

一类相对转动系统 Hopf 分岔的非线性反馈控制*

刘 爽^{1)†} 刘 彬²⁾ 时培明²⁾

1) 燕山大学工业计算机控制工程河北省重点实验室, 秦皇岛 066004)

2) 燕山大学电气工程学院, 秦皇岛 066004)

(2008 年 10 月 27 日收到, 2008 年 11 月 15 日收到修改稿)

研究一类非线性摩擦阻尼力作用下的相对转动系统的 Hopf 分岔现象, 给出系统产生 Hopf 分岔的充要条件, 提出一种非线性反馈控制方法对系统的 Hopf 分岔点进行转移, 并控制极限环的稳定性和幅值, 数值模拟说明该方法对一类相对转动系统的 Hopf 分岔控制是有效的.

关键词: 相对转动, 非线性反馈控制, Hopf 分岔, 极限环

PACC: 0340D, 0547

1. 引 言

相对转动系统的动力学行为研究已成为近代物理学的重要研究领域, 为适应转动系统的研究需要, Carmeli^[1, 2]于 1985 年在相对论力学基础上提出转动相对论力学理论, 1996 年罗绍凯^[3-5]又建立了转动系统的相对论分析力学理论, 并给出了相对论转动力学系统的 Noether 理论. 转动相对论分析力学^[3-8]的研究发展了相对论力学, 并在 Birkhoff 动力系统的基本理论及其几何结构, 通用性积分复杂动力学方程问题、积分的场方法、非等时变分特性和非完整系统的对称性与守恒量等领域取得了成果^[9-22]. 基于相对性原理, 建立了弹性转轴任意两截面间的相对转动线性和非线性动力学方程并进行了定性和定量分析^[23-28], 研究了非线性恢复力和阻尼力作用下相对转动系统的动力学特性^[29-32], 分析了非线性相对转动系统的闭轨分岔及混沌运动^[29, 33].

非线性相对转动系统具有复杂的动力学行为, 本文基于 Lagrange 方程建立一类含非线性摩擦阻尼的相对转动系统的动力学方程, 分析该系统的稳定性, 给出系统发生 Hopf 分岔的充要条件, 与文献^[34]不同, 构造非线性反馈控制器对系统的 Hopf 分岔点进行转移, 并实现极限环的稳定性和幅值的控制, 这对工程中广泛存在的弹性力传动系统的设计

与控制具有一定指导意义.

2. 系统的非线性动力学方程

相对转动系统是工程中广泛存在的动力传递系统, 对于两质量相对转动系统而言, 系统的动能为

$$E = \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2} J_i \dot{\varphi}_i^2 = \frac{1}{2} J_1 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\varphi}_2^2, \quad (1)$$

系统势能为

$$U = \frac{1}{2} K (\varphi_1 - \varphi_2)^2, \quad (2)$$

系统 Lagrange 函数 L 和耗散函数 F 分别为

$$L = E - U = \frac{1}{2} J_1 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\varphi}_2^2 - \frac{1}{2} K (\varphi_1 - \varphi_2)^2, \quad (3)$$

$$F = \frac{1}{2} C (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2)^2, \quad (4)$$

广义力矩为

$$Q_i = \sum_{j=1}^2 T_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial q_i} \quad (j = 1, 2), \quad (5)$$

式中 J_i ($i = 1, 2$) 为系统集中质量的转动惯量, K 为系统扭转刚度, C 为系统结构阻尼, φ_i ($i = 1, 2$), $\dot{\varphi}_i$ ($i = 1, 2$) 分别为系统集中质量的转角和转速, q_j ($j = 1, 2$) 为广义坐标. 在此考虑负载端的非线性摩擦阻尼力对系统动力学行为的影响, 即 $T_2^* = T_2 +$

* 国家十一五重大科技攻关项目(批准号: 2007BAF02B10)和河北省自然科学基金(批准号: F200800882)资助的课题.

† E-mail: shliu@ysu.edu.cn

$f(\dot{\varphi}_2)$ 将 (3) (4) 和 (5) 式代入含耗散项的 Lagrange 方程

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} = Q_i,$$

得

$$\begin{aligned} J_1 \ddot{\varphi}_1 + \alpha (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) + K(\varphi_1 - \varphi_2) &= T_1, \\ J_2 \ddot{\varphi}_2 - \alpha (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) \\ - K(\varphi_1 - \varphi_2) &= T_2 + f(\dot{\varphi}_2). \end{aligned} \quad (6)$$

方程 (6) 是负载端在广义非线性摩擦阻尼力作用下的两质量相对转动系统的动力学普遍方程, 是工程中描述转动动力传输性态的基本方程, 也是进一步研究系统动态特性的基础.

