

# 解的移植法与含源耦合 VCmKdV 方程的解\*

杨建荣 毛杰健†

(上饶师范学院物理与电子信息系, 上饶 334001)  
(2008 年 7 月 21 日收到, 2008 年 10 月 24 日收到修改稿)

根据变系数 modified Korteweg-de Vries (VCmKdV) 方程与常系数 KdV-mKdV 方程的非线性项、色散项的相似性, 对解已知的 KdV-mKdV 方程做适当变换, 并将它的解移植到解未知的 VCmKdV 方程, 由此构造出两个不同方程解之间的移植关系. 利用这种解的移植方法, 求得了由两层流体模型经演化获得的含有源(或汇)耦合 VCmKdV 系统新的精确解和类孤波解. 对 Bäcklund 变换与解的移植法进行了比较, 分析了源和汇对波幅的影响.

关键词: 解的移植法, KdV-mKdV 方程, 耦合 VCmKdV 系统, 类孤波解

PACC: 0290, 0340G, 0340K

## 1. 引言

自 1965 年 Kruskal 和 Zabusky<sup>[1]</sup>提出孤立波以来, 非线性科学中的孤子理论得到迅速的发展, 并广泛地应用于量子场论、粒子物理、流体物理和非线性光学等物理学的各个分支. 在非线性科学中, 非线性物理方程的建立和求解, 是一项重要的工作. 对于已建立的常系数非线性可积或不可积的物理方程的求解和分析, 已取得了很大的发展.

但是常系数非线性方程是现实非线性物理中的理想化和近似, 其解往往会遇到对现实中存在的实际物理现象不能解释的情况. 而变系数非线性物理方程能较好地描述实际非线性物理问题, 其解能解释常系数非线性方程的解不能解释的物理现象. 例如, 用通常的常系数 Korteweg-de Vries (KdV) 方程的孤子解, 在一定程度上可以刻画大气阻塞现象<sup>[2,3]</sup>, 然而, 由于常系数 KdV 方程的孤立子的稳定性, 却无法描述实际大气阻塞现象的形成和消亡的发展周期. 为了解释阻塞的生命周期, 文献[4]导出了与时间相关的变系数 KdV 方程, 其解成功地解释了大气偶极阻塞的生命深化周期及阻塞的一些其他观察事实. 因此, 求解和分析变系数非线性方程, 已引起越来越多的关注, 并取得了一定的进展<sup>[5-13]</sup>.

最近, 文献[14]从一个描述两层流体的模型<sup>[15]</sup>中, 得到一个如下含源(汇)的广义耦合变系数

modified Korteweg-de Vries (VCmKdV) 方程:

$$\begin{aligned} &u_t + r_1 u_{xxx} + (r_2 u^2 + r_3 uv \\ &+ r_4 u + r_5 v^2 + r_6 v + r_7)u_x \\ &+ (r_8 u^2 + r_9 uv + r_{10} u + r_{11} v \\ &+ r_{12})v_x + r_{13} u = 0, \\ &v_t + e_1 v_{xxx} + (e_2 v^2 + e_3 uv \\ &+ e_4 v + e_5 u^2 + e_6 u + e_7)v_x \\ &+ (e_8 v^2 + e_9 uv + e_{10} v + e_{11} u \\ &+ e_{12})u_x + e_{13} v = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

其中  $e_i, r_i (i = 1, 2, \dots, 13)$  为时间的任意函数, 当  $e_{13} < 0, r_{13} < 0$  时, 方程(1)为含源系统; 当  $e_{13} > 0, r_{13} > 0$  时, 则为含汇系统. 对于这样复杂的含有源或汇的变系数非线性不可积系统, 用 Darboux 变换法、变量分离法、齐次平衡法、散射反演法或 Bäcklund 变换等方法求解是很困难的. 为了得到有物理意义的解, 文献[14]讨论了系统(1)的相似约化情况, 并用映射法获得了无源(或无汇) ( $e_{13} = r_{13} = 0$ ) 或  $u = av$  时的精确解和周期解. 文献[16]讨论了系统(1)在特殊情况下的孤子解.

由于系统(1)的非线性项、色散项与常系数耦合 Korteweg-de Vries-modified Korteweg-de Vries (KdV-mKdV) 方程

$$U_t + U_{xxx} + 6\alpha U U_x + 6\beta U^2 U_x = 0 \quad (2)$$

具有相似性, 且方程(2)是(1)的一个特例. 相信它们的解也具有某种相似性. 依据它们之间的相似性, 探

\* 江西省自然科学基金(批准号: 2008GZS0045)资助的课题.

