

一类非线性色散方程中的新型奇异孤立波*

殷久利† 田立新

(江苏大学非线性科学研究中心, 镇江 212013)
(2008 年 6 月 17 日收到 2008 年 10 月 31 日收到修改稿)

研究一类非线性色散广义 DGH 方程的新型奇异孤立波及其 Painlevé 可积性. 利用 Painlevé 分析发现当对流项强度 $m = 2$ 时广义 DGH 方程是可积的, 这是一个新的可积方程. 通过构造新的变量代换以及 auto-Backlund 变换获得该方程丰富的奇异孤立波解, 如紧孤立波 (compacton)、尖峰孤立波 (peakon)、新型带尖点的双孤立波和带爆破点的双孤立波等.

关键词: 非线性色散方程, 可积性, 奇异孤立波

PACC: 0340, 0290

1. 引言

奇异孤立波的出现和非线性色散的作用密切相关. 在线性色散的作用下, 许多偏微分方程具有光滑孤立波解, 如 KdV 方程中的钟型孤立波. 而在非线性色散作用下可以出现奇异孤立波解, 如非线性色散 KdV 方程中的紧孤立波^[1]和 CH 方程中的尖峰孤立波^[2], 在其他非线性色散方程中也相继发现了紧孤立波和尖峰孤立波^[3-9]. 奇异孤立波的研究已经引起了国内外学者的广泛关注.

本文研究一类非线性色散方程, 即广义 DGH 方程

$$u_t - u_{xxt} + 2\omega u_x + au^m u_x + \gamma u_{xxx} = 2u_x u_{xx} + uu_{xxx}, \quad (1)$$

其中 a, γ 是常数, m 是正整数, $u^m u_x$ 是对流项, $u_x u_{xx}$ 和 uu_{xxx} 是非线性色散项. 广义 DGH 方程包含了两类著名的可积方程: 当 $m = 1, a = 3$ 时 (1) 式转变为 DGH 方程, 该方程是在研究无粘浅层受地球重力和流体自身表面扩张影响的运动规律时获得的一类可积的浅水波方程; 当 $m = 1, a = 3, \gamma = 0$ 时 (1) 式转变为 CH 方程, 该方程是利用 Hamilton 方法得到的一类可积的非线性阻尼的新型浅水波方程^[10]. 田立新等^[11]证明了 DGH 方程光滑孤立波解的存在性

及其轨道稳定性, 在线性色散项系数 $\gamma = -2\omega$ 时, Hakkaev^[12]证明了 DGH 方程 peakon 解的存在性及其轨道稳定性. 本文作者研究了 CH 方程的尖峰孤立波解和紧孤立波解及其相关性^[13-15].

本文试图解决以下两个问题: 首先, DGH 方程的对流项强度 m 增强后, 方程 (1) 是否还能保持可积性; 其次, 在对流项强度及系统参数的不同取值下, 方程 (1) 是否会产生新的奇异孤立波解. 特别是, 当色散项系数 $\gamma \neq -2\omega$ 时 DGH 方程是否具有 peakon 解.

2. 广义 DGH 方程的 Painlevé 可积性分析

假设 u 展开为

$$u = \sum_{j=0}^{\infty} u_j \phi^{j+a}, \quad (2)$$

利用领头项分析得到

$$\alpha = -\frac{2}{m-1}, \quad (3)$$
$$u_0^{m-1} = \frac{\alpha(m+1)(m+2)}{\alpha(m-1)^2} \phi_x^2,$$

根据 WTC-Kruskal 方法^[16], α 只能取负整数, 从而 m 取 2 和 3.

下面将分别讨论以上两种情况:

* 国家自然科学基金 (批准号: 10771088)、江苏省博士后基金 (批准号: 0801028C) 和江苏大学高级人才专项基金 (批准号: 07JDC082) 资助的课题.