3. 相对转动系统的 Hopf 分岔

针对广泛存在的一类非线性滑动摩擦的情形^[35] 研究两质量相对转动非线性系统的稳定性与 Hopf 分岔. 令

$$f(\dot{\varphi}_2) = \alpha + \beta \dot{\varphi}_2 + \gamma \dot{\varphi}_2^2, \quad (7)$$

式中 α, β, γ 为系数. 将 (7) 式代入 (6) 式得

$$\begin{aligned} J_1 \ddot{\varphi}_1 + \alpha (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) + K(\varphi_1 - \varphi_2) &= T_1, \\ J_2 \ddot{\varphi}_2 - C \dot{\varphi}_1 + (C - \beta) \dot{\varphi}_2 - \gamma \dot{\varphi}_2^2 \\ - K(\varphi_1 - \varphi_2) &= T_2 + \alpha. \end{aligned} \quad (8)$$

令 $y_1 = \varphi_1 - \varphi_2, y_2 = \dot{\varphi}_1, y_3 = \dot{\varphi}_2$, 则方程 (8) 可化为如下等价一阶方程组:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 - y_3, \\ \dot{y}_2 &= \frac{1}{J_1} [-\alpha (y_2 - y_3) - K y_1 + T_1], \\ \dot{y}_3 &= \frac{1}{J_2} [C y_2 + (\beta - C) y_3 \\ &\quad + \gamma y_3^2 + K y_1 + T_2 + \alpha], \end{aligned} \quad (9)$$

系统 (9) 可表示为

$$\dot{y} = f(y, \beta). \quad (10)$$

系统 (10) 的任何平衡点通过简单的线性变换都可将其转移到坐标原点, 因此研究系统平衡点在原点处的动力学特性具有普遍意义. 不失一般性, 在此令 $T_1 = 0, T_2 = -\alpha$, 此时 $y_0 = (0, 0, 0)$ 为方程 (10) 的平衡点. 于是系统在 y_0 处的 Jacobian 矩阵可表示为

$$A(y_0, \beta) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -\frac{K}{J_1} & -\frac{C}{J_1} & \frac{C}{J_1} \\ \frac{K}{J_2} & \frac{C}{J_2} & \frac{\beta - C + 2\gamma y_3}{J_2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -\frac{K}{J_1} & -\frac{C}{J_1} & \frac{C}{J_1} \\ \frac{K}{J_2} & \frac{C}{J_2} & \frac{\beta - C}{J_2} \end{bmatrix}. \quad (11)$$

用 Hopf 定理寻找 Hopf 分岔点, 证明极限环的存在性时, 一般是通过计算 Jacobian 矩阵 $A(y_0, \beta)$ 的所有特征值, 进而判断参数变化时 $A(y_0, \beta)$ 是否有特征根穿越虚轴^[36]. 这种方法需要计算 Jacobian 矩阵的所有特征根并判断根的实部是否为零, 计算量很大, 且很难写出特征根的解析表达式. 因此本文利用 Hurwitz 行列式^[37] 判定 Hopf 分岔的存在.

矩阵 $A(y_0, \beta)$ 的特征多项式为

$$P(\lambda) = p_0 \lambda^3 + p_1 \lambda^2 + p_2 \lambda + p_3, \quad (12)$$

式中 $p_0 = 1, p_1 = 2C - \beta, p_2 = 2K - C\beta, p_3 = -K\beta$.

令

$$\Delta_1(\beta) = p_1(\beta) = 2C - \beta, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \Delta_2(\beta) &= \begin{vmatrix} p_1(\beta) & p_0(\beta) \\ p_3(\beta) & p_2(\beta) \end{vmatrix} \\ &= C\beta^2 - (2C^2 + K)\beta + 4CK, \end{aligned} \quad (14)$$

Δ_i 为 (12) 式的 Hurwitz 行列式, 选 $\beta = \beta^*$ 为系统的 Hopf 分岔点, 由此得发生 Hopf 分岔的条件式为

$$\begin{aligned} p_i(\beta^*) &> 0 \quad (i = 0, 1, 2, 3) \\ \Delta_1(\beta^*) &> 0, \\ \Delta_2(\beta^*) &= 0, \\ \left. \frac{d\Delta_2(\beta)}{d\beta} \right|_{\beta=\beta^*} &\neq 0, \end{aligned} \quad (15)$$

即

$$\begin{aligned} 2C - \beta &> 0, \\ 2K - C\beta &> 0, \\ -K\beta &> 0, \\ C\beta^2 - (2C^2 + K)\beta + 4CK &= 0, \\ 2C\beta - 2C^2 - K &\neq 0. \end{aligned} \quad (16)$$

在此, 令 $J_1 = 1, J_2 = 1, C = -1, K = 15, \gamma = 1$, 于是根据关系式 (16), $\beta_1^* = -12$ 和 $\beta_2^* = -5$ 时系统发生 Hopf 分岔.

