

一个新的超混沌系统*

刘明华¹⁾²⁾ 冯久超^{1)†}

1) 华南理工大学电子与信息学院, 广州 510641)

2) 井冈山大学数理学院, 吉安 343009)

(2008 年 11 月 7 日收到, 2008 年 11 月 28 日收到修改稿)

基于一个新三维混沌系统, 通过引入非线性控制器, 构造出一个新的四维超混沌系统, 并对该系统的动力学行为进行了研究, 包括它的 Lyapunov 指数谱、分岔图等. 分析表明, 新的四维系统随着新引入的参数变化呈现周期、复杂周期、混沌及超混沌动力学行为; 设计的硬件电路的实验结果也证实了相关结果.

关键词: 超混沌, Lyapunov 指数, 分岔图, 混沌电路

PACC: 0545

1. 引言

自从 Lorenz 发现第一个经典的三维自治混沌系统以来^[1], 就引起众多混沌研究者的关注, 并在此基础上进行改进, 发现了许多新的三维混沌系统, 如 Chen 系统^[2]、Lü 系统^[3]. 这些三维自治混沌系统只有一个正的 Lyapunov 指数, 在工程应用中易被破解, 例如在加密系统中, 如果采用三维自治混沌系统生成的序列来对信号进行加密, 由于它们的带宽相对较窄, 很容易通过滤波系统给予滤除, 使其失去了加密的意义. 而超混沌系统具有两个及两个以上正的 Lyapunov 指数, 动力学行为比一般混沌系统更复杂, 难以预测, 在保密通信及信息安全等领域中具有更高的实用价值. 因此, 研究如何构成超混沌系统, 尤其是在已发现的三维自治混沌系统基础上如何构造超混沌系统, 已引起研究者极大的兴趣, 并取得了一批成果^[4-16]. 这些文献资料表明, 以三维自治混沌系统为基础, 构造出超混沌系统的简单而有效方法有两种. 一种是通过施加外部正余弦激励信号而实现超混沌, 所获得的超混沌系统是非自治系统; 另一种是通过引入非线性控制器, 通过把非线性控制器的输出反馈到系统的其他方程中而实现超混沌, 而对不同的混沌系统, 它的非线性控制器的设计方法也不相同, 目前还没有系统性的设计方法.

2008 年, Yang 和 Chen 等发现了一个新的三维自治混沌系统. 从代数形式上看, 这个新混沌系统类似于 Lorenz, Chen, Lü 系统, 但本质上它们拓扑不等价. 特别值得注意的是, 新混沌系统有一个鞍点和两个稳定的结焦点, 而 Lorenz, Chen, Lü 等系统则有一个鞍点和两个不稳定的鞍焦点^[17].

本文在文献 [17] 提出的新三维自治混沌系统基础上, 通过引入非线性控制器, 构造一个可产生超混沌现象的四维系统. 分析了四维系统的动力学行为, 包括平衡点性质、Lyapunov 指数谱、分岔图等, 设计了实现四维超混沌系统的电路, 并用硬件电路进行实验验证, 实验结果与数值仿真结果一致.

2. 新的四维超混沌系统

根据文献 [17], 一个新的三维自治系统的状态方程表示为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a(y - x), \\ \dot{y} &= cx - xz, \\ \dot{z} &= -bz + xy. \end{aligned} \quad (1)$$

当 $a = 35$, $b = 3$, $c = 35$ 时, 三个 Lyapunov 指数分别为 $\lambda_{l_1} = 1.0742$, $\lambda_{l_2} = 0$, $\lambda_{l_3} = -39.074$, 三个平衡点分别为 $O(0, 0, 0)$, $E^+(\sqrt{105}, \sqrt{105}, 35)$, $E^-(-\sqrt{105}, -\sqrt{105}, 35)$, 特征值分别为 $(-3, -\frac{35(\sqrt{5}+1)}{2})$.

* 国家自然科学基金(批准号: 60572025, 60872123), 国家和广东省自然科学基金联合基金(批准号: U0835001)资助的课题.