† E-mail: yjlujs@yahoo.com.cn

1) 当 $m=2$ 时, 将(2)和(3)式代入(1)式中, 得到 u_j 的递推关系

$$(j+1)u_{j+1} - 6u_j u_{j-1} = F_j(\phi_x, \phi_t, \dots, u_0, u_1, \dots, u_{j-1}), \quad (4)$$

其中 F_j 是系数 u_0, u_1, \dots, u_{j-1} 和 ϕ 各阶导数的函数(由于函数表达式很长, 这里就不再列出). 由(4)式可知, 共振点为 $j = -1, 6, 8$. 根据 Painlevé 分析, 如果在共振点处, 等式(4)能够自动满足, 那么(1)式就称为 Painlevé 可积方程. 在共振点 $j = -1$ 处, 对应于任意的奇性流形 $\phi(x, t) = 0$, 在共振点 $j = 6, 8$ 处, 则要求

$$F_6 = 0, F_8 = 0. \quad (5)$$

为了简化计算, 令

$$\phi = x + \psi(t), \quad (6)$$

其中 $\psi(t)$ 是 t 的任意函数. 将 $m=2$, 将(2)(3), (6)式代入(1)式中, 令 $\psi(t)$ 的不同幂次项系数为零, 能够得到

$$u_0 = \frac{24}{a},$$

$$u_1 = u_3 = u_5 = 0,$$

$$u_2 = -\frac{1}{3}\psi_t - \frac{1}{3}\gamma,$$

$$u_4 = \frac{1}{20}\psi_t - \frac{w}{10} - \frac{a}{180}\psi_t^2 - \frac{a\gamma}{90}\psi_t - \frac{a\gamma^2}{180},$$

$$u_7 = \frac{13a}{5760}\psi_u - \frac{a^2}{8640}\psi_t\psi_u - \frac{a^2\gamma}{8640}\psi_u.$$

将上式代入(4)式左边, 得到 $F_6 = 0, F_8 = 0$.

2) 当 $m=3$ 时, 利用上述方法能够得到方程(1)的共振点为 $j = -1, 4, 5$, 但在共振点 $j = 5$ 处 u_j 的递推关系不能自动满足, 即

$$F_5 = \psi_u(-32 + 6a\gamma\psi_t + 3a\psi_t^2 + 3a\gamma^2) \neq 0.$$

通过以上分析, 当 $m=2$ 时广义 DGH 方程能通过 Painlevé 检验, 当 $m=3$ 时广义 DGH 方程不能通过 Painlevé 检验.

3. 紧孤立波和尖峰孤立波

本节利用一个新的变量变换构造广义 DGH 方程($m=1$)的奇异孤立波解.

做行波变换 $\xi = x - ct$, 则 $m=1$ 时方程(1)转变为

$$(2\omega - c)u_\xi + auu_\xi + (c + \gamma)u_{3\xi} - 2u_\xi u_{2\xi} - uu_{3\xi} = 0. \quad (7)$$

引进一个新的变量 $\varphi = \varphi(\xi)$, 满足

$$\varphi' = \varepsilon \sqrt{c_0 + c_1\varphi + c_2\varphi^2}, \quad (8)$$

其中 $\varepsilon = \pm 1$, r 为正整数, c_0, c_1, c_2 为待定常数.

当 $c_0 = \frac{c_1^2}{4c_2}, c_2 > 0$ 时(8)式具有如下形式的解:

$$\varphi = -\frac{c_1}{2c_2} + \exp(\varepsilon\sqrt{c_2}\xi). \quad (9)$$

当 $c_0 = 0, c_2 < 0$ 时(8)式具有如下形式的解:

$$\varphi = -\frac{c_1}{2c_2} + \frac{\varepsilon c_1}{2c_2} \cos(\sqrt{-c_2}\xi). \quad (10)$$

令方程(7)的解可以展开为下列级数形式

$$u = a_0 + a_1\varphi + a_2\varphi^2, \quad (11)$$

其中 a_0, a_1, a_2 为待定常数. 将(11)和(8)式代入(7)

