

混沌吸引子的对称破缺激变^{*}

张莹^{1)†} 雷佑铭¹⁾ 方同²⁾

1) 西北工业大学理学院, 西安 710072)

2) 西北工业大学力学与土木建筑学院, 西安 710072)

(2008 年 3 月 14 日收到, 2008 年 7 月 11 日收到修改稿)

许多非线性动力系统都有某种对称性, 在不同情形下可有不同的表现形式, 但始终保持其对称的特点. 不同对称形式间的转变导致对称破缺分岔或激变. 关于非线性动力系统中相空间运动轨道的对称破缺分岔, 已有大量研究工作, 但绝大多数是指周期或拟周期相轨的对称破缺, 偶尔提到对称系统中的混沌相轨也存在“对偶性”. 最近, 在简谐外激 Duffing 系统周期轨道对称破缺引发鞍-结分岔的研究中, 得到了分岔后由 Poincaré 映射点间断流构成的图像, 其中包括两个稳定周期结点、一个周期鞍点, 及其稳定流形与不稳定流形, 均较规则. 本工作研究了正弦参激 Duffing 系统共存的周期与混沌吸引子, 及其在初始平面上中心对称分形吸引域的错综复杂图像; 并定性探索其邻近发生的对称破缺激变, 这些结果正是上述研究的延拓和补充.

关键词: 对称破缺, 混沌, 激变, 分形吸引域

PACC: 0547

1. 引言

关于非线性动力系统中相空间运动轨道的对称破缺分岔, 已有大量文献报道^[1-11], 绝大多数指的是周期(或拟周期)相轨的对称破缺, 偶尔提到对称系统中的混沌相轨, 也存在“对偶性”^[11], 但未能给人深刻的印象. 最近, 我们发表了关于周期解对称破缺分岔后, 即 Poincaré 截面上发生周期鞍-结分岔后, 得到了由映像点间断流构成的图像^[12]. 但这一工作只局限于周期相轨的对称破缺现象. 由此而得的鞍点的稳定流形与不稳定流形都还是比较规则的. 本文将通过实例分析, 来考察非线性动力系统中共存的周期吸引子与混沌吸引子在发生对称破缺分岔与对称破缺激变(Crisis, 实质上也是一种分岔)后, 在初始条件平面上它们的原点对称分形吸引域所构成的错综复杂图像. 与此同时, 对相应分岔参数附近前后发生的混沌激变作一些定性探讨.

2. 简谐参激双势阱 Duffing 系统中的混沌演化

现考察双势阱 Duffing 系统在简谐参激情形下混沌吸引子的对称破缺. 设系统的势函数 $V(x)$ 可表示为

$$V = -(a/2)x^2 + (b/4)x^4,$$

从而其运动微分方程可表示为

$$\ddot{x} + c\dot{x} - ax + bx^3 = \mu x \sin \Omega t \quad (c > 0), \quad (1)$$

式中 a, b, c 为正参数, μ 为参激强度, Ω 为参激频率. 假设 $c > 0$ 保证了系统(1)是耗散系统. 令 $\dot{x} = y$, 方程(1)可改写为

$$\dot{x} = y, \quad (2a)$$

$$\dot{y} = ax - bx^3 - cy + \mu x \sin \Omega t, \quad (2b)$$

可见系统(2)是对称于坐标原点(0,0)的, 也就是说, 如果 $f(x, y, t)$ 是方程(2)的解, 那么, 和它一起对称于原点的 $f(-x, -y, t)$ 也是方程(2)的解. 另外, 原点(0,0)永远是系统(2)的奇点. 本算例中系统(2)的参数取定为

$$a = b = 1.0, c = 0.2, \Omega = 1.0,$$

^{*} 西北工业大学博士论文创新基金(批准号: CX200712)资助的课题.

[†] E-mail: yingzhang1031@gmail.com

而 μ 作为分岔参数, 根据情况需要选定. 然后进行数值仿真, 搜索系统的稳态吸引子, 包括混沌吸引子以及与其共存的周期吸引子. 所得结果见图 1(a)—

(f). 图 1 分别是在所考察的区域内取 100 个初始点出发积分, 去掉瞬态过程后得到的稳态响应. 由图可见, 它在一定程度上体现了混沌吸引子的遍历性.