† 通讯联系人. E-mail: fengjc@scut.edu.cn

$\frac{35(\sqrt{5}-1)}{2})$, $(-37.6122, -0.1939 \pm 13.9778i)$, $(-37.6122, -0.1939 \pm 13.9778i)$ 因此混沌系统 (1) 具有一个鞍点、二个稳定的结焦点。

产生超混沌系统要满足的两个必要条件: 1) 对于自治系统而言, 至少是四维的 2) 至少有两个正的 Lyapunov 指数且所有 Lyapunov 指数之和小于零。根据以上两个必要条件, 我们在系统 (1) 的基础上通过引入非线性控制器 u , 令 u 的变化速率为 $\dot{u} = -dx$, 并把非线性控制器 u 反馈到系统 (1) 的第二个方程中, 从而构造出一个可产生超混沌现象的四维系统,

其状态方程表示为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a(y-x), \\ \dot{y} &= cx - xz + u, \\ \dot{z} &= -bz + xy, \\ \dot{u} &= -dx, \end{aligned} \quad (2)$$

其中 a, b, c 取值与系统 (1) 中完全相同, 即 $a = 35, b = 3, c = 35$, 则系统 (2) 动力学行为由参数 d 决定。当 $a = 35, b = 3, c = 35, d = 8$ 时, 四个 Lyapunov 指数分别为 $\lambda_{L_1} = 0.2788, \lambda_{L_2} = 0.1470, \lambda_{L_3} = 0, \lambda_{L_4} = -38.429$, 有两个正的 Lyapunov 指数, 四个 Lyapunov 指数之和