式中, 并令不同形式的 φ^i 和 $\varphi^i(\sum_{j=1}^2 c_j \varphi^j)^{\frac{1}{2}}$ 的系数为 0, 进而得到

$$\begin{aligned} & -c\varepsilon a_1 + 2\varepsilon\omega a_1 + \varepsilon a a_0 a_1 - 4\varepsilon^3 a_1 a_2 c_0 \\ & -\varepsilon^3 a_1^2 c_1 + 3c\varepsilon^3 a_2 c_1 + 3\gamma\varepsilon^3 a_2 c_1 \\ & -3\varepsilon^3 a_0 a_2 c_1 + c\varepsilon^3 a_1 c_2 \\ & + \gamma\varepsilon^3 a_1 c_2 - \varepsilon^3 a_0 a_1 c_2 = 0, \\ & \varepsilon a a_1^2 - 2c\varepsilon a_2 + 4\varepsilon\omega a_2 + 2\varepsilon a a_0 a_2 \\ & -8\varepsilon^3 a_2^2 c_0 - 11\varepsilon^3 a_1 a_2 c_1 - 3\varepsilon^3 a_1^2 c_2 \\ & + 8c\varepsilon^3 a_2 c_2 + 8\gamma\varepsilon^3 a_2 c_2 - 8\varepsilon^3 a_0 a_2 c_2 = 0, \\ & 3\varepsilon a a_1 a_2 - 15\varepsilon^3 a_2^2 c_1 - 21\varepsilon^3 a_1 a_2 c_2 = 0, \\ & 2\varepsilon a a_2^2 - 24\varepsilon^3 a_2^2 c_2 - 24\varepsilon^3 a_0 a_2 a_4 = 0. \end{aligned}$$

利用 Maple 软件并结合 $\varepsilon = \varepsilon^3 = \varepsilon^5$, 解上述方程组得

$$a_0 = \frac{3c - ac - 6\omega - a\gamma + 3a_1 c_1}{2a}, a_2 = 0, c_0 = \frac{3c_1^2}{4a},$$

$$c_2 = \frac{a}{3}, a_1, c_1 \text{ 为任意常数. 或 } a_0 =$$

$$\frac{3c - ac - 6\omega - a\gamma + 3a_1 c_1}{2a}, a_2 = c_0 = 0, c_2 = \frac{a}{3}, a_1,$$

c_1 为任意常数.

根据(10)和(11)式, 方程具有 peakon 解(见图 1),

$$u = \frac{3c - ac - 6\omega - a\gamma}{2a} + a_1 \exp\left(-\sqrt{\frac{a}{3}}|\xi|\right), \quad (12)$$

以及 compacton 解(见图 2),

$$u = \frac{3c - ac - 6\omega - a\gamma}{2a} \pm \frac{3a_1 c_1}{2a} \cos\left(-\sqrt{\frac{a}{3}}\xi\right), \quad (13)$$

其中 $|\xi| \leq \frac{\pi}{2}$, 而当 $|\xi| > \frac{\pi}{2}$ 时(13)式恒为常数

$$\frac{3c - ac - 6\omega - a\gamma}{2a}$$

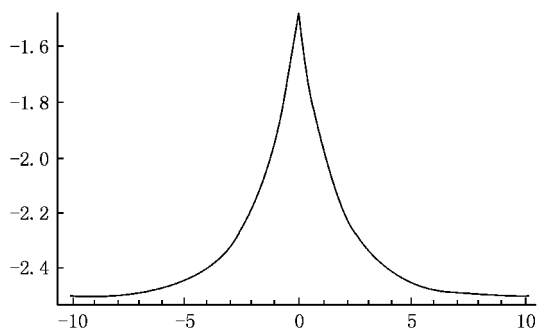


图 1 尖峰孤立波解 参数取 $a = c = \omega = \gamma = a_1 = 1, t = 0$

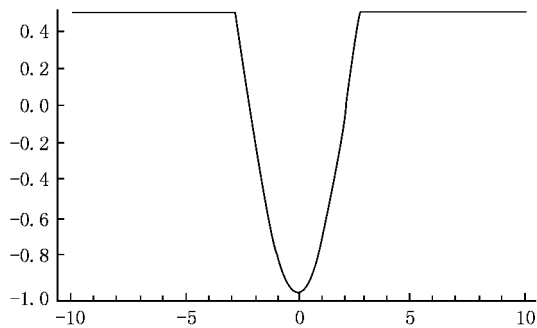


图 2 紧孤立波解 参数取 $a = -1, c = \omega = \gamma = a_1 = 1, t = 0$

参数 a 的符号对解的形式有重要影响: 当 $a > 0$ 时, 方程 (1) 具有 peakon 解; 当 $a < 0$ 时, 方程 (1) 具有另一种形式的奇异孤立波即 compacton 解. 线性色散项系数 $\gamma \neq -2\omega$ 时, DGH 方程具有 peakon 解. 当 $x \rightarrow \infty$ 时, 该解衰减为非零常数 $\omega + \frac{\gamma}{2}$. 当 $\gamma \rightarrow -2\omega$ 时, 方程具有衰减为零的 peakon 解, 这和文献 [12] 中的结论是一致的.