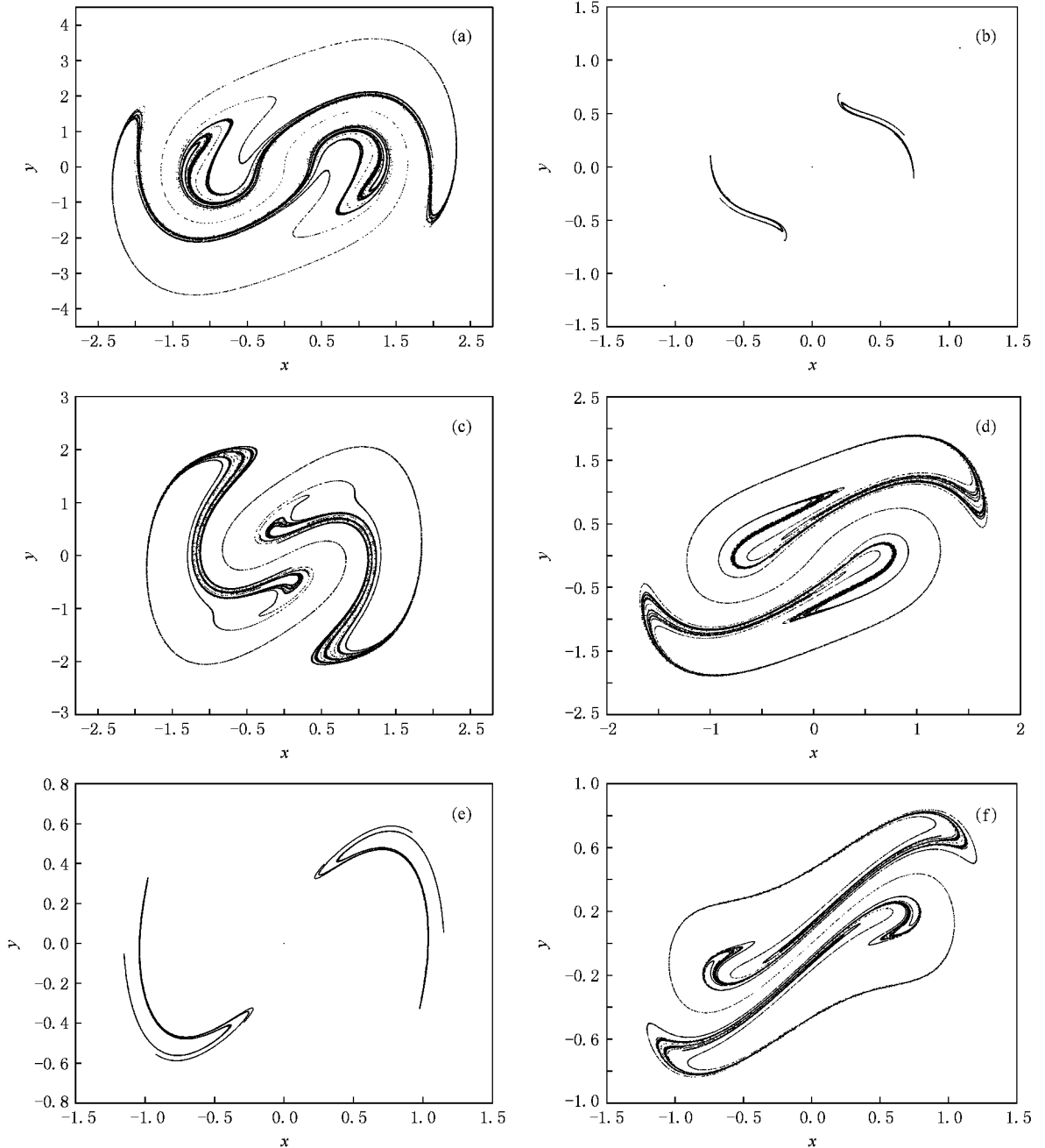


图 1 $\Omega = 1.0$ 时, 系统 2 稳态吸引子随 μ 的变化 (a) $\mu = 6.5$ (b) $\mu = 5.0$ (c) $\mu = 3.8$ (d) $\mu = 2.5$ (e) $\mu = 1.0$ (f) $\mu = 0.5$

