

待定固有频率法在分析系统 混沌临界值问题中的应用*

王 炜[†] 张琪昌 王雪娇

(天津大学机械工程学院, 天津 300072)

(2008 年 9 月 8 日收到, 2008 年 10 月 7 日收到修改稿)

利用规范形理论与待定固有频率寻求改善 Melnikov 函数分析非线性振动系统混沌阈值的简单方法, 着重讨论参数与周期激励联合作用下具有主参数共振的三阱势能系统, 建立了其 Melnikov 函数积分式. 引入由待定固有频率形成的时间尺度变换, 从同宿及异宿分岔两个角度获取系统的混沌临界值, 使得非线性扰动量对于基频的影响有效地体现于 Melnikov 函数表达式中, 进而结合相应的分析过程提高所得结果的计算精度. 作为算例, 对解析解与数值积分结果进行了对比, 以验证提出方法的有效性与其可行性.

关键词: 规范形, Melnikov 方法, 混沌, 同宿分岔

PACC: 0340, 0540, 0547

1. 引 言

研究非线性振动系统的同(异)宿分岔对于分析系统的全局动力学行为具有重要的理论价值. 在现有研究上述分岔问题的解析方法中, 最为常用的是 Melnikov 方法^[1], 通过度量分裂后稳定流形与不稳定流形间距离函数的零点, 可以确定发生同(异)分岔的临界参数值, 对象涉及单阱、双阱, 甚至三阱势能系统; 其中三阱势能系统, 因其蕴含更加复杂的动力学行为而成为近年来 Melnikov 函数应用研究的热点和难点问题^[2,3]. 采用 Melnikov 方法判定存在 Smale 马蹄意义下的混沌所产生的参数值可能与数值上出现反应混沌运动的奇怪吸引子的参数值相差甚远, 这导致系统的混沌以及混沌控制研究在某些情况下难以取得预期的效果^[4]. 考虑到 Melnikov 函数在众多非线性振动问题中应用的广泛性^[5-8], 有必要针对现有解析方法作进一步的改进, 通过比较简便的途径获取相对更高精度的阈值. 为此, 本文尝试在非线性振动系统 Melnikov 函数求解过程中引入待定固有频率^[9-11], 以提高传统方法的计算精度. 首先, 利用复数形式规范形方法^[12]获得了一类单自由

度、参数与周期激励联合作用下具有主参数共振的 Φ^6 -van der Pol 三阱势能系统的规范形. 而后, 通过引入由待定固有频率形成的时间尺度变换, 获取充分考虑扰动量作用下系统新的同、异宿轨道与时间的关系表达式, 替换原有算法距离函数展开式的首项, 并结合相应的推导过程相对简便地确定了同宿、异宿两种分岔情况下 Smale 马蹄意义混沌的阈值. 通过算例, 验证了本文方法对于分析此类问题的有效性与可行性.

2. 非线性振动系统的稳态响应

考察如下含有 3 阶和 5 阶非线性项的 Φ^6 -van der Pol 振动系统受到参数与周期激励的作用:

$$\begin{aligned} \ddot{u} + u\omega_0^2 + \alpha u^3 + \beta u^5 - \epsilon(\mu - \gamma_1 u^2 - \gamma_2 u^4)\dot{u} \\ + F\epsilon \cos(\Omega_1 t) \\ = \epsilon S \cos(\Omega_2 t), \end{aligned} \quad (1)$$

其中系统的固有频率为 ω_0 , ϵ 为扰动参数. 本文采用规范形理论结合待定固有频率法计算系统的规范形并展开相关讨论. 首先引入复变量 ξ 和 z_1, z_2 ,

$$\begin{aligned} u &= \xi + \bar{\xi}, \\ \dot{u} &= i\omega_0(\xi - \bar{\xi}), \end{aligned}$$

* 国家自然科学基金(批准号:10872141)资助的课题.

[†] E-mail: wangweifrancois@yahoo.com.cn

$$\begin{aligned} z_1 &= e^{i\Omega_1 t}, \\ \dot{z}_1 &= i\Omega_1 z_1, \\ z_2 &= e^{i\Omega_2 t}, \\ \dot{z}_2 &= i\Omega_2 z_2. \end{aligned} \quad (2)$$

这里 $\bar{\xi}$ 表示 ξ 的共轭; ω_{10} 为待定的固有频率, 用以取代传统算法中的固有频率, 可以在得到的平均方程与渐近解中有效地体现非线性项参数对于系统频率的影响, 文献 [9—11] 应用该方法研究了强非线性振动系统的渐近解与分岔等问题.