设矢量 U 和 W 分别是 Jacobian 矩阵 $A(y_0, \beta)$ 对应于特征根 $\omega_0 i$ 的归一化左右特征矢量, 即

$$\begin{aligned} UA &= \omega_0 i U, \quad AW = \omega_0 i W, \quad UW = 1, \quad (17) \\ \rho &= \text{Re} \left\{ -U f_{xxx} W W W^* \right. \\ &\quad \left. + 2U f_{xx} W A^{-1}(0) f_{xx} W W^* + U f_{xx} W^* \right. \\ &\quad \left. \times [A(0) - 2i\omega_0 I]^{-1} f_{xx} W W \right\}, \end{aligned} \quad (18)$$

式中, W^* 为 W 的共轭复数 $A(0) = A(y_0, \beta)|_{\beta=\beta^*}$.

$$f_{xxx} W W W^* = \frac{\partial}{\partial y} \left(\left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \right) \right) \times W \right) W^* \Big|_{\beta=\beta^*, y=y_0} \quad (19)$$

经计算, $\beta = \beta_1^* = -12$ 时, $\rho = 0.0017 > 0$; $\beta = \beta_2^* = -5$ 时, $\rho = -0.0773 < 0$. 当 $\rho > 0$ 时分岔周期解为轨道渐近稳定的, 即极限环是稳定的, 发生的 Hopf 分岔为超临界分岔; 当 $\rho < 0$ 时分岔周期解为轨道渐近不稳定的, 发生的 Hopf 分岔为亚临界分岔^[37]. 因此, 在分岔点 β_1^* 和 β_2^* 发生的 Hopf 分岔分别为超临界分岔和亚临界分岔. 对于超临界 Hopf 分岔点 β_1^* , 当 $\beta = -11 > \beta_1^*$ 时, 平衡点渐近稳定, 如图 1; $\beta = -12.3 < \beta_1^*$ 时, 平衡点不稳定并在其附近产生稳定的极限环, 如图 2. 对于亚临界 Hopf 分岔点 β_2^* , $\beta = -5.3 < \beta_2^*$ 时, 存在两个由初始条件决定的不同运动轨迹: 当初值较小时, 平衡点局部渐近稳定, 如图 3; 当初值较大时, 响应跳变到幅值较大且稳定的极限环上, 导致系统失稳, 如图 4; $\beta = -4 > \beta_2^*$ 时, 平衡点发散, 系统失稳振荡, 如图 5. 下面对亚临界分岔点 β_2^* 进行非线性反馈控制.

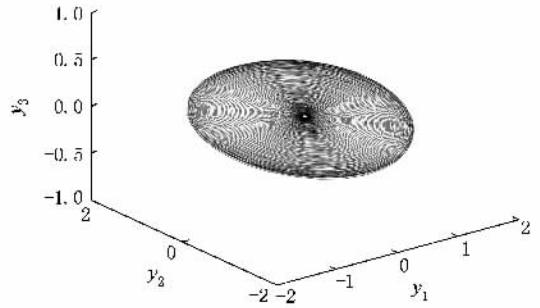


图 3 初始条件 [0.2 0.2 0.2]

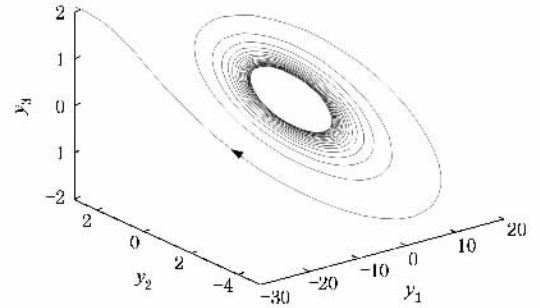


图 4 初始条件 [0.6 0.6 0.6]