纵观图 1 可见, 不论 μ 取何值, 也不论存在单个吸引子, 还是多个吸引子 (包括不同形式的共存吸引子) 的情形, 相图都保持有原点对称性; 但其表现形式有所不同. 这些不同形式的运动, 正是各种对称破缺分岔或对称破缺激变的结果. 也就是说, 当 μ 在 6.5—5.0 或 5.0—3.8 的变化过程中, 必然发生

过 (也许不止一次) 对称破缺分岔或激变.

本文旨在研究系统当 $\mu = 5.0$ 时的共存稳态吸引子, 及其相应的吸引域分布. 因为它是一种典型的共存情形. 但与此同时, 还得适当探讨在此附近前后发生过哪些分岔或激变. 为此, 考察当 $4.9 \leq \mu \leq 5.2$ 时, 系统 2 的最大 Lyapunov 指数 (TLE) 随 μ 的变化

如图 3(a) 所示. 图中实线对应于初值条件为 $x = 0.9, y = 3.0$ 的运动, 虚线对应于初值条件为 $x = 1.0, y =$

1.0 的运动. 计算中, 每个参数点的 TLE 所花总时间为 $t = 10^6 \times 0.01 = 10000$, 参数 μ 的步长取为 0.001.

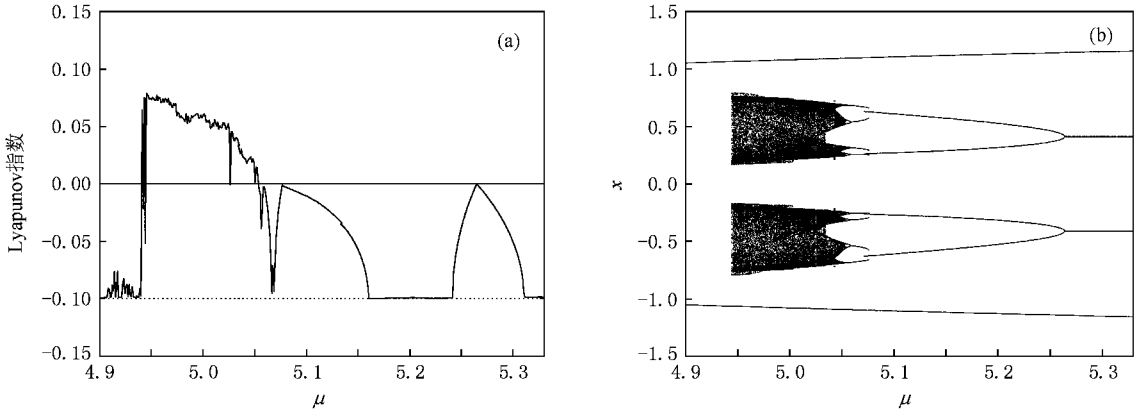


图 2 $\Omega = 1.0$ 时, 系统(2)随分岔参数 μ 演化的 (a) Lyapunov 指数图 (b) 分岔图

从图 2 所示系统 TLE 图和分岔图的演化看来, 对应于正的 TLE 的参数区间为混沌区, 对应于负的 TLE 的参数区间为非混沌运动区. 作为普遍规律, TLE 取零值处将发生分岔或激变. 初步查明, 在 $\mu \approx 4.945$ 发生的激变是由瞬态混沌转化为稳态混沌的一种质变. 当 $\mu = 4.94$ 时, 如图 3(a) 和 (b) 所示, 系

统存在瞬态混沌运动; 随着 μ 的增加而不断演变, 当 μ 增加到 4.95 时, 系统已经进入稳态混沌运动, 如图 3(c) 和 (d) 所示. 而在 $\mu \approx 5.05$ 附近系统将通过 $(1/2)$ 倍周期分岔退出混沌, 见图 4 所示一系列 Poincaré 图.