† 通讯联系人. E-mail: maojj2006@163.com

索用代数的方法将简单系统(2)的解移植到(1),寻找方程(1)与(2)的解之间的关系,从而揭示系统(1)所包含的物理现象.本文基于这一想法,找到了当  $e_{13} \neq r_{13} \neq 0, u \neq av$  时,系统(1)新的精确解和类孤子解.

## 2. 移植法与 VCmKdV 方程的精确解

将方程(2)的解移植到方程(1),可以通过两种方法实现,一是利用方程(2)具体的解,直接构造方程(1)的解;二是根据方程(2)函数的关系,对(2)式进行适当变换,间接构造方程(1)的解,这种方法能获得更丰富的解,本文采用第二种方法.

第一步,对方程(2)做行波变换,令  $U = U(\xi), \xi = kx - ct$  代入(2)式并积分,得

$$U_{\xi, \xi, \xi} = \frac{U_{\xi}}{k^3} (-6k\beta U^2 - 6k\alpha U + c), \quad (3)$$

$$U_{\xi, \xi} = \frac{1}{k^3} (-2k\beta U^3 - 3k\alpha U^2 + cU - A), \quad (4)$$

$$U_{\xi} = \sqrt{\frac{1}{k^3} (-k\beta U^4 - 2k\alpha U^3 + cU^2 - 2AU - 2B)}, \quad (5)$$

式中  $c, \alpha, \beta$  为任意实常数,  $k$  是不为零的实常数,  $A, B$  为积分常数.当  $A, B, c, \alpha, \beta$  取不同的值,容易求得简单系统(2)中  $U$  的孤子解、周期解和精确解.在此列出下列三种有奇性的解:

$$\begin{aligned} A &= -\frac{\eta^2 \eta_1 (-2\eta_1^2 + \eta_6^2 m^2 + \eta_6^2 + 6\eta_6^2 m) k^3}{\eta_6^2}, \\ B &= -\frac{1}{2} \frac{\eta^2 k^3 (\eta_6 m + \eta_6 - \eta_1) (4\eta_6^2 m - \eta_1^2) (\eta_6 m + \eta_6 + \eta_1)}{\eta_6^2}, \\ c &= -\frac{\eta^2 (\eta_6^2 m^2 + \eta_6^2 + 6\eta_6^2 m - 6\eta_1^2) k^3}{\eta_6^2}, \\ \alpha &= \frac{2\eta^2 \eta_1 k^2}{\eta_6^2}, \\ \beta &= -\frac{1}{2} \frac{\eta^2 k^2}{\eta_6^2}, \\ U &= \eta_1 + \eta_6 (\operatorname{msi}(\eta \xi) + \operatorname{ns}(\eta \xi)). \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} A &= -(\eta_4 \eta_1^2 m^2 \eta_2 - 2\eta_4 \eta_1^2 \eta_2 + 2\eta_4 \eta_3^2 m^2 - 2\eta_2^3 \eta_4 - 2\eta_3 \eta_1^3 + \eta_1 \eta_2^2 \eta_3 m^2 \\ &\quad - 2\eta_1 \eta_3 \eta_2^2) \eta^2 k^3 (\eta_4 \eta_1 - \eta_2 \eta_3)^2, \\ B &= \frac{\eta^2 (\eta_2^2 + \eta_1^2) (\eta_1^2 + \eta_2^2 m^2 - \eta_2^2) k^3}{(\eta_4 \eta_1 - \eta_2 \eta_3)^2}, \\ c &= -\eta^2 (m^2 \eta_4^2 \eta_1^2 + 4\eta_2 m^2 \eta_4 \eta_3 \eta_1 + \eta_2^2 m^2 \eta_3^2 - 2\eta_4^2 \eta_1^2 + 6\eta_2^2 \eta_4^2 m^2 \\ &\quad - 6\eta_2^2 \eta_4^2 - 8\eta_4 \eta_2 \eta_3 \eta_1 - 6\eta_3^2 \eta_1^2 - 2\eta_2^2 \eta_3^2) k^3 (\eta_4 \eta_1 - \eta_2 \eta_3)^2, \\ \alpha &= -\eta^2 (\eta_4^2 \eta_1 \eta_3 m^2 + \eta_2 \eta_4 m^2 \eta_3^2 + 2\eta_4^3 \eta_2 m^2 - 2\eta_2 \eta_4^3 - 2\eta_1 \eta_3 \eta_4^2 \\ &\quad - 2\eta_2 \eta_3^2 \eta_4 - 2\eta_1 \eta_3^3) k^2 (\eta_4 \eta_1 - \eta_2 \eta_3)^2, \\ \beta &= \frac{\eta^2 (\eta_3^2 + \eta_4^2) (m^2 \eta_4^2 - \eta_4^2 - \eta_3^2) k^2}{(\eta_4 \eta_1 - \eta_2 \eta_3)^2}, \\ U &= \frac{\eta_1 \operatorname{si}(\eta \xi) + \eta_2 \operatorname{ci}(\eta \xi)}{\eta_3 \operatorname{si}(\eta \xi) + \eta_4 \operatorname{ci}(\eta \xi)}, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} A &= \frac{\eta_1 \eta^2 \eta_3 k^3 (\eta_4^2 + \eta_5^2) (\eta_4^4 + \eta_5^4)}{2\eta_4^2 \eta_5^4 (3\eta_4^2 - \eta_5^2)}, \\ B &= \frac{\eta_1^2 \eta_3^2 \eta^2 k^3 (\eta_4^8 - 2\eta_4^4 \eta_5^4 + \eta_5^8)}{8\eta_5^6 \eta_4^2 (9\eta_4^4 - 6\eta_4^2 \eta_5^2 + \eta_5^4)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c &= -\frac{\eta^2(4\eta_4^2\eta_5^2 + 3\eta_4^4 + 3\eta_5^4)k^3}{2\eta_4^2\eta_5^2}, \\
 \alpha &= -\frac{k^2\eta^2(-3\eta_4^4 - 2\eta_4^2\eta_5^2 + \eta_5^4)}{2\eta_3\eta_4^2\eta_1}, \\
 \beta &= \frac{\eta^2\eta_5^2k^2(9\eta_4^4 - 6\eta_4^2\eta_5^2 + \eta_5^4)}{8\eta_1^2\eta_3^2\eta_4^2}, \\
 \eta_0 &= \frac{\eta_3\eta_4^2\eta_1(\eta_4^2 + \eta_5^2)}{\eta_3^2(-3\eta_4^2 + \eta_5^2)}, \\
 \eta_2 &= \frac{2\eta_3\eta_4\eta_5}{-3\eta_4^2 + \eta_5^2}, \\
 U &= \frac{\eta_0 + \eta_1 \operatorname{sech}(\eta\xi) \left( \eta_2 \tan(\eta\xi) + \eta_3 \operatorname{sech}(\eta\xi) \right)}{(\eta_4 + \eta_5 \operatorname{sech}(\eta\xi))^2}. \quad (8)
 \end{aligned}$$

式中  $\eta, \eta_0, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5, \eta_6$  是实常数,  $\operatorname{sn}, \operatorname{cn}$  和  $\operatorname{ns}$  为 Jacobi 椭圆函数,  $m$  为它们的模. (6) 和 (7) 式的  $U$  是有奇性的精确解. 当  $\eta_4\eta_5 > 0$  或  $|\eta_4| > |\eta_5| \neq 0$  (8) 式的  $U$  是无奇性的孤波解.

第二步 将方程 (2) 的解移植到方程 (1). 方程 (1) 的  $u$  和  $v$ , 可按方程 (2)  $U$  的多项式、有理式或无理式进行移植. 本文采用将方程 (2) 的解按如下关系移植到方程 (1):

$$\begin{aligned}
 u &= p_0 + p_1 U^m + p_2 U^{m+1}, \\
 v &= q_0 + q_1 U^m + q_2 U^{m+1}, \quad (9)
 \end{aligned}$$

式中  $p_i, q_i (i=0, 1, 2)$  为  $t$  的待定函数,  $m$  为整数,  $U = U(\xi), \xi = Kx - \lambda t, K = K(t), \lambda = \lambda(t)$  是满足方程 (2) 的解, 如 (6)–(8) 式.