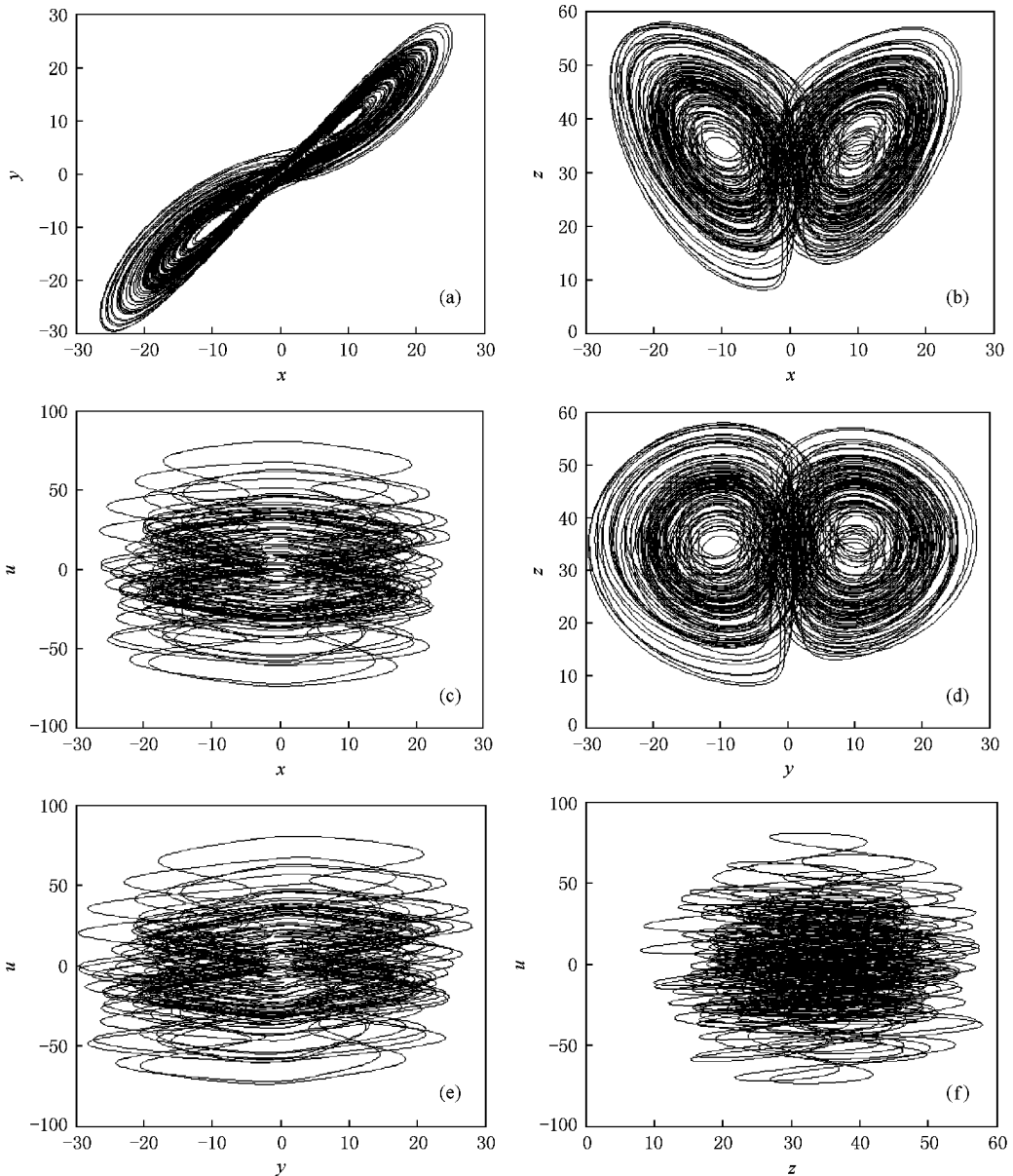


图 1 $d = 8$ 时, 系统 (2) 的超混沌吸引子数值仿真结果 (a) x - y 相图 (b) x - z 相图 (c) x - u 相图 (d) y - z 相图 (e) y - u 相图; (f) z - u 相图

小于零,是一个超混沌系统,取初始值为(10,11,12,13),在 MATLAB 中的数值仿真结果如图 1 所示.

3. 超混沌系统的动力学行为

对于系统(2),有

$$\begin{aligned} \nabla V &= \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial u} \\ &= -a - b = -38, \end{aligned}$$

因此它是耗散性系统,并且以指数速率 e^{-38t} 收敛,故当 $t \rightarrow \infty$ 时,包含系统轨线的每个小体积元以指数速率收缩到 0,此时,所有系统的轨线最终会被限制在一个体积为 0 的极限点集上,并且它的渐近动力学行为会被固定在一个吸引子上,这说明了吸引子的存在性.

由 $\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = \dot{u} = 0$,可出计算出系统(2)的唯一平衡点为 $O(0,0,0,0)$.在平衡点 O 处线性化系统(2),得到对应的 Jacobian 矩阵为

$$J_o = \begin{bmatrix} -a & a & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -b & 0 \\ -d & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3)$$

其特征方程为

$$\begin{aligned} F(\lambda) &= \lambda^4 + (a+b)\lambda^3 + a(b-c)\lambda^2 \\ &\quad + a(d-bc)\lambda + abd = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

当 $a = 35, b = 3, c = 35, d = 8$ 时,可以计算出平衡点 O 处的特征值为 $\lambda_1 = 21.464, \lambda_2 = 0.23009, \lambda_3 = -3, \lambda_4 = -56.694$,其中两个为正值,两个为负值,因此平衡点 O 是一个不稳定的鞍点.

假设系统(2)的四个 Lyapunov 指数为 $\lambda_{L_i} (i = 1, 2, 3, 4)$ 且满足 $\lambda_{L_1} > \lambda_{L_2} > \lambda_{L_3} > \lambda_{L_4}$.为了研究参数变化对系统(2)的动力学行为影响,固定 a, b, c (即 $a = 35, b = 3, c = 35$),使参数 d 在 $(0, 70]$ 之间变化,取初始值为 $(10, 11, 12, 13)$,随参数 d 变化的 Lyapunov 指数谱和 x 变量的分岔图分别如图 2 和图 3 所示.