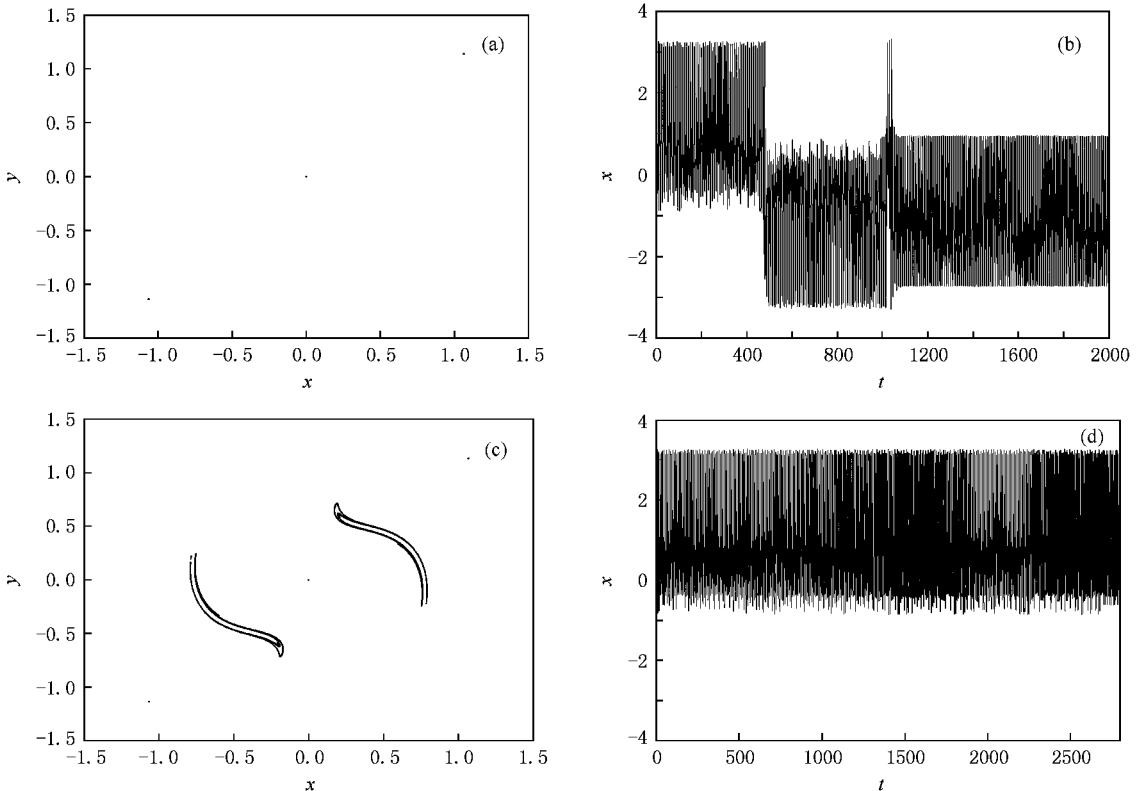


图 3 $\Omega = 1.0$ 时, 系统(2)当 $\mu = 4.94$ 时的 Poincaré 截面图 (a) 和时间历程图 (b) 及 $\mu = 4.95$ 时的 Poincaré 截面图 (c) 和时间历程图 (d)