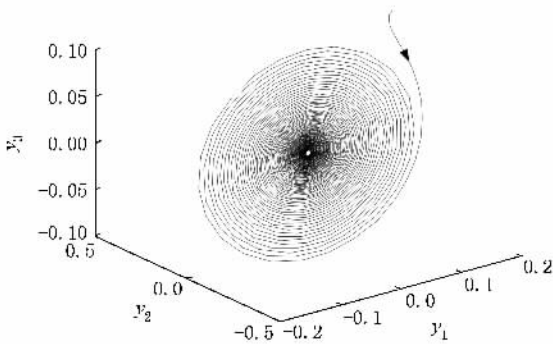


图 1 平衡点渐近稳定

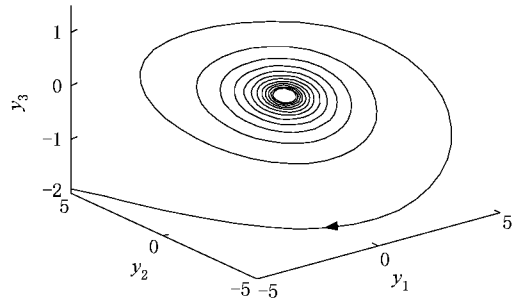


图 5 平衡点发散

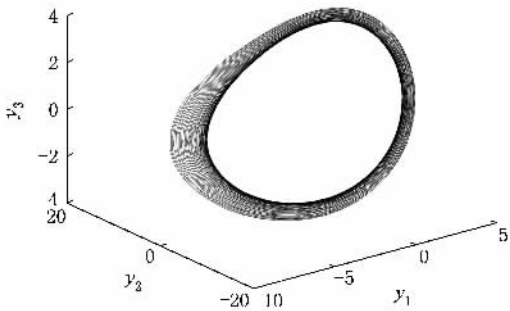


图 2 稳定极限环

4. Hopf 分岔的非线性反馈控制

Hopf 分岔控制的主要任务有: 1) 转移系统 (9) 原有的分岔点; 2) 稳定 Hopf 分岔周期轨道, 改变极限环幅值. 1) 仅需要对系统 (9) 进行线性分析, 而 2) 则必须应用非线性系统理论. 因此所选取的控制量须含有线性和非线性两部分, 且要保证所取状态反馈量物理可测, 在此取控制量 $T_1 = -K_c y_2 - K_n y_2^3$, 此时受控系统可表示为

$$\dot{y}_1 = y_2 - y_3,$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_2 &= \frac{1}{J_1} [-\alpha(y_2 - y_3) - Ky_1 - K_c y_2 - K_n y_2^3], \\ \dot{y}_3 &= \frac{1}{J_2} [Cy_2 + (\beta - C)y_3 + \gamma y_3^2 + Ky_1]. \end{aligned} \quad (20)$$

由(20)式不难看出控制量的引入不改变原系统的平衡点,此时受控系统(20)在 原点处的 Jacobian 矩阵为

$$A(\gamma_0, \beta) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -\frac{K}{J_1} & -\frac{C + K_c}{J_1} & \frac{C}{J_1} \\ \frac{K}{J_2} & \frac{C}{J_2} & \frac{\beta - C}{J_2} \end{bmatrix}. \quad (21)$$

根据关系式(15)得受控系统的 Hopf 分岔的发生条件为

$$\begin{aligned} -\beta + K_c - 2 &> 0, \\ (1 - K_c)\beta - K_c + 30 &> 0, \\ -15\beta + 15K_c &> 0, \\ (K_c - 1)\beta^2 + (-K_c^2 + 4K_c - 17)\beta \\ - K_c^2 + 17K_c - 60 &= 0, \\ (2K_c - 2)\beta - K_c^2 + 4K_c - 17 &\neq 0, \end{aligned} \quad (22)$$

(22)式是受控系统(20)发生 Hopf 分岔的充分必要条件,通过改变线性反馈增益 K_c 可实现系统 Hopf 分岔点的转移,例如当 $K_c = 0.5$ 时,受控系统(14)的 Hopf 分岔点转移到 $\beta_1^* = -26.611$ 和 $\beta_2^* = -3.889$, 稳定域为 $(-26.611, -3.889)$, 受控系统的稳定域和分岔点范围明显优于原未受控系统.

下面对受控系统(20)进行非线性分析,以控制 Hopf 分岔周期解的稳定性和极限环幅值.

令 $K_c = 0.5, \beta = \beta_2^* + \eta = -3.889 + \eta, \eta$ 为分岔参数.当 $\eta = 0$ 时受控系统 Jacobian 矩阵的特征值为 $\lambda_{1,2} \approx \pm 5.249i$ 和 $\lambda_3 \approx -2.389$.对(20)式进行如下线性变换:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0598 & -0.2427 & 0.0674 \\ 0.7534 & 0 & 0.6204 \\ -0.5207 & -0.3141 & 0.7814 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad (23)$$

得

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 5.249x_2 + (0.3613x_1 + 0.2179x_2 \\ &\quad - 0.5421x_3)\eta + g_{x12}(x_1, x_2, x_3) \\ &\quad + K_n g_{x13}(x_1, x_2, x_3), \\ \dot{x}_2 &= -5.249x_1 - (0.03279x_1 + 0.01978x_2 \\ &\quad - 0.04921x_3)\eta + g_{x22}(x_1, x_2, x_3) \\ &\quad + K_n g_{x23}(x_1, x_2, x_3), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_3 &= -2.389x_3 - (0.4388x_1 + 0.2647x_2 \\ &\quad - 0.6585x_3)\eta + g_{x32}(x_1, x_2, x_3) \\ &\quad + K_n g_{x33}(x_1, x_2, x_3), \end{aligned} \quad (24)$$

式中, g_{xi2} 和 $g_{xi3} (i = 1, 2, 3)$ 分别表示 x_1, x_2, x_3 的二次和三次多项式.