根据图 2、图 3 及在 MATLAB 中数值仿真结果,可以得出系统(2)随参数 d 变化的动力学行为如下:1)当 $d \in (0, 4.6)$ 时, $\lambda_{L_1} = 0, \lambda_{L_{2,3,4}} < 0$,系统处于复杂周期运动状态;2)当 $d \in (4.6, 29.2)$ 时, $\lambda_{L_1} > 0, \lambda_{L_2} = 0, \lambda_{L_3} = 0, \lambda_{L_4} < 0$,有两个正的 Lyapunov 指数,系统处于超混沌状态;3)当 $d \in (29.2, 33.5)$ 时,交替出现

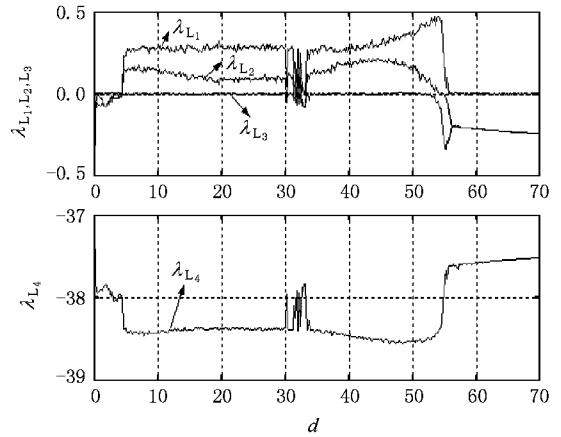


图 2 系统(2)的 Lyapunov 指数谱

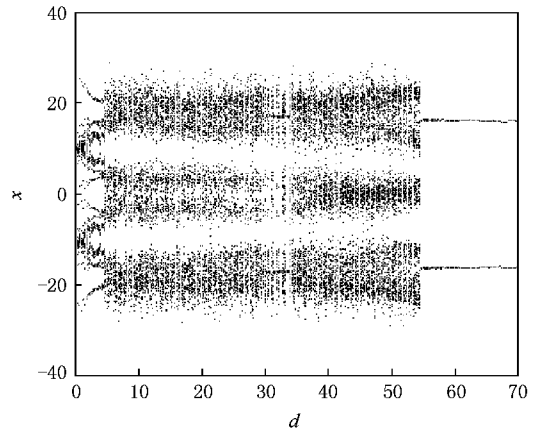


图 3 系统(2)的分岔图

$\lambda_{L_1} = 0, \lambda_{L_{2,3,4}} < 0, \lambda_{L_1} > 0, \lambda_{L_2} = 0, \lambda_{L_{3,4}} < 0$ 和 $\lambda_{L_1} > 0, \lambda_{L_2} = 0, \lambda_{L_3} = 0, \lambda_{L_4} < 0$ 情况,在这区间,系统在周期运动状态、混沌状态和超混沌状态之间切换;4)当 $d \in (33.5, 53.7)$ 时, $\lambda_{L_1} > 0, \lambda_{L_2} = 0, \lambda_{L_3} = 0, \lambda_{L_4} < 0$,有两个正的 Lyapunov 指数,系统处于超混沌状态;5)当 $d \in (53.7, 55.5]$ 时, $\lambda_{L_1} > 0, \lambda_{L_2} = 0, \lambda_{L_3} < 0$,只有一个正的 Lyapunov 指数,系统处于混沌状态;6)当 $d \in (55.5, 70)$ 时, $\lambda_{L_1} = 0, \lambda_{L_{2,3,4}} < 0$,系统处于周期运动状态.

固定 a, b, c (即 $a = 35, b = 3, c = 35$),当 $d = 2$ 时,系统(2)的四个 Lyapunov 指数为 $\lambda_{L_1} = 0, \lambda_{L_2} = -0.0728, \lambda_{L_3} = -0.0731, \lambda_{L_4} = -37.855$,系统处于复杂周期运动状态;当 $d = 60$ 时, $\lambda_{L_1} = 0, \lambda_{L_2} = -0.2103, \lambda_{L_3} = -0.2104, \lambda_{L_4} = -37.579$,系统处于周期运动状态,它们的数值仿真结果如图 4 所示.