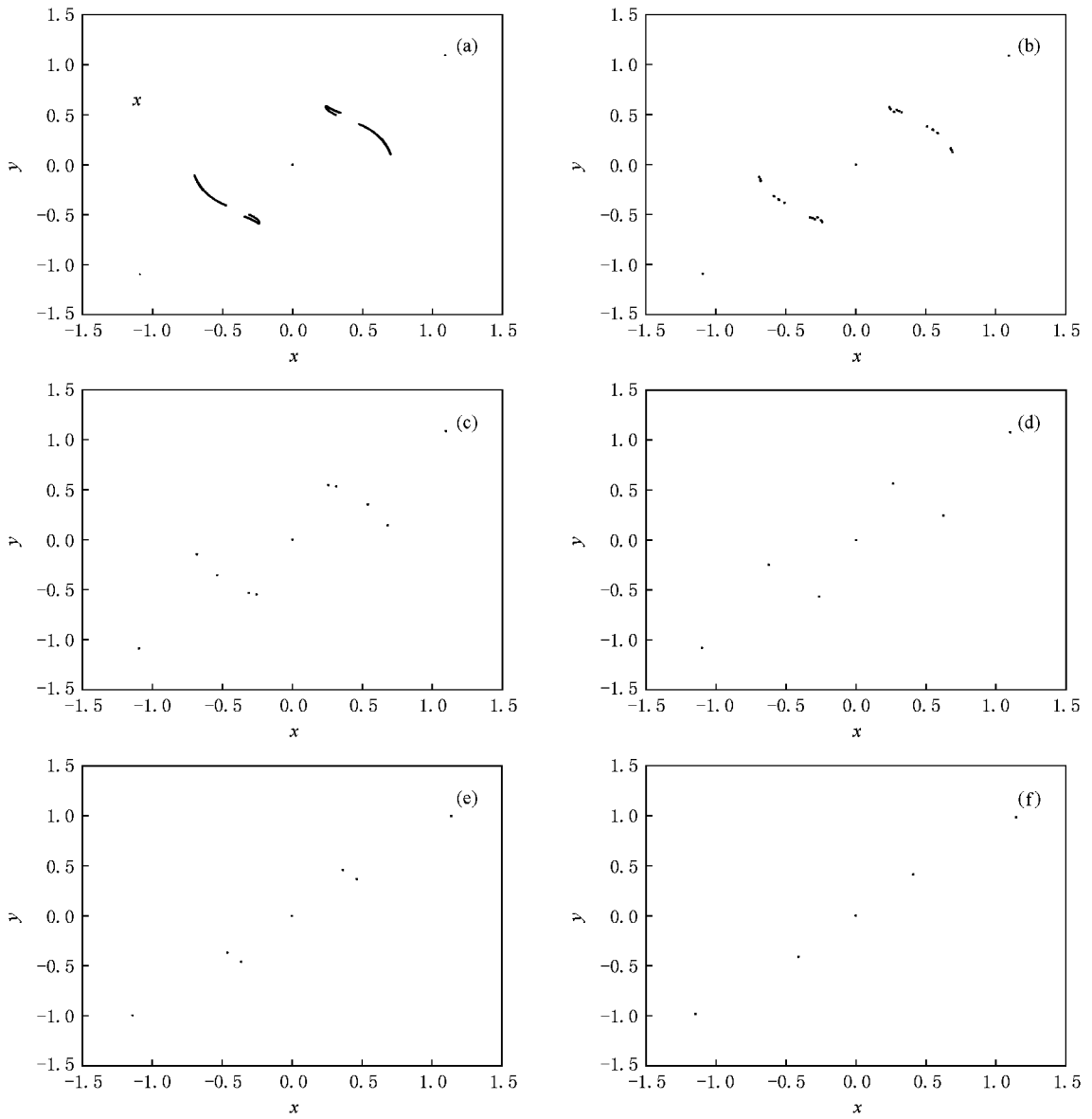


图 4 $\Omega = 1.0$ 时,系统 (2) 取不同 μ 值时的 Poincaré 截面图 (a) $\mu = 5.04$ (b) $\mu = 5.05$ (c) $\mu = 5.06$ (d) $\mu = 5.08$ (e) $\mu = 5.25$ (f) $\mu = 5.28$

3. 对称破缺分岔与激变后由分形吸引域构成的对称图形

考察图 1(b) 所示 $\mu = 5.0$ 时的情形. 这时, 系统 (2) 共存有对称于原点的两个周期吸引子和两个混沌吸引子, 它们是此前发生的对称破缺分岔与对称破缺激变遗留下来的. 其中, 对应于混沌吸引子的 TLE 为 $+0.061$; 对应于周期吸引子的 TLE 为 -0.099 . 借助于点映射法, 即可观察到它们各自对应的吸引域.

在对应于初始时刻的相平面适当区域内均匀地选取一系列初始点, 分别开始进行数值积分, 根据映射点的各自归宿, 即可确定它所属的吸引域. 搜索结果归纳为图 5—图 8 (横坐标为 x , 纵坐标为 y).

