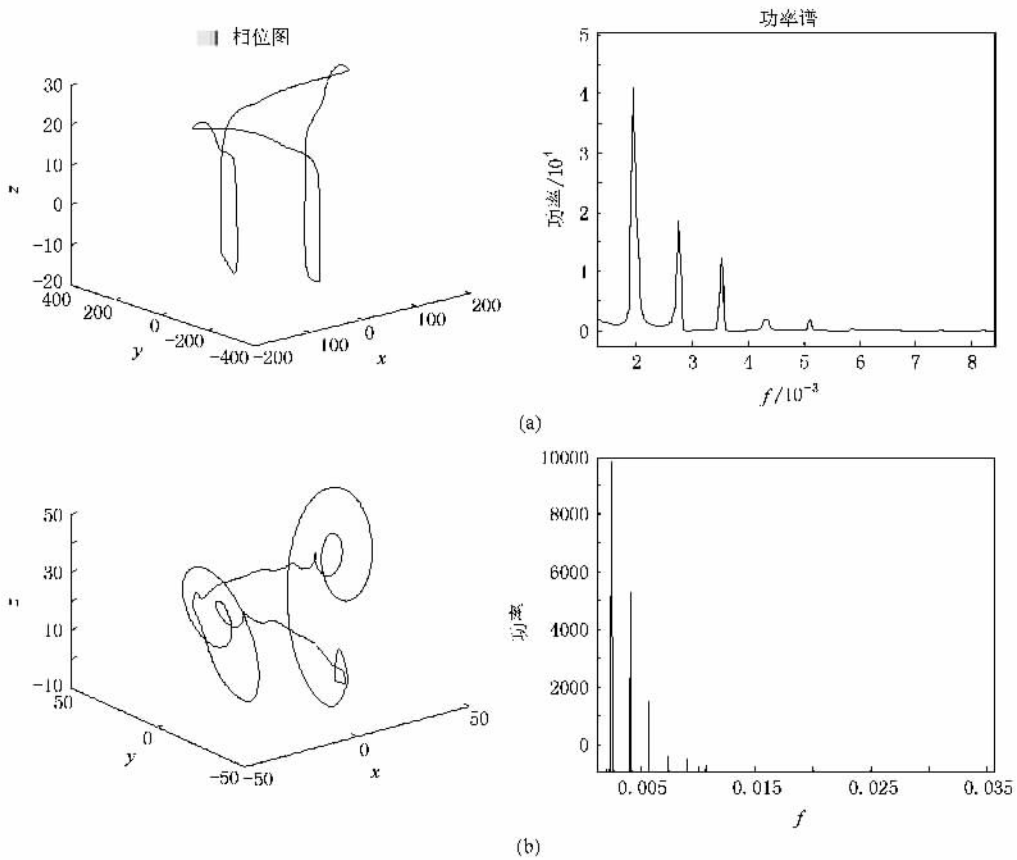


图3 $j = 4, k = 0.001$ 时, $p = 185$ (a), $p = 4$ (b) 时对应的相位图和功率谱

从本设计结果分析,仅在自适应作用下,控制参数 $k = 0.001$ 时系统是发散的,仅在常数脉冲控制下控制参数 $p = 185$ 时,系统被稳定到不动点上.而将这两种情况结合起来,对系统进行混合控制,其结果却将系统控制到了稳定的周期轨道上.随着控制参数 p 减小,自适应脉冲控制次数减少,常数脉冲控制次数增多,逐渐以常数脉冲控制为主,呈现出常数脉冲控制的轨道.因此混合控制,将系统控制到稳定

周期轨道的控制参数 p 的范围从原来 $2 < p < 1$ 扩大到了 $2 < p < 190$;也可以将自适应控制参数 k 扩大 10 倍.

3.3.2. 控制增益 k 对控制的影响

$j = 5, p = 10$,将 k 在自适应控制上限 0.000001 的基础上扩大 100 倍到 0.0001 时,采用四阶龙格库塔法,取步长为 0.001,在 40000 次运算中,自适应脉冲作用 9184 次,常数脉冲作用了 30816 次,作用结

果将系统控制到周期轨道; k 在自适应控制上限的基础上扩大 10 倍到 0.00001 时, 在 40000 次运算中,

自适应控制作用 10994 次, 常数脉冲作用了 29006 次, 作用结果将系统稳定周期轨道上.