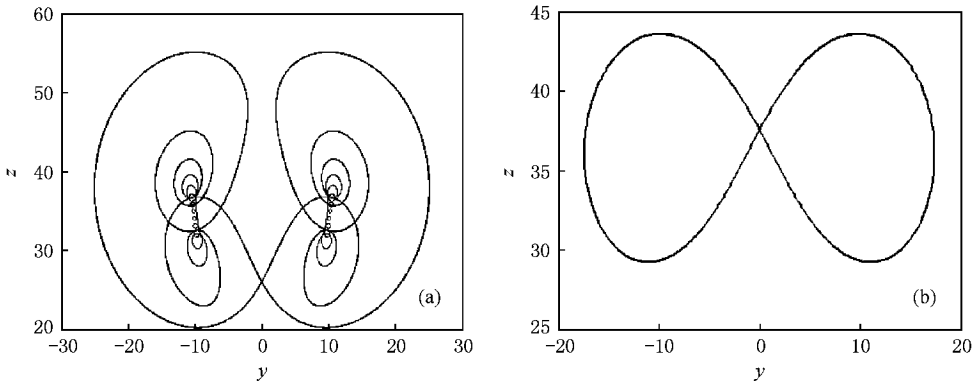


图 4 系统(2)为复杂周期和周期运动状态时的数值仿真结果 (a) $d=2$ (b) $d=60$

4. 超混沌系统的电路实现

基于电子电路设计原理,根据状态方程(2),我们设计了实现超混沌系统(2)的电路,如图5所示.整个电路主要由四部分组成:加减比例电路、积分电路、反相电路和乘法电路.电路中的运算器型号为 TL082,乘法器型号为 AD633,电源电压值为 $\pm 15\text{ V}$.在电路设计时要注意以下两点:1)乘法器 AD633 的电压增益为 0.1;2)变量输出绝对值远远大于 15,因此在电路设计时必须对系统(2)进行线性比例压缩变换,根据 MATLAB 中的数值仿真结果,可以取线性比例压缩因子为 20.电路中 $1/(R_0 C_0)$ 是积分因

子,它决定混沌信号的频率,通过改变 R_0 或 C_0 可以改变混沌信号的频率,从而满足混沌通信的要求.在硬件电路实验中,如果混沌信号的频率太低,不利于混沌信号在普通的示波器上观察,为了使混沌信号能够在普通的示波器上清晰显示,就必须提高混沌信号的频率,最简单且有效的方法就是通过减小 R_0 或 C_0 ,从而可以在普通的示波器上可以观察到清晰、连贯、完整而稳定的混沌信号.本电路中取 $R_0 = 50\text{ k}\Omega$ 和 $C_0 = 33\text{ nF}$,可以满足硬件电路实验要求.

根据图5所示的电路搭建硬件电路平台进行电路实验,调节电阻 R_{41} ,并使得 $R_{41} = 12.5\text{ k}\Omega$,通过示波器来观察输出的混沌信号,观察到的超混沌吸引子如图6所示.