图 5(a)(b) 分别表示左下方与右上方周期吸引子的吸引域. 为了便于参照, 图中分别以灰色“.”标识周期吸引子; 灰色“飞天”图形标识混沌吸引子.

图 6(a)(b) 分别表示左下方与右上方混沌吸引子的吸引域. 为了便于参照, 图中灰色部分与图 5 相同.

图 7 是图 5 与图 6 的叠加, 其中已不再标识任

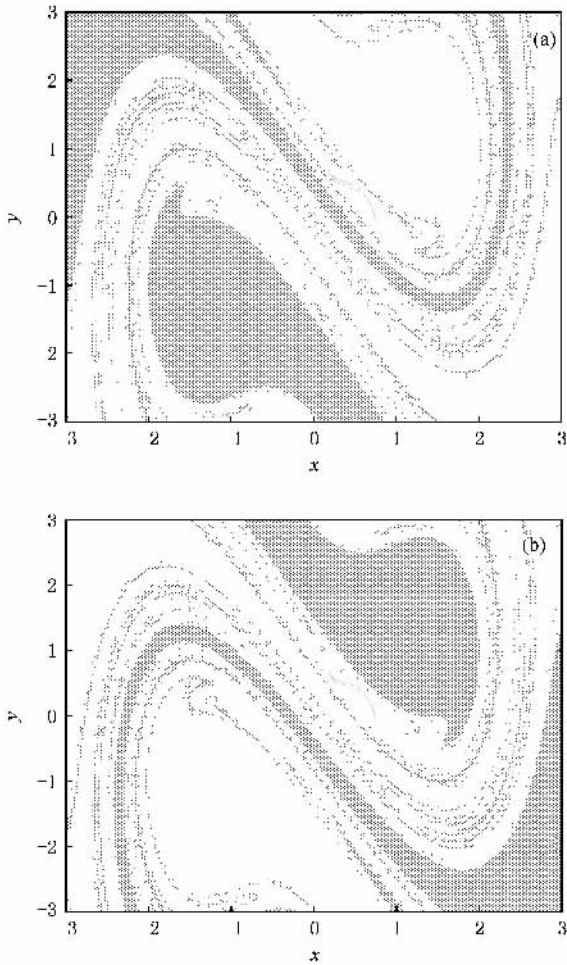


图5 $\Omega = 1.0$ 时,系统(2)在 $\mu = 5.0$ 时,周期吸引子的吸引域
(a)左下方周期吸引子的吸引域 (b)右上方周期吸引子的吸引域

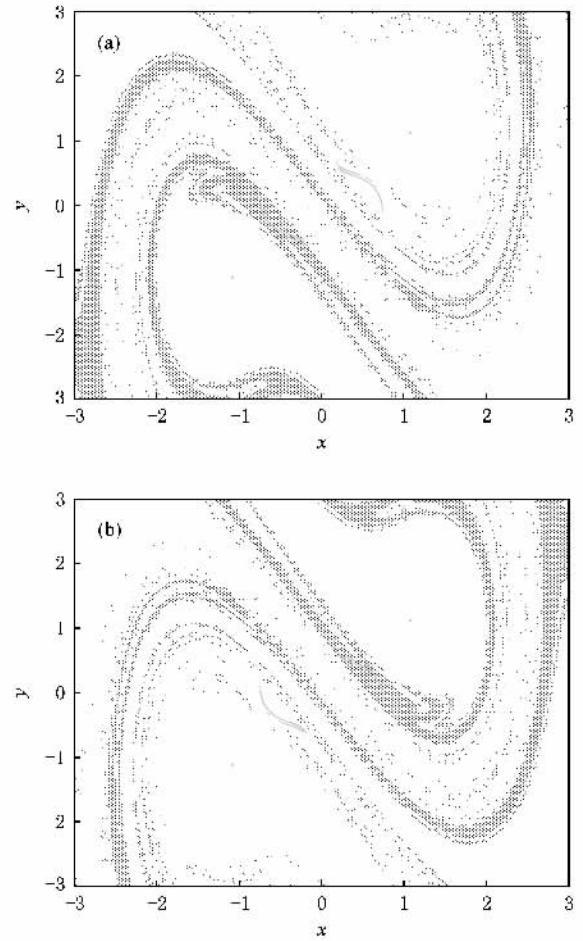


图6 $\Omega = 1.0$ 时,系统(2)在 $\mu = 5.0$ 时,混沌吸引子的吸引域
(a)左下方混沌吸引子的吸引域 (b)右上方混沌吸引子的吸引域