第三步 解代数方程组. 将 (9) 式代入方程 (1), 在得到有关  $\frac{d^\delta U}{d\xi^\delta} (\delta=1, 2, 3)$  的多项式中, 用 (3)–

(5) 式的右边替换  $\frac{d^\delta U}{d\xi^\delta} (\delta=1, 2, 3)$ , 并令  $U^j$

$$\left( \sqrt{\frac{-\beta k U^4 - 2\alpha k U^3 + c U^2 - 2AU - 2B}{k^3}} \right)^j (i=0, 1, 2, \dots, j=0, 1)$$

的系数为零, 得到相应的代数方程组, 解此代数方程组, 可得到如下的结果:

当  $n=0, p_0=0, q_0=0, K(t)=k_1$  时,

$$\begin{aligned}
 p_1 &= k_2 e^{\left(\int -r_{13} dt\right)}, \\
 p_2 &= k_3 e^{\left(\int -r_{13} dt\right)}, \\
 q_1 &= k_4 e^{\left(\int -e_{13} dt\right)}, \\
 q_2 &= k_5 e^{\left(\int -e_{13} dt\right)}, \\
 \lambda &= \int -k_1 (e_7 q_2^2 k^3 + q_2^2 e_6 p_1 k^3)
 \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned}
 &+ p_2 e_{12} k^3 q_2 + e_1 q_2^2 k_1^2 c \\
 &+ p_2^2 e_5 q_1^2 k^3 - e_{11} p_2^2 q_1 k^3 \\
 &+ q_2^2 e_5 p_1^2 k^3 - k^3 q_1 q_2 e_6 p_2 \\
 &- 2k^3 q_1 q_2 e_5 p_1 p_2 + p_2 e_{11} p_1 k^3 q_2 \\
 &+ 6k_1^2 k q_1 e_1 q_2 \alpha - 6k_1^2 k q_1^2 e_1 \beta \\
 &(\frac{d^2 k^3}{dt^2}) + k_6, \quad (11)
 \end{aligned}$$

$$e_2 = \frac{-q_2 e_3 p_2 k^2 - e_5 p_2^2 k^2 - p_2^2 e_9 k^2 - p_2 e_8 q_2 k^2 + 6e_1 k_1^2 \beta}{q_2^2 k^2}, \quad (12)$$

$$\begin{aligned}
 e_4 &= (-q_2^2 e_3 p_1 k^2 + q_2 e_3 p_2 q_1 k^2 - q_2 e_6 p_2 k^2 \\
 &- 2q_2 e_5 p_1 p_2 k^2 + 2q_1 e_5 p_2^2 k^2 - p_2^2 e_{11} k^2 \\
 &- p_2 e_{10} q_2 k^2 + p_2^2 e_9 q_1 k^2 - p_2 e_9 p_1 q_2 k^2 \\
 &- 12q_1 e_1 k_1^2 \beta + 6e_1 q_2 k_1^2 \alpha) (\frac{d^2 k^2}{dt^2}), \quad (13)
 \end{aligned}$$

$$r_9 = -\frac{r_5 q_2^2 k^2 + p_2 r_3 q_2 k^2 + q_2 r_8 p_2 k^2 - 6r_1 k_1^2 \beta + p_2^2 r_2 k^2}{q_2^2 k^2}, \quad (14)$$