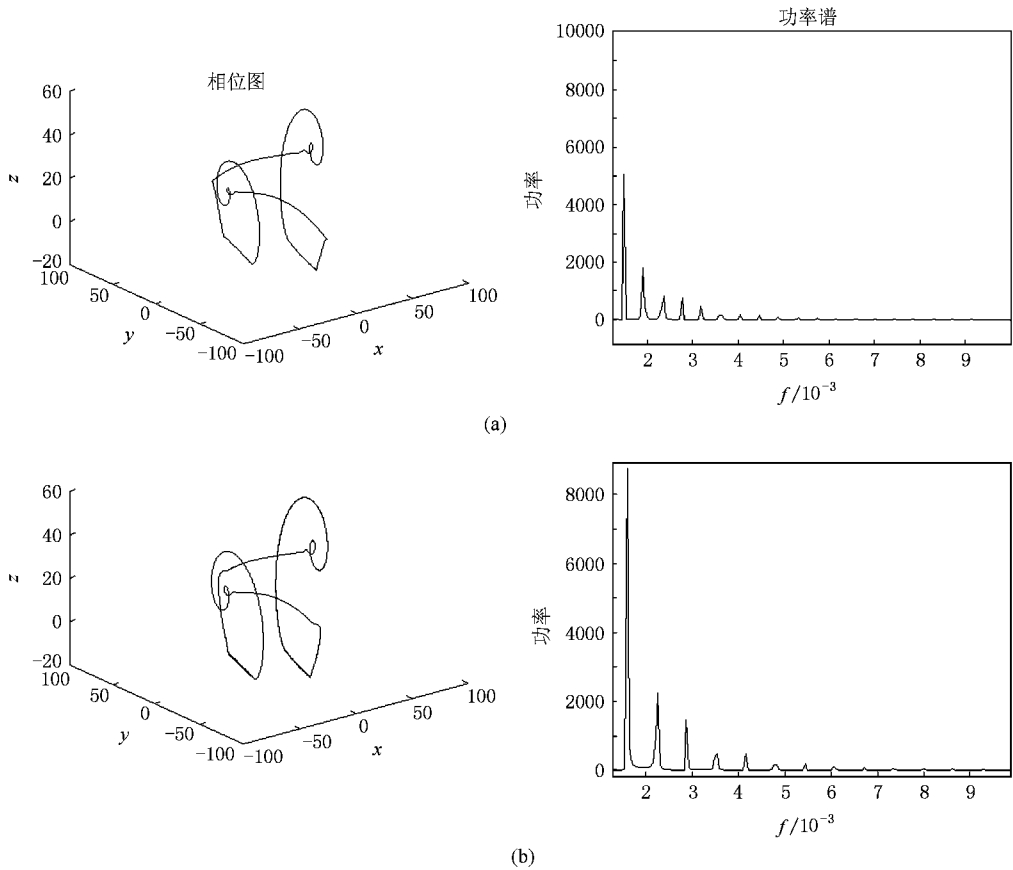


图 4 $j=5, p=10$ 时, $k=0.0001$ (a), $k=0.00001$ (b) 相图和功率谱

从实验分析控制结果, 当 $j=5, p=10$ 时, 随着控制参数 k 的减小, 常数脉冲作用的次数也跟着减少, 直到最后只有自适应脉冲控制, 控制结果跟只有自适应脉冲控制一样, 因此将系统控制到稳定周期轨道的控制参数 k 的下限不变, 仍然为 0.000000001. 混合控制方法将 k 的范围从原来的 $0.000000001 < k < 0.000001$ 扩大到 $0.000000001 < k < 0.0001$.

4. 结 论

本文分别采用常数脉冲方法和自适应脉冲方法

对超混沌 Lorenz 系统进行了有效控制. 控制结果显示, 分别单独使用两种方法控制时, 控制参数只有在很小范围才能将超混沌系统控制到稳定周期轨道上, 而将自适应脉冲方法和常数脉冲方法结合起来对系统进行混合控制, 控制参数的范围将得到大大扩展. 这种方法在实际控制中防止参数误差引起不良结果和设计便捷的控制器等方面都具有重要的应用价值, 因此, 常数脉冲和自适应脉冲相结合的混合控制方法比单独使用其中一种方法控制混沌系统具有一定的优越性; 数值实验结果证明了这种混合控制方法的有效性.

[1] Rossler O E 1979 *Phys. Lett. A* **71** 155

[2] Li Y X, Tang Chen G R 2005 *Int. J. Bifurcation Chaos* 3367

[3] Chen A M, Lu J A, Lü J H et al 2006 *Physica A* **364** 103

[4] Wang X Y, Wang M J 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 5136 (in Chinese)

[王兴元、王明军 2007 物理学报 **56** 5136]

[5] Ott E, Grebogi C, Yorke J A 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 1196

- [6] Gong L H 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 3502 (in Chinese) [龚礼华 2005 物理学报 **54** 3502]
- [7] Luo X S , Fang J Q , Wang L H 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 2196 (in Chinese) [罗晓曙、方锦清、王力虎 1999 物理学报 **48** 2196]
- [8] Zhang J S , Xiao X C 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2092 (in Chinese) [张家树、肖先赐 2001 物理学报 **50** 2092]
- [9] Li G H , Zhou S P , Xu D M *et al* 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 2123 (in Chinese) [李国辉、周世平、徐得名等 2000 物理学报 **49** 2123]
- [10] Cheng L , Zhang R Y , Peng J H 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 536 (in Chinese) [程 丽、张入元、彭建华 2003 物理学报 **52** 536]
- [11] Luo X S 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 402 (in Chinese) [罗晓曙 1999 物理学报 **48** 402]
- [12] Hu G , Xiao J H , Zheng Z G 2000 *Chaos Control* (Shanghai : Shanghai Scientific and Technological Education Publishing House) p15 (in Chinese) [胡 岗、萧井华、郑志刚 2000 混沌控制(上海 : 上海科技教育出版社) 第 15 页]

Hybrid control of hyperchaotic Lorenz system by constant impulse and adaptation impulse ^{*}

Chen-Guang-Ping[†] Hao-Jia-Bo

(*Physic and Engineering Technology Department of Sichuan Science and Art University , Dazhou 635000 , China*)

(Received 1 May 2008 ; revised manuscript received 30 June 2008)

Abstract

The question about the control of hyper chaotic Lorenz system has been studied , and the method of hybrid control by constant impulse and adaptation impulse has been proposed according to the impulse control principle and the adaptive control policy. The method can extend the range of control parameter that can control the system to periodical orbit. The simulation results showed the effectiveness of this method.

Keywords : hyperchaotic Lorenz system , constant impulse control , adaptive impulse control

PACC : 0545

^{*} Project supported by the Key Program of the Natural Science Foundation from the Education Bureau of Sichuan Province , China(Grant No. 2008ZA037) , the Program of the Youth Foundation from the Education Bureau of Sichuan Province , China(Grant No. 07ZB076) , the Key Program of the Natural Science Foundation from the Sichuan Science and art University(Grant No. 2007A01Z).

[†] E-mail : chengp205@ yahoo. com. cn