何吸引子,分别以黑色、白色、浅灰、深灰4种不同的颜色表示左下方周期、右上方周期、左下方混沌、右上方混沌4种不同吸引子的吸引域.图7可看作吸引域的核心部分,图8给出更大范围内的吸引域,其表示方式与图7相同.

从图5—图8不难得到以下印象:

- 1)相关吸引子连同它们的吸引域都是成对出现的,且都是原点对称的.
- 2)在周期与混沌运动共存的情形下,不仅混沌吸引域是分形的,而且周期吸引域也是分形的.这一现象是单纯出现单个或多个周期运动情形下所没有的.混沌吸引子、混沌吸引域及其边界和分形有着不可分割的联系,这是人们普遍意识到的事实^[13],本例显示,周期吸引子的吸引域也出现了分形,这是因为它和混沌吸引域的“并”应该是(整数)形的.
- 3)从图7与图8可见,各个吸引域之间并无明显的、规则的分界线,只有一种各方杂居的分形隔离

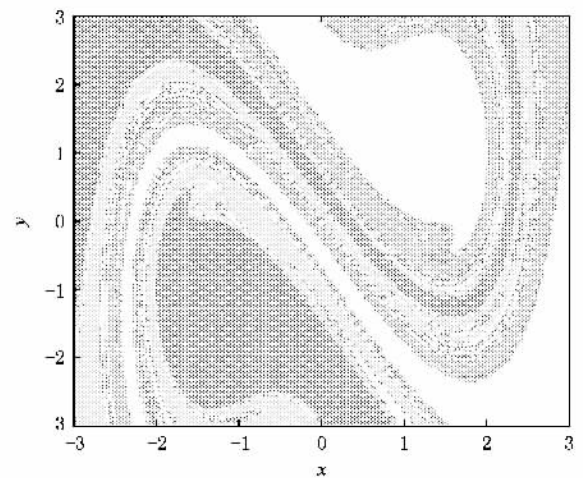


图7 $\Omega = 1.0$ 时,系统(2)当 $\mu = 5.0$ 时,综合吸引域的核心部分
黑色:左下方周期吸引域;白色:右上方周期吸引域;浅灰色:左下方混沌吸引域;深灰色:右上方混沌吸引域

带.大范围的图8与核心部分图7相比,可以更清楚

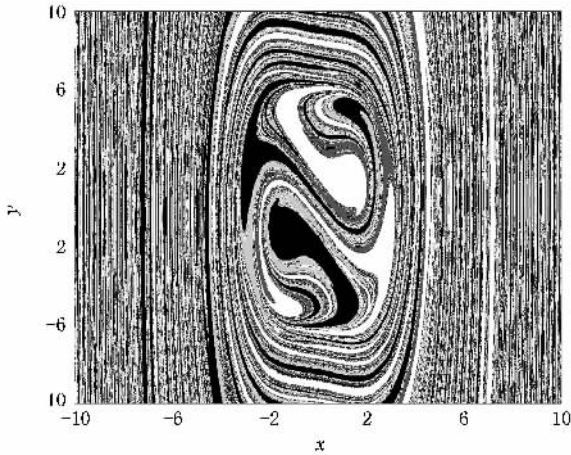


图 8 $\Omega = 1.0$ 时, 系统(2)当 $\mu = 5.0$ 时, 大范围综合吸引域: 黑色: 左下方周期吸引域; 白色: 右上方周期吸引域; 浅灰色: 左下方混沌吸引域; 深灰色: 右上方混沌吸引域

地看到在外围各个吸引域之间相互缠绕、相互渗透的情景。

4) 根据图 8 中所采用的数据统计, 周期吸引域

所占比例为 67.69%, 混沌吸引域所占比例为 32.31%; 且左右周期吸引子的吸引域所占比例相同, 左右混沌吸引子的吸引域所占比例也相同。可见系统在 $\mu = 5.0$ 的情形下, 出现周期运动的概率远比出现混沌运动的大。