$$\begin{aligned}
 r_{11} &= (-q_2^2 r_8 p_1 p_2 k^2 + p_2^2 q_1 q_2 r_8 k^2 \\
 &- p_2 r_5 q_1 q_2^2 k^2 + q_2^3 p_1 r_5 k^2 - p_2 r_6 q_2^2 k^2 \\
 &+ p_2^3 q_1 r_2 k^2 - q_2 p_2^2 r_2 p_1 k^2 - 6p_2 q_1 r_1 k_1^2 \beta \\
 &- q_2^2 r_{10} p_2 k^2 + 6q_2 r_1 p_2 k_1^2 \alpha - q_2 p_2^2 r_4 k^2 \\
 &- 6q_2 p_1 r_1 k_1^2 \beta) (\frac{d^3 k^2}{dt^3}), \quad (15)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 r_{12} &= (-k^3 q_1 q_2 e_6 p_2^2 + 6p_2 k_1^2 k q_1 e_1 q_2 \alpha \\
 &- 6k_1^2 k q_1 q_2 r_1 p_2 \alpha + p_2^2 e_{11} p_1 k^3 q_2 \\
 &+ k^3 q_1 q_2^2 r_{10} p_2 + k^3 q_1 q_2 p_2^2 r_4 \\
 &- p_2 r_4 p_1 k^3 q_2^2 - r_1 p_2 k_1^2 c q_2^2 \\
 &- k^3 q_1^2 p_2^2 q_2 r_8 - 2k^3 q_1 q_2 e_5 p_1 p_2^2 \\
 &+ 2k^3 q_1 q_2^2 r_8 p_1 p_2 - 6p_2 k_1^2 k q_1^2 e_1 \beta)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2k^3 q_1 q_2 p_2^2 r_2 p_1 + 6k_1^2 k q_1^2 p_2 r_1 \beta \\
& + p_2 q_2^2 e_6 p_1 k^3 + p_2 e_1 q_2^2 k^2 c \\
& + p_2 q_2^2 e_5 p_1^2 k^3 - p_2 r_2 p_1^2 k^3 q_2^2 \\
& - k^3 q_1^2 p_2^3 r_2 - q_2^3 r_{10} p_1 k^3 \\
& - q_2^3 r_8 p_1^2 k^3 - p_2 r_7 k^3 q_2^2 \\
& + p_2^2 e_{12} k^3 q_2 + p_2^3 e_5 q_1^2 k^3 \\
& - e_{11} p_2^3 q_1 k^3 + p_2 e_7 q_2^2 k^3 \chi (q_2^3 k^3), \quad (16)
\end{aligned}$$

式中  $k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6$  为积分常数. 由(10)–(16)式,可知系统(1)的26个变系数只受到5个条件的制约. 与文献[14]得到的无源(或无汇) ( $e_{13} = r_{13} = 0$ )或  $u = av$  时的精确解和周期解不同. 将(10)和(11)式代入(9)式,得到方程(1)的精确解为

$$\begin{aligned}
u &= e^{-\int r_{13} dt} [k_2 + k_3 U(k_1 x + \lambda)], \\
v &= e^{-\int e_{13} dt} [k_4 + k_5 U(k_1 x + \lambda)], \quad (17)
\end{aligned}$$

式中  $\lambda$  由(11)式决定,  $U$  是(2)式的解.

### 3. 分析和讨论

将(7)式代入(17)式,得含有源(汇)的精确解

$$\begin{aligned}
u_1 &= e^{-\int r_{13} dt} \left[ k_2 + k_3 \frac{\eta_1 \operatorname{sn}(\eta \xi) + \eta_2 \operatorname{cn}(\eta \xi)}{\eta_3 \operatorname{sn}(\eta \xi) + \eta_4 \operatorname{cn}(\eta \xi)} \right], \\
v_1 &= e^{-\int e_{13} dt} \left[ k_4 + k_5 \frac{\eta_1 \operatorname{sn}(\eta \xi) + \eta_2 \operatorname{cn}(\eta \xi)}{\eta_3 \operatorname{sn}(\eta \xi) + \eta_4 \operatorname{cn}(\eta \xi)} \right]. \quad (18)
\end{aligned}$$

(18)式与文献[14]得到的无源(汇),无奇性的精确解和周期解不同.

将(8)式代入(17)式,得有奇性的类孤波解

$$\begin{aligned}
u_2 &= e^{-\int r_{13} dt} (k_2 + k_3 U), \\
v_2 &= e^{-\int e_{13} dt} (k_4 + k_5 U), \\
U &= \frac{\eta_0 + \eta_1 \operatorname{sech}(\eta \xi) \chi (\eta_2 \tanh(\eta \xi) + \eta_3 \operatorname{sech}(\eta \xi))}{(\eta_4 + \eta_5 \operatorname{sech}(\eta \xi))^2}, \\
\xi &= k_1 x + \lambda. \quad (19)
\end{aligned}$$

当  $\eta_4 \eta_5 > 0$  或  $|\eta_4| > |\eta_5| \neq 0$  (19)式是(1)式含源(汇)的无奇性孤波解,与文献[14]  $u = av$  不同. 若取(10)–(16) (19)式中的参数

$$\begin{aligned}
k &= k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = k_5 = k_6 = 1, \\
e_1 &= e_3 = e_5 = e_6 = e_7 = e_8 \\
&= e_9 = e_{10} = e_{11} = e_{12} = 1, \\
r_1 &= r_2 = r_3 = r_4 = r_5 \\
&= r_6 = r_7 = r_8 = r_{10} = 1, \\
\eta_1 &= \eta_5 = 1, \eta_3 = 3, \eta_4 = 2. \quad (20)
\end{aligned}$$