应用多尺度法求(24)式的规范形,在此将(24)式表示为

$$\dot{x} = Jx + h(x), \quad (25)$$

$$\text{式中 } J = \begin{bmatrix} 0 & \omega_c & 0 \\ -\omega_c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q \end{bmatrix}, \omega_c = 5.249, q = -2.389,$$

$h(x)$ 表示(24)式的非线性项.

将(25)式展开

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \omega_c x_2 + h_1(x), \\ \dot{x}_2 &= -\omega_c x_1 + h_2(x), \\ \dot{x}_3 &= -qx_3 + h_3(x), \end{aligned} \quad (26)$$

$$\dot{x}_3 = -qx_3 + h_3(x), \quad (27)$$

引入新变量

$$T_k = \epsilon^k t \quad k = 0, 1, \dots, \quad (28)$$

即 $T_0 = t, T_1 = \epsilon t, T_2 = \epsilon^2 t, \dots$, 因此关于 t 的导数变成了关于 T_k 的偏导数的展开形式

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} &= \frac{dT_0}{dt} \frac{\partial}{\partial T_0} + \frac{dT_1}{dt} \frac{\partial}{\partial T_1} + \dots \\ &= D_0 + \epsilon D_1 + \dots, \\ \frac{d^2}{dt^2} &= D_0^2 + 2\epsilon D_0 D_1 \\ &\quad + \epsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2) + \dots, \end{aligned} \quad (29)$$

D_i 表示 $\partial/\partial T_i$, 此时方程(25)的解可以表示为

$$\begin{aligned} x_i(t, \epsilon) &= \epsilon x_{i1}(T_0, T_1, T_2, \dots) \\ &\quad + \epsilon^2 x_{i2}(T_0, T_1, T_2, \dots) + \dots, \end{aligned} \quad (30)$$

将(29)(30)式代入(25)式中,按照摄动法建立 ϵ 的各阶方程

$$\epsilon^1: D_0 x_{11} = \omega_c x_{21}, D_0 x_{21} = -\omega_c x_{11}, \quad (31)$$

$$D_0 x_{31} = -qx_{31}; \quad (32)$$

$$\epsilon^2: D_0 x_{12} = \omega_c x_{22} - D_1 x_{11} + h_{12}(x_1),$$

$$D_0 x_{22} = -\omega_c x_{12} - D_1 x_{21} + h_{22}(x_1), \quad (33)$$

$$D_0 x_{32} = -qx_{32} + h_{32}(x_1); \quad (34)$$

$$\epsilon^3: D_0 x_{13} = \omega_c x_{23} - D_1 x_{12} - D_2 x_{11} + h_{13}(x_{1,2})$$

$$D_0 x_{23} = -\omega_c x_{23} - D_1 x_{22} - D_2 x_{21} + h_{23}(x_{1,2}), \quad (35)$$

$$D_0 x_{33} = -qx_{33} + h_{33}(x_{1,2}), \quad (36)$$

式中 x_1 表示 x 一阶近似解, $h_{i2} = d^2 [h_i(x_1, x_2, \dots)]$

$2!]d\epsilon^2|_{\epsilon=0}$ $x_{1,2}$ 表示 x 一、二阶近似解乘积, $h_{i3} = d^3[h_i(x_1, x_2, \dots)]d\epsilon^3|_{\epsilon=0}$.

首先求系统 (25) 的一阶近似解. 将 (31) 式的第 2 个方程代入第 1 个方程得

$$D_0^2 x_{11} + \omega_c^2 x_{11} = 0, \quad (37)$$

解得 x_1 的一阶近似解

$$x_{11} = r(T_1, T_2, \dots) \cos[\omega_c T_0 + \phi(T_1, T_2, \dots)] \\ = r \cos \theta, \quad (38)$$

式中 $\theta = \omega_c T_0 + \phi(T_1, T_2, \dots)$, r 和 ϕ 分别表示一阶近似周期解的幅值和相角. 再由 (31) 式得 x_2 的一阶近似解

$$x_{21} = r \sin \theta. \quad (39)$$

由 (38) 和 (39) 式可得 $D_0 r = 0$ 和 $D_0 \phi = 0$, 显然 ϵ^1

(32) 式的渐近稳态解 $x_{31} = 0$.