4. 新型奇异孤立波

本节将利用的 auto-Backlund 变换构造广义 DGH 方程 ($m > 1$) 新型奇异孤立波解.

根据 Painlevé 截尾展开法并结合第二节中的结论, 假设方程 (1) 的解为

$$u = u_0 \phi^\alpha + u_1 \phi^{\alpha+1} + \dots + u_{-\alpha-1} \phi + u_{-\alpha} \quad (14)$$

其中 $\alpha = -\frac{2}{m-1}$ (要求为负整数), 则 m 取 2 和 3.

1) 当 $m = 2$ 时, 得到 $\alpha = -2$, 则 (14) 式为

$$u = u_0 \phi^{-2} + u_1 \phi^{-1} + u_2. \quad (15)$$

利用 Maple 软件, 将 (15) 式代入方程 (1) 中, 令 ϕ^{-6} , ϕ^{-7} 及 ϕ^0 的系数为零, 发现 u_2 恰好是方程的解, 且有

$$u_0 = \frac{24}{a} \phi_x^2, u_1 = -\frac{24}{a} \phi_{x \, x \, x}. \quad (16)$$

若再令 $\phi^{-1}, \phi^{-2}, \phi^{-3}, \phi^{-4}$ 以及 ϕ^{-5} 的系数为零, 则得到 ϕ 满足下列式子 (只列出其中一部分)

$$\begin{aligned} & -2au_2 u_{2 \, x} \phi_{x \, x \, x} - \phi_{x \, x \, x \, t} + u_{2 \, x \, x} \phi_{x \, x \, x} \\ & -2\omega \phi_{x \, x \, x \, x} - au_2^2 \phi_{x \, x \, x \, x} \\ & + 2u_{2 \, x \, x} \phi_{x \, x \, x \, x} + 2u_{2 \, x} \phi_{x \, x \, x \, x \, x} + \phi_{x \, x \, x \, x \, x \, t} \\ & - \gamma \phi_{x \, x \, x \, x \, x \, x} + u_2 \phi_{x \, x \, x \, x \, x \, x} = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

将 (16) 式代入 (15) 式, 则方程的 auto-Backlund 变换为

$$u = \frac{24\phi_x^2}{a\phi^2} - \frac{24\phi_{x \, x \, x}}{a\phi} + u_2, \quad (18)$$

其中 ϕ 满足 (17) 式, u_2 是 $m = 2$ 时方程 (1) 的一个解. 利用该变换可以构造孤立波解甚至一些新解. 假设 $u = u_0$ (常数) 是 $m = 2$ 时方程 (1) 的一个特解, 代入 (17) 式得到

$$\begin{aligned} & -2\omega \phi_{x \, x \, x \, x} - au_0^2 \phi_{x \, x \, x \, x} + \phi_{x \, x \, x \, x \, t} \\ & - \gamma \phi_{x \, x \, x \, x \, x \, x} + u_0 \phi_{x \, x \, x \, x \, x \, x} = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

观察 (19) 式, 假设 $\phi(x, t)$ 具有如下形式的解:

$$\phi = c_0 + c_1 \exp(k(x - \lambda t)), \quad (20)$$

其中 $c_0 \neq 0, c_1 \neq 0, k, \lambda$ 是待定常数. (20) 式是 (19) 式的解当且仅当 k, λ 满足条件

$$\begin{aligned} k &= \pm \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{av_0}{3} - \frac{1}{6}\Delta}, \\ \lambda &= \frac{3}{a} - \gamma - v_0 - \frac{\Delta}{a}, \end{aligned} \quad (21)$$