如  $r_{13} < 0, e_{13} < 0$ , 方程(1)描述的是含源的系  
统. 解(19)式反映了含源二层流体模型的波幅随  $t$   
的增加而增大,如图1所示;当系数  $r_{13} > 0, e_{13} > 0$   
时,方程(1)描述的是含汇的系统,解(19)式反映的  
是含汇二层流体模型的波幅随  $t$  的增加而减少(图  
2). 由此可知,源或汇对二层流体波动幅度的影响不  
是一个常数,而是成指数增大或衰减. 当取  $r_{13} = 0,$   
 $e_{13} = 0$  时,解(19)式是无源(汇)的二层流体模型的  
孤波解,是定常的孤波,与含源或汇的类孤波不同  
(图3).

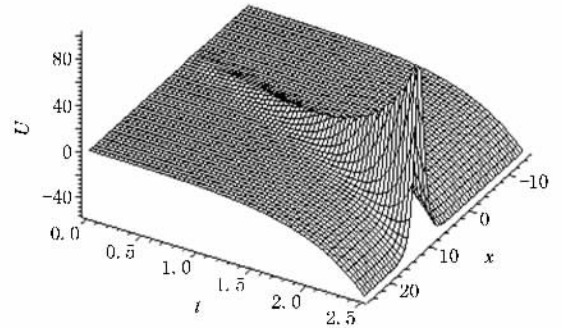


图1 源类孤波  $r_{13} = e_{13} = -2$

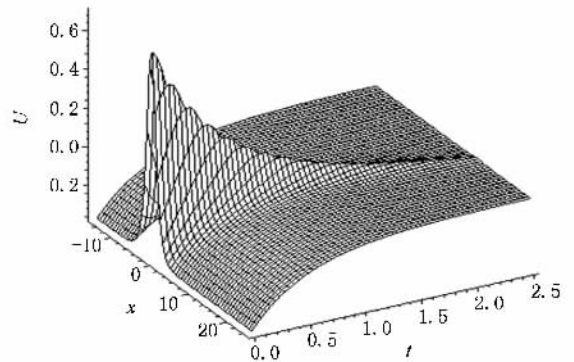


图2 汇类孤波  $r_{13} = e_{13} = 2$

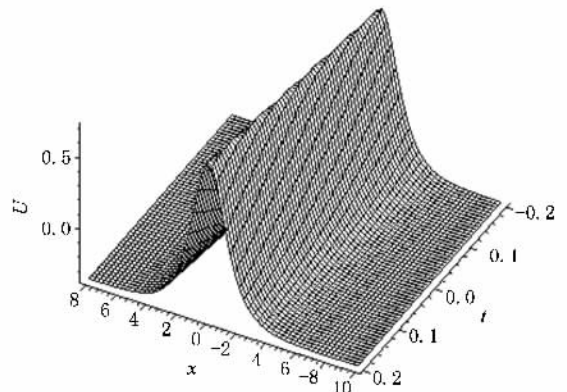


图3 无源无汇类孤波  $r_{13} = e_{13} = 0$

对于系统(1)这样具有复杂的非线性关系的变系数偏微分方程组,用 Bäcklund 变换法,将方程(1)化成线性方程是极其困难的,要建立系统(1)不同解之间的关系,同样也是难以做到的.解的移植法,并不需要方程(1)化成线性方程,也不寻找系统(1)解之间的关系,而是寻找与系统(1)的非线性项和色散项相似的解已知的方程,如方程(2),并对已知解的方程先进行适当变换,如(3)–(5)式,使它们可以用来表示未知解的方程;然后设已知解与未知解具有某种多项式、有理式或无理式的移植关系,如(9)式,将已知解移植到未知解方程并展开,利用已知解的方程经变换后的关系(如(3)–(5)式),消去未知解方程中的微分项,得到代数方程,解由此得到的代数方程组,就可确定已知解与未知解的具体关系,如(17)式.可见用移植法寻找已知解与未知解的关系,是通过解代数方程组实现的,比 Bäcklund 变换法要容易得多.至于 Darboux 变换法、变量分离法、齐次

平衡法、散射反演法与移植法的异同,在此不做逐一比较.

我们知道系统(1)反映的是二层流体在  $x$  方向的运动模型,是一个泛定方程,其中的系数和解中的常数与二层流体模型的边界条件、初始条件有关.它们的关系将另文讨论.