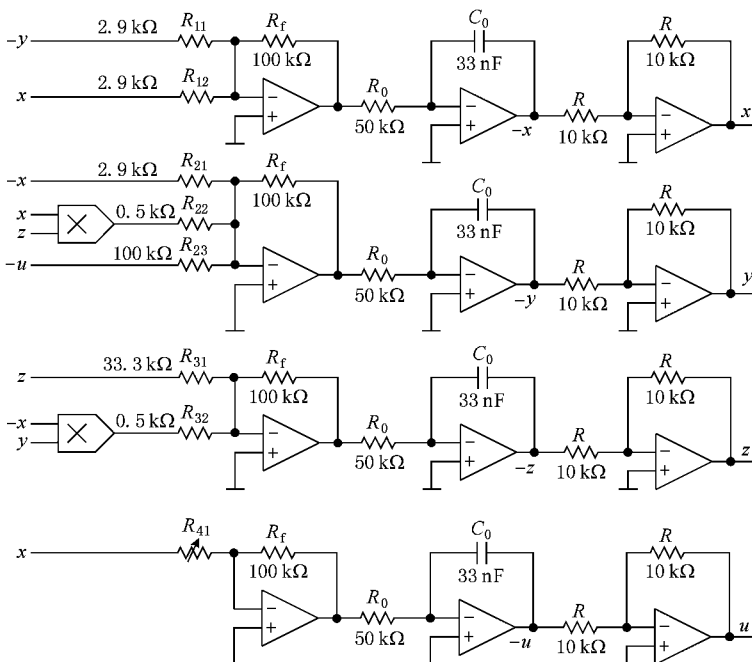


图 5 实现超混沌系统的电路图

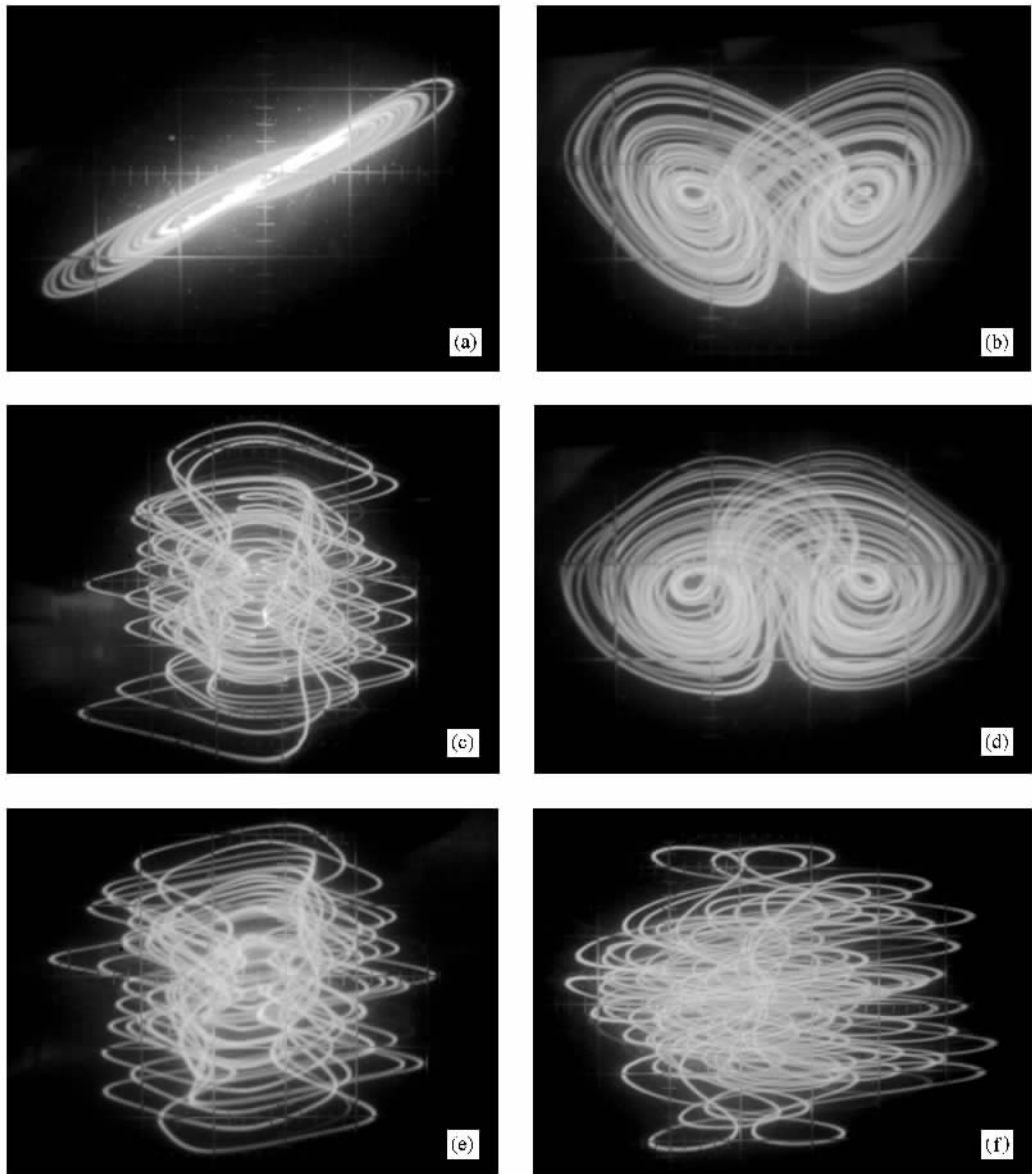


图6 实验结果 (a) x - y 相图 (b) x - z 相图 (c) x - u 相图 (d) y - z 相图 (e) y - u 相图 (f) z - u 相图

5. 结 论

在一个具有一个鞍点、二个稳定结焦点的新三维自治混沌系统的基础上,通过引入非线性控制器,构造一个新四维系统,通过对新四维系统进行理论

分析,包括平衡点性质、Lyapunov 指数谱、分岔图等,证实了该新四维系统可以产生超混沌现象.设计了实现超混沌系统的电路,并进行了电路实验,实验结果与数值仿真结果一致.新四维系统具有以下特点:1)只有一个平衡点;2)控制系统进入超混沌的参数变化范围很宽,有利于电路实现.