或

$$\begin{aligned} k &= \pm \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{av_0}{3} - \frac{1}{6}\Delta}, \\ \lambda &= \frac{3}{a} - \gamma - v_0 + \frac{\Delta}{a}, \end{aligned} \quad (22)$$

其中 $\Delta = \sqrt{9 - 12a\omega - 6a\gamma - 6av_0 - 2a^2 v_0^2}$. (23) 利用 (18), (20)–(23) 式, 得到 $m = 2$ 时广义 DGH 方程的孤立波解为

$$u = -\frac{24c_0 c_1 k^2 \exp(k(x - \lambda t))}{a(c_0 + c_1 \exp(k(x - \lambda t)))^2} + v_0. \quad (24)$$

考虑到 k 为正负号, 利用类似 peakon 的定义方法, 可以得到

$$u = -\frac{24c_0c_1k^2\exp(-|k(x-\lambda t)|)}{a(c_0+c_1\exp(-|k(x-\lambda t)|))^{3/2}} + v_0. \quad (25)$$

通过分析 c_0, c_1 不同的取值,可以得到如下(25)式丰富的孤立波解(以系数满足(21+)为例):

a) 当 $c_0 = c_1$ 时(25)式描述了光滑的孤立波解(见图3).

b) 当 $c_0 = -c_1$ 时(25)式描述了带爆破点的孤立波解(见图4).

c) 当 $|c_0| \neq |c_1|$ 且同号时(25)式描述了带尖点的双孤立波解(见图5),这是一类新型 peakon 解.

d) 当 $|c_0| \neq |c_1|$ 且异号时(25)式描述了带爆破点的双孤立波解(见图6),这是一类新型孤立波解.