接下来求 x 的二阶近似解. 将 (33) 式中的第 2 个方程代入第 1 个方程式得

$$D_0^2 x_{12} + \omega_c^2 x_{12} \\ = -D_1 D_0 x_{11} - \omega_c D_1 x_{21} + D_0 h_{12} + \omega_c h_{22}, \quad (40)$$

x_i 的二阶近似解 x_{i2} 可表示为

$$x_{i2} = \sum_{\tau=0}^2 [E_i \cos(\tau\theta) + F_i \sin(\tau\theta)]. \quad (41)$$

将 x_{11} 和 x_{21} 代入 (34) 和 (40) 式, 得到关于三角函数 $\sin k\theta$ 和 $\cos k\theta$ ($k = 0, 1, 2$) 的表达式, 为消除久期项需令 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 的系数为 0, 于是可得 x 的二阶近似解和 $D_1 r$ 和 $D_1 \phi$ 的表达式.

同理求 x 的三阶近似解. 由 (35) 式得到如下方程:

$$D_0^2 x_{13} + \omega_c^2 x_{13} \\ = -D_0 D_2 x_{11} - \omega_c D_2 x_{21} - D_0 D_1 x_{12} \\ - \omega_c D_1 x_{22} + D_0 h_{13}(x_{1,2}) + \omega_c h_{23}(x_{1,2}). \quad (42)$$

摄动方程的三阶近似解为

$$x_{i3} = \sum_{\tau=0}^3 [C_i \cos(\tau\theta) + E_i \sin(\tau\theta)]. \quad (43)$$

将 (43) 式代入 (36) 和 (42) 式, 平衡谐波项系数求得三阶近似解 x_{i3} , 同时消除久期项得 $D_2 r$ 和 $D_2 \phi$

于是得系统极坐标形式的三阶规范形.

$$\dot{r} = D_0 r + D_1 r + D_2 r = r [0.1707 \eta \\ + (0.0177 - 0.1245 K_n) r^2], \\ \dot{\theta} = \omega_c + \frac{d\phi}{dt} = \omega_c + D_0 \phi + D_1 \phi + D_2 \phi \\ = 5.249 + 0.1253 \eta \\ + (0.008 + 0.0605 K_n) r^2. \quad (44)$$

(44) 中的开折项为

$$\delta_r = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \dot{x}_1}{\partial x_1 \partial \eta} + \frac{\partial^2 \dot{x}_2}{\partial x_2 \partial \eta} \right) = 0.1707, \quad (45)$$

$$\delta_\theta = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \dot{x}_1}{\partial x_2 \partial \eta} - \frac{\partial^2 \dot{x}_2}{\partial x_1 \partial \eta} \right) = 0.1253. \quad (46)$$

用 (44) 式可研究系统平衡点的稳定性及分岔情况.

$r = 0$ 表示平衡点在分岔点处的稳定性, $\eta < 0$ 时稳定, $\eta > 0$ 时不稳定; 分岔点 β_2^* 发生超临界 Hopf 分岔的条件为

$$0.0177 - 0.1245 K_n < 0,$$

即

$$K_n > 0.0177 / 0.1245 \approx 0.1422. \quad (47)$$

此时系统的极限环渐近稳定, 极限环幅值

$$r = \sqrt{\frac{0.1707 \eta}{0.1245 K_n - 0.0177}}. \quad (48)$$

在参数 β 的扰动量 η 一定时可通过调整 K_n 控制极限环的幅值. 当 K_c 变化时, 根据上述过程可求出新的 K_n 值以控制系统极限环的稳定性和幅值.

5. 受控系统的数值模拟

对受控系统 (20) Hopf 分岔点邻域产生的极限环进行数值模拟, 验证所设计的非线性反馈控制器对原系统 Hopf 分岔的转移、极限环稳定性及幅值控制的有效性. 取 $K_c = 0.5$ 和 $K_n = 0.5$, 平衡点稳定区域由原来的 $(-12, -5)$ 扩大为 $(-26.611, -3.889)$, $\beta = -4$ 时受控系统的平衡点稳定, 如图 6 所示; 受控系统 (20) 的 Hopf 分岔点发生转移, 分岔点 β_2^* 邻域内发生超临界 Hopf 分岔, $\beta = -2$ 和 -3 时平衡点附近产生稳定的极限环, 如图 7 和 8 所示. 且由 (48) 式知, 在 β 相同时, 改变参数 K_n 能够对稳定的极限环的幅值进行控制, 令 $K_c = 0.5, K_n = 1.0, \beta = -3$, 此时极限环的相轨迹如图 9 所示, 可以看出由于 K_n 的增大, 图 9 中极限环的幅值明显小于图 8.