- [1] Lorenz E N 1963 *J. Atmos. Sci.* **20** 130
 [2] Chen G R, Ueta T 1999 *Int. J. Bifurc. Chaos* **9** 1465
 [3] Lü J H, Chen G R 2002 *Int. J. Bifurc. Chaos* **12** 659
 [4] Tam L M, Chen J H, Chen H K, Tou W M S 2008 *Chaos, Solitons &*

Fractals **38** 826

- [5] Wu X Q, Lu J A, Ju H. C, Wong S C 2007 *Chaos, Solitons & Fractals* **31** 811
 [6] Jia Q 2007 *Phys. Lett. A* **371** 410

- [7] Chen A M ,Lu J A ,Li J H ,Yu S M 2006 *Physica A* **364** 103
 [8] Wang G Y ,Zhang X ,Zheng Y ,Li Y X 2006 *Physica A* **371** 260
 [9] Li Y X ,Cheng G R ,Tang W K S 2005 *IEEE Trans . CAS-II* **52** 204
 [10] Li Y X ,Tang W K S ,Cheng G R 2005 *Int . J . Bifurc . Chaos* **15** 3367
 [11] Liu Y Z 2008 *Acta Phys . Sin .* **57** 1439 (in Chinese) [刘扬正 20080 物理学报 **57** 1439]
 [12] Cang S J ,Chen Z Q ,Yuan Z Z 2008 *Acta Phys . Sin .* **57** 1493 (in Chinese) [仓诗建、陈增强、袁著祉 2008 物理学报 **57** 1493]
 [13] Zhang Q ,Wang J Z ,Chen Z Q ,Yuan Z Z 2008 *Acta Phys . Sin .* **57** 2092 (in Chinese) [张 青、王杰智、陈增强、袁著祉 2008 物理学报 **57** 2092]
 [14] Wang G Y ,Zheng Y ,Liu J B 2007 *Acta Phys . Sin .* **56** 3113 (in Chinese) [王光义、郑 艳、刘敬彪 2007 物理学报 **56** 3113]
 [15] Wang X Y ,Wang M J 2007 *Acta Phys . Sin .* **56** 5136 (in Chinese) [王兴元、王明军 2007 物理学报 **56** 5136]
 [16] Cai G L ,Tan Z M ,Zhou W H ,Tu W T 2007 *Acta Phys . Sin .* **56** 6230 (in Chinese) [蔡国梁、谭振梅、周维怀、涂文桃 2007 物理学报 **56** 6230]
 [17] Yang Q G ,Chen G R 2008 *Int . J . Bifurc . Chaos* **18** 1393

A new hyperchaotic system *

Liu Ming-Hua^{1,2)} Feng Jiu-Chao^{1)†}

1) *College of Electronic and Information Engineering ,South China University of Technology ,Guangzhou 510641 ,China*

2) *College of Mathematics and Physics ,Jinggangshan University ,Ji'an Jiangxi 343009 ,China*

(Received 7 November 2008 ; revised manuscript received 28 November 2008)

Abstract

A new four-dimensional continuous-time autonomous hyperchaotic system is proposed in this paper ,which is built by adding a nonlinear controller to a three-dimensional continuous-time autonomous chaotic system. The hyperchaotic system is analyzed by studying the Lyapunov exponent spectrum and bifurcation diagram. The system will take on periodic and complex periodic , chaotic and hyperchaotic behaviors with change of the parameter. Also ,an electronic circuit is designed and realized ,the experimental results verify the conclusions.

Keywords : hyperchaos , Lyapunov exponents , bifurcation diagram , chaotic circuit

PACC : 0545

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 60572025 and 60872123) , and the Joint Fund of the Nation Natural Science Foundation and the Guangdong Provincial Natural Science Foundation , China (Grant No. U0835001).

† Corresponding author. E-mail : fengjc@scut.edu.cn