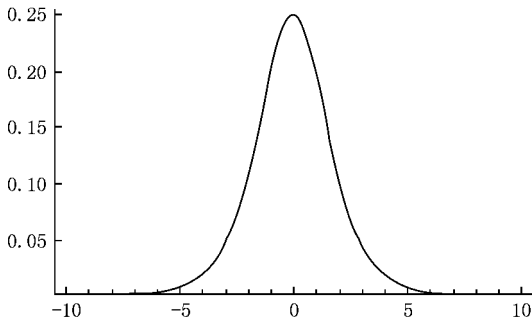


图3 光滑孤立波 参数取 $c_0 = c_1 = 1, a = \omega = 1, \gamma = -1, v_0 = 0, t = 0$

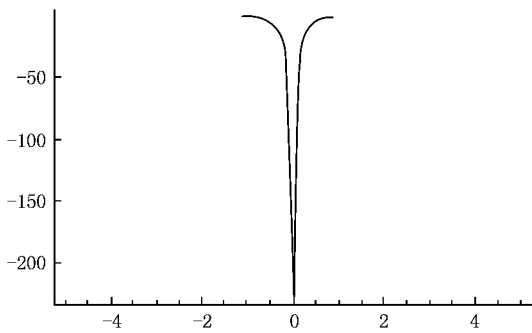


图4 带爆破点的孤立波 参数取 $c_0 = 1, c_1 = -1, a = \omega = 1, \gamma = -1, v_0 = 0, t = 0$

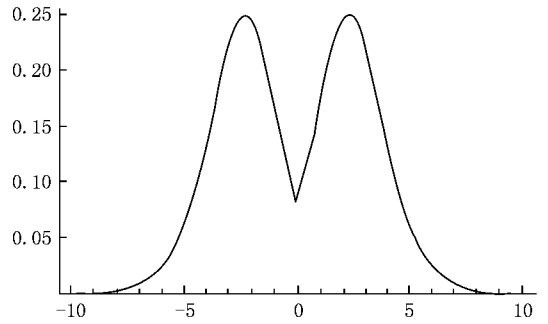


图5 带尖点的双孤立波 参数取 $c_0 = 1, c_1 = 5, a = \omega = 1, \gamma = -1, v_0 = 0, t = 0$

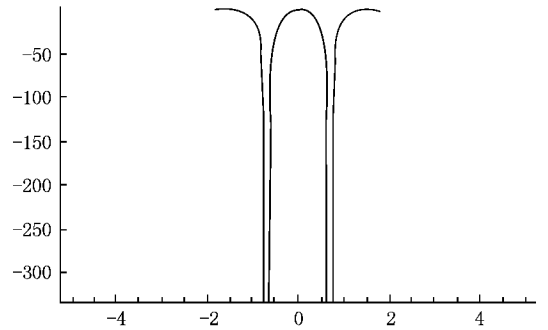


图6 带爆破点的双孤立波 参数取 $c_0 = 1, c_1 = -5, a = \omega = 1, \gamma = -1, v_0 = 0$

其中 $u_0 = \pm\sqrt{\frac{10}{a}}\phi_x, u_1$ 是 $m = 3$ 时广义 DGH 方程的一个解.利用上述方法可以得到当 $m = 3$ 时方程(1)具有光滑孤立波解,这里就不再叙述.

5. 结 论

非线性色散项和对流项的结合使广义 DGH 方程产生奇妙结构.当 $m = 0, a = 3$ 时方程(1)是可积的^[16],当 $m = 2$ 时方程(1)是一个新的可积方程.广义 DGH 方程具有丰富的奇异孤立波解结构,如紧孤立波、尖峰孤立波、新型带尖点的双孤立波和带爆破点的双孤立波等.在进一步的研究中,本文作者借助对孤立波解几何特性的定性分析,广义 DGH 方程中更多奇妙的孤立波结构将被发现.

2) 当 $m = 3$ 时,同样可以得到方程(1)的 auto-Backlund 变换

$$u = u_0\phi^{-1} + u_1, \quad (26)$$

- [1] Rosenau P , Hyman M 1993 *Phys. Rev. Lett.* **70** 564
- [2] Camassa R , Holm D 1993 *Phys. Rev. Lett.* **71** 1661
- [3] Tian L X , Yin J L 2007 *Chaos Soliton. Fract.* **2** 143
- [4] Yin J L , Tian L X 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2821 (in Chinese)
[殷久利、田立新 2004 物理学报 **53** 2821]
- [5] Lu D C , Yang G J 2007 *International Journal of Nonlinear Science* **4** 31
- [6] Guo B L , Liu Z R 2005 *Chaos Soliton. Fract.* **23** 1451
- [7] Ma Z Y 2007 *Chin. Phys.* **16** 1848
- [8] Dai C Q , Zhou G Q 2007 *Chin. Phys.* **16** 1201
- [9] Ma Z Y , Zheng C L 2006 *Chin. Phys.* **15** 45
- [10] Dullin H R , Gottwald G , Holm D D 2001 *Phys. Rev. Lett.* **87** 1945
- [11] Tian L X , Gui G L , Liu L 2005 *Commun. Math. Phys.* **257** 667
- [12] Hakkaev S 2006 *Phys. Lett. A* **354** 137
- [13] Zhou J B , Tian L X 2008 *Phys. Lett. A* **372** 3659
- [14] Tian L X , Yin J L 2004 *Chaos Soliton. Fract.* **20** 289
- [15] Tian L X , Song X Y 2004 *Chaos Soliton. Fract.* **19** 621
- [16] Yan Z Y 2003 *Phys. A* **326** 344

New exotic solitary waves in one type of nonlinear dispersive equations^{*}

Yin Jiu-Li[†] Tian Li-Xin

(*Nonlinear Scientific Research Center , Jiangsu University , Zhenjiang 212013 , China*)

(Received 17 June 2008 ; revised manuscript received 31 October 2008)

Abstract

New exotic solitary wave and the painlevé integrability of one type of the nonlinear dispersive generalized DGH equation are studied. By Painlevé analysis , we discover that the nonlinear dispersive generalized DGH equation with $m = 2$ is integrable , which is a new integrable equation. By the new variable transformation and the auto-Backlund transformation , we obtain abundant exotic solitary wave solutions , such as compactons , peakons , new double solitary waves with peak points , and double solitary waves with blow-up points.

Keywords : nonlinear dispersive equation , integrability , exotic solitary wave

PACC : 0340 , 0290

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10771088) , the Post-doctoral Fundation of Jiangsu Province , China (Grant No.0801028C) , and the Specialized Foundation for the High-Level Talents of Jiangsu university , China(Grant No.07JDG082).

[†] E-mail : yjluj@s@yahoo.com.cn