## 4. 结 论

本文根据变系数 VCmKdV 方程与常系数 KdV-mKdV 方程的非线性项、色散项的相似性,利用 KdV-mKdV 方程做变换,并将它的解移植到 VCmKdV 方程,由此构造出两个不同方程解之间的移植关系,求得了由两层流体模型经演化获得的含有源(或汇)耦合系统(1)新的精确解和类孤波解,如(18)和(19)式.分析了源和汇对波幅的影响,如图 1–3.对 Bäcklund 变换与解的移植法进行了比较.

- 
- [ 1 ] Zabusky N J , Kruskal M D 1965 *Phys. Rev. Lett.* **15** 240  
 [ 2 ] Long R 1964 *J. Atmos. Sci.* **21** 197  
 [ 3 ] Malguzzi P , Malanotte-Rizzoli P 1984 *J. Atmos. Sci.* **41** 2620  
 [ 4 ] Huang F , Tang X Y , Lou S Y 2007 *J. Atmos. Sci.* **64** 52  
 [ 5 ] Lou S Y 1998 *Acta Phys. Sin.* **47** 1937 ( in Chinese ) [ 楼森岳 1998 物理学报 **47** 1937 ]  
 [ 6 ] Ruan H Y , Chen Y X 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 177 ( in Chinese ) [ 阮航宇、陈一新 2000 物理学报 **49** 177 ]  
 [ 7 ] Zhang J F , Chen F Y 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1648 ( in Chinese ) [ 张解放、陈芳跃 2001 物理学报 **50** 1648 ]  
 [ 8 ] Zong F D , Dai C Q , Yang Q , Zhang J F 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3805 ( in Chinese ) [ 宗丰德、戴朝卿、杨 琴、张解放 2006 物理学报 **55** 3805 ]  
 [ 9 ] Zhu Z N 1992 *Acta Phys. Sin.* **41** 1561 ( in Chinese ) [ 朱佐农 1992 物理学报 **41** 1561 ]  
 [ 10 ] Liu S K , Fu Z T , Liu S D , Zhao Q 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1923 ( in Chinese ) [ 刘式适、付遵涛、刘式达、赵 强 2002 物理学报 **51** 1923 ]  
 [ 11 ] Mao J J , Yang J R 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 4999 ( in Chinese ) [ 毛杰健、杨建荣 2005 物理学报 **54** 4999 ]  
 [ 12 ] Mao J J , Yang J R 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 5049 ( in Chinese ) [ 毛杰健、杨建荣 2007 物理学报 **56** 5049 ]  
 [ 13 ] Mao J J , Yang J R 2006 *Chin. Phys. Lett.* **15** 2408  
 [ 14 ] Gao Y , Tang X Y 2007 *Commun. Theor. Phys.* **48** 961  
 [ 15 ] Pedlosky J 1979 *Geophysical Fluid Dynamics* ( New York : Springer )  
 [ 16 ] Yang J R , Mao J J 2008 *Chin. Phys. Lett.* **25** 1527

# Transplantation method of solutions and the solutions of a coupled VCmKdV equation with source<sup>\*</sup>

Yang Jian-Rong Mao Jie-Jian<sup>†</sup>

( *Department of Physics and Electronics , Shangrao Normal University , Shangrao 334001 , China* )

( Received 21 July 2008 ; revised manuscript received 24 October 2008 )

## Abstract

According to the comparability of the nonlinear terms and dispersion terms between the variable coefficient modified Korteweg-de Vries ( VCmKdV ) equation and constant coefficient KdV-mKdV equation , we transform properly the KdV-mKdV equation with known solutions , transplant its solutions to the VCmKdV equation with unknown solutions , and thus construct the transplantation relation between the solutions of two different equations . Utilizing this transplantation method of solutions , we obtain new exact solutions and solitary wave-like solutions of the coupled VCmKdV system , which is derived from a two-layer fluid model with source or sink . Then we compare the Bäcklund transformation and this transplantation method , and analyse the influence of source and sink on the amplitude .

**Keywords** : transplantation method of solution , KdV-mKdV equation , coupled VCmKdV system , solitary wave-like solution

**PACC** : 0290 , 0340G , 0340K

---

<sup>\*</sup> Project supported by the Natural Science Foundation of Jiangxi Province , China ( Grant No.2008GZS0045 ) .

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail :maojj2006@163.com