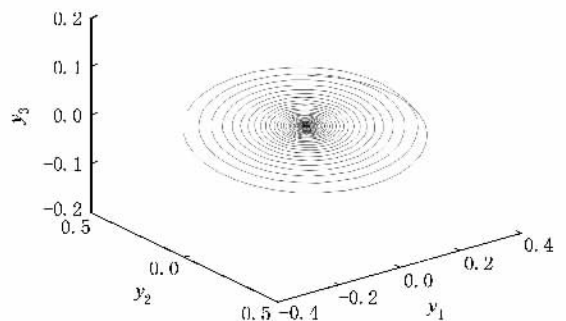
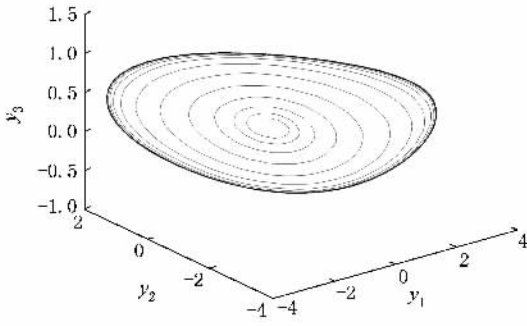
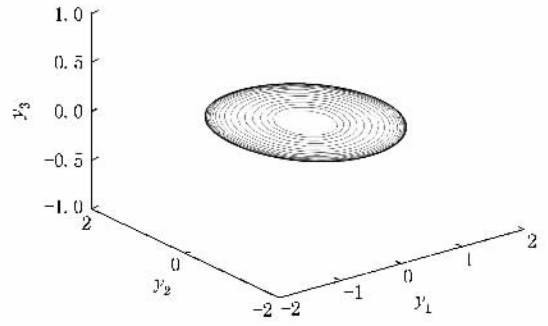
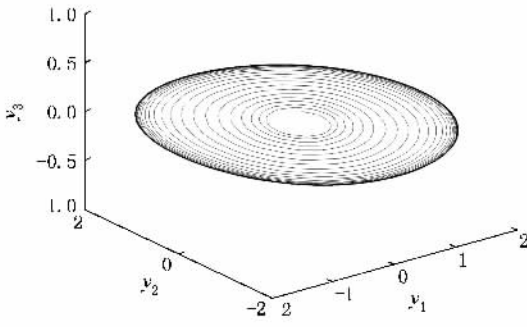


图 6 $K_c = 0.5, K_n = 0.5, \beta = -4$ 时稳定平衡点

图 7 $K_c = 0.5, K_n = 0.5, \beta = -2$ 时稳定极限环图 9 $K_c = 0.5, K_n = 1.0, \beta = -3$ 时稳定极限环图 8 $K_c = 0.5, K_n = 0.5, \beta = -3$ 时稳定极限环

6. 结 论

对一类具有非线性摩擦阻尼力的两质量相对转动非线性动力系统进行了定性和定量分析,给出系统发生 Hopf 分岔的充要条件,指出未受控系统在分岔点 β_1^* 和 β_2^* 处分别发生超临界 Hopf 分岔和亚临界 Hopf 分岔,设计非线性状态反馈控制器,完成了系统分岔点的转移,并实现极限环稳定性和幅值的控制,通过数值计算方法进一步验证了所设计控制器的有效性。