4. 结 论

虽然关于对称非线性动力系统中周期相轨的对称破缺分岔已有大量报道, 但关于混沌吸引子的对称破缺激变, 以及激变后混沌吸引子及其吸引域所发生的变化鲜有报道。本文关于简谐参激的双势阱 Duffing 系统在发生对称破缺分岔与激变后, 周期与混沌吸引子共存的情形下, 给出了初始条件平面上共存吸引子的原点对称分形吸引域构成的复杂图像。与此同时, 合理地解释了在此附近前后发生的混沌激变。这也算是对有关文献的一个补充。

[1] Fang T, Dowell E H 1987 *Int. J. Nonlinear Mech.* **22** 401
 [2] Iooss G, Joseph D D 1980 *Elementary Stability and Bifurcation Theory* (New York: Springer-Verlag)
 [3] Sunner T, Sauermann H 1993 *Int. J. Bifurcat. Chaos* **3** 399
 [4] Xu J X, Jiang J 1996 *Chaos Soliton. Fract.* **7** 3
 [5] Chen Y H, Xu J X, Fang T 2001 *Nonlinear Dynamics* **24** 231
 [6] Bishop S R, Soroniou A, Shi P 2005 *Chaos Soliton. Fract.* **25** 257
 [7] Gaeta G 1990 *Physics Reports* **189** 1

[8] Gaeta G 1991 *Nonlinear Analysis* **17** 825
 [9] Ge Z M, Chen H H 1997 *J. Sound Vibration* **200** 121
 [10] Mann B P, Koplou M A 2006 *Nonlinear Dynamics* **46** 427
 [11] Ma S J, Xu W, Jin Y F, Li W, Fang T 2007 *Comm. Nonlinear Sci. Numer. Simu.* **12** 366
 [12] Fang T, Zhang Y 2008 *Chin. Phys. Lett.* **25** 2809
 [13] Tyrkiel E 2005 *Int. J. Bifurcat. Chaos* **15** 1215



Symmetry breaking crisis of chaotic attractors ^{*}

Zhang Ying^{1)†} Lei You-Ming¹⁾ Fang Tong²⁾

¹ *School of Science ,Northwestern Polytechnical University ,Xi'an 710072 ,China)*

² *School of Mechanics ,Civil Engineering & Architecture ,Northwestern Polytechnical University ,Xi'an 710072 ,China)*

(Received 14 March 2008 ; revised manuscript received 11 July 2008)

Abstract

Most nonlinear dynamic systems may exhibit a certain symmetrical form. Symmetry is a kind of invariance ,maybe appearing in different topological forms under different situations ,but always keeping the characteristic of symmetry. The transition between different symmetric forms often leads to symmetry breaking bifurcation or crisis. Many studies on symmetry breaking bifurcations of phase trajectories of a nonlinear dynamical system have been reported ,most of which are related to periodic or quasi-periodic orbits. Only a few of them ever mentioned that “ duality ” might also exist for a couple of chaotic attractors in symmetrical nonlinear dynamical systems. Recently ,in the study of the saddle-node bifurcation resulting from symmetry breaking of periodic phase orbits in a Duffing oscillator driven by a sinusoidal excitation ,an interesting phase portrait of the flow pattern of discrete Poincaré mapping points has been obtained after symmetry breaking bifurcation. Along with the flow pattern ,two stable periodic nodes and one periodic saddle ,together with its stable and unstable manifolds ,are shown ,which are all in a regular form yet. In this study , as an extension of the above results ,a complicated portrait for attractive basins of coexisting periodic and chaotic attractors in a parametrically driven double-well Duffing system is obtained ,which is fractal ,interwoven ,yet symmetrical. In addition ,the neighboring symmetry breaking crises are studied qualitatively.

Keywords : symmetry breaking , chaos , crisis , fractal attractive basin

PACC : 0547

^{*} Project supported by the Doctorate Creation Foundation of Northwestern Polytechnical University , China (Grant No. CX200712).

[†] E-mail : yingzhang1031@gmail.com