- [1] Carmeli M 1985 *Found. Phys.* **15** 175
- [2] Carmeli M 1986 *Inter. J. Theor. Phys.* **25** 89
- [3] Luo S K 1996 *J. Beijing Inst. Technol.* **16**(S1) 154 (in Chinese) [罗绍凯 1996 北京理工大学学报 **16**(S1) 154]
- [4] Luo S K 1996 *Appl. Math. Mech.* **17** 683
- [5] Luo S K 1998 *Appl. Math. Mech.* **19** 45
- [6] Luo S K 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 712 (in Chinese) [罗绍凯 2002 物理学报 **51** 712]
- [7] Luo S K 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1416 (in Chinese) [罗绍凯 2002 物理学报 **51** 1416]
- [8] Jia L Q 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1043 (in Chinese) [贾利群 2003 物理学报 **52** 1043]
- [9] Luo S K, Guo Y X, Chen X W 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2053 (in Chinese) [罗绍凯, 郭永新, 陈向炜 2001 物理学报 **50** 2053]
- [10] Fu J L, Chen X W, Luo S K 1999 *Appl. Math. Mech.* **20** 1266
- [11] Fu J L, Chen X W, Luo S K 1999 *Appl. Math. Mech.* **21** 549
- [12] Fagn J H 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1001 (in Chinese) [方建会 2001 物理学报 **50** 1001]
- [13] Luo S K, Chen X W, Guo Y X 2002 *Chin. Phys.* **11** 523
- [14] Luo S K 2002 *Chin. Phys. Lett.* **19** 449
- [15] Fu J L, Chen L Q, Xue Y 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 256 (in Chinese) [傅景礼, 陈立群, 薛 纭 2003 物理学报 **52** 256]
- [16] Luo S K 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2941 (in Chinese) [罗绍凯 2003 物理学报 **52** 2941]
- [17] Luo S K, Mei F X 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 666 (in Chinese) [罗绍凯, 梅凤翔 2004 物理学报 **53** 666]
- [18] Luo S K 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 5 (in Chinese) [罗绍凯 2004 物理学报 **53** 5]
- [19] Luo S K 2003 *Chin. Phys.* **12** 140
- [20] Luo S K, Jia L Q, Cai J L 2003 *Chin. Phys.* **12** 841
- [21] Luo S K, Huang F J, Lu Y B 2004 *Chin. Phys.* **13** 2182
- [22] Luo S K, Cai J L, Jia L Q 2005 *Chin. Phys.* **14** 656
- [23] Dong Q L, Liu B 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 2191 (in Chinese) [董全林, 刘 彬 2002 物理学报 **51** 2191]
- [24] Dong Q L, Wang K, Zhang C X, Liu B 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 337 (in Chinese) [董全林, 王 坤, 张春熹, 刘 彬 2004 物理学报 **53** 337]
- [25] Zhao W, Liu B 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 4543 (in Chinese) [赵 武, 刘 彬 2005 物理学报 **54** 4543]
- [26] Wang K 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 3987 (in Chinese) [王 坤 2005 物理学报 **54** 3987]
- [27] Wang K 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 5530 (in Chinese) [王 坤 2005 物理学报 **54** 5530]
- [28] Zhao W, Liu B, Shi P M, Jiang J S 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3852 (in Chinese) [赵 武, 刘 彬, 时培明, 蒋金水 2006 物理学报 **55** 3852]
- [29] Shi P M, Liu B 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3678 (in Chinese) [时培明, 刘 彬 2007 物理学报 **56** 3678]

- [30] Meng Z , Liu B 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 6194 (in Chinese)
[孟 宗、刘 彬 2007 物理学报 **56** 6194]
- [31] Meng Z , Liu B 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 1329 (in Chinese)
[孟 宗、刘 彬 2008 物理学报 **57** 1329]
- [32] Shi P M , Liu B , Liu S 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 4675 (in Chinese)
[时培明、刘 彬、刘 爽 2008 物理学报 **57** 4675]
- [33] Shi P M , Liu B , Hou D X 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 1321 (in Chinese) [时培明、刘 彬、侯东晓 2008 物理学报 **57** 1321]
- [34] Liu S H , Tang J S 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3145 (in Chinese) [刘 素华、唐驾时 2007 物理学报 **56** 3145]
- [35] Zhang R C , Tong Z N 2006 *Mech. Stre.* **28** 336 (in Chinese) [张 瑞成、童朝南 2006 机械强度 **28** 336]
- [36] Lu Q S 1995 *Bifurcation and Singularity* (Shanghai : Shanghai Scientific Technology and Education Press) p112 (in Chinese) [陆 启韶 1995 分岔与奇异性 上海 科技教育出版社 第 112 页]
- [37] Shu Z Z , Zhang J Y , Cao D Q 2001 *Stability of movement* (Beijing : Chinese Railway Press) p220 (in Chinese) [舒仲周、张继业、曹 登庆 2001 运动稳定性 北京 : 中国铁道出版社 第 220 页]

Nonlinear feedback control of Hopf bifurcation in a relative rotation dynamical system *

Liu Shuang¹✉† Liu Bin² Shi Pei-Ming²

1 ✉ Key Lab of Industrial Computer Control Engineering of Hebei Province , Yanshan University , Qinhuangdao 066004 , China)

2 ✉ Institute of Electrical Engineer , Yanshan University , Qinhuangdao 066004 , China)

(Received 27 October 2008 ; revised manuscript received 15 November 2008)

Abstract

The Hopf bifurcation characteristic in a relative-rotation dynamical system with nonlinear damping force is analyzed and the necessary and sufficient condition of Hopf bifurcation is given under which the system has Hopf bifurcation emerging from the equilibrium. In order to make the Hopf bifurcation point transformed and control the stability and amplitude of limit cycle , a nonlinear feedback controller is proposed. The analytical results on controlling Hopf bifurcation points via the nonlinear controller agree well with the numerical results.

Keywords : relatively rotation , nonlinear feedback control , Hopf bifurcation , limit cycle

PACC : 0340D , 0547

* Project supported by the National Significant Tackle Key Problems for 11th 5-year Plan of China (Grant No. 2007BAF02B10) and the Natural Science Foundation of Hebei Province , China (Grant No. F200800882).

† E-mail : shliu@ysu.edu.cn