求解方程 (2), 得

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{2} \left(u - \frac{i}{\omega_{10}} \dot{u} \right), \\ \bar{\xi} &= \frac{1}{2} \left(u + \frac{i}{\omega_{10}} \dot{u} \right), \end{aligned} \quad (3)$$

将 (3) 式中的第一式对时间 t 求导, 并考虑 (1) 和 (2) 式可得

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \frac{i}{2\omega_{10}} \{ \alpha(\xi + \bar{\xi})^3 + \beta(\xi + \bar{\xi})^5 \\ &+ (\xi + \bar{\xi})\omega_0^2 + (\xi - \bar{\xi})\omega_0^2 \\ &+ i\epsilon(\xi - \bar{\xi})\mathbb{I} - \mu + (\xi + \bar{\xi})^3\gamma_1 \\ &+ (\xi + \bar{\xi})^4\gamma_2\mathbb{I}\omega_{10} + \frac{1}{2}F\epsilon(\xi + \bar{\xi})\mathbb{X}(z_1 + \bar{z}_1) \\ &- \frac{1}{2}S\epsilon(z_2 + \bar{z}_2) \}. \end{aligned} \quad (4)$$

为简化 (4) 式以得到系统的规范形, 引入直至 5 阶的非线性变换

$$\begin{aligned} \xi &= \eta + h_1(\eta, \bar{\eta}, z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2) \\ &+ h_2 + h_3 + h_4 + h_5, \end{aligned} \quad (5)$$

其中

$$\begin{aligned} h_n &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} \sum_{k=0}^{n-i-j} \sum_{l=0}^{n-i-j-k} \sum_{m=0}^{n-i-j-k-l} \\ &\times \Gamma_{i,j,k,l,m} \eta^i \bar{\eta}^j z_1^k \bar{z}_1^l z_2^m \bar{z}_2^{n-i-j-k-l-m} \\ &\times \eta^i \bar{\eta}^j z_1^k \bar{z}_1^l z_2^m \bar{z}_2^{n-i-j-k-l-m} \\ &(n = 1, 2, \dots, 5). \end{aligned}$$

以 $\Omega_1 \approx 2\omega_{10}$ 和 $\Omega_2 \approx \omega_{10}$ 的主参数共振情况为基础, 计算系统 (1) 直至 5 阶的规范形^[12]

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= \frac{(\omega_0^2 + \omega_{10}^2)}{\epsilon\mu - 2i\omega_{10}} \eta + \frac{(3\alpha + i\epsilon\gamma_1\omega_{10})}{\epsilon\mu - 2i\omega_{10}} \eta^2 - \\ &+ \frac{\mathbb{X}(5\beta + i\epsilon\gamma_2\omega_{10})}{\epsilon\mu - 2i\omega_{10}} \eta^3 - \eta^2 \\ &+ \frac{F\epsilon}{2\epsilon\mu - 4i\omega_{10}} z_1 \bar{\eta} - \frac{S\epsilon}{2\epsilon\mu - 4i\omega_{10}} z_2. \end{aligned} \quad (6)$$

将 (6) 式中的变量 η 和 z_1, z_2 表示为极坐标的形式

即

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{1}{2} a e^{i\omega_{10} t}, \\ z_1 &= e^{2i\omega_{10} t}, \\ z_2 &= e^{i\omega_{10} t}. \end{aligned}$$

分离所得复数方程的实部与虚部, 并且应用系统存在定常解条件 $\dot{a} = 0$, 可得

$$\begin{aligned} &(6a^3\alpha + 5a^5\beta + 4aF\epsilon - 8S\epsilon + 8a\omega_0^2)\mu \\ &- \mathbb{X}(4a\mu + 2a^3\gamma_1 + a^5\gamma_2)\omega_{10}^2 \\ &= 0, \\ &2a^3\epsilon^2\mu\gamma_1 + a^5\epsilon^2\mu\gamma_2 + \mathbb{X}(6a^3\alpha + 5a^5\beta \\ &+ 4aF\epsilon - 8S\epsilon - 4a\epsilon^2\mu^2 + 8a\omega_0^2 - 8a\omega_{10}^2) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

求解 (7) 式中的系统振幅 a 和待定固有频率 ω_{10} , 得到

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{\frac{-\gamma_1 + \sqrt{\gamma_1^2 + 8\mu\gamma_2}}{\gamma_2}}, \\ \omega_{10} &= \sqrt{\omega_0^2 + \frac{3}{4}a^2\alpha + \frac{5}{8}a^4\beta + \frac{1}{2}F\epsilon - \frac{S\epsilon}{a}}. \end{aligned} \quad (8)$$

将 (8) 式的结果和已知的非线性变换系数全部代入 (2) 式中, 可以获得系统的稳态解.

3. 系统的平衡点与同(异)宿轨道

在系统 (2) 中引入由待定固有频率形成的时间尺度变换 $T = \omega_{10} t$, 构造新的系统同(异)宿轨道 $\tilde{q}^{\pm}(T)$, 并以此为基础替代原有算法距离函数展开式的首项——保守系统轨道 $q^{\pm}(t)^{[2-4]}$ 展开后续 Melnikov 函数的计算分析.

$$\begin{aligned} &\omega_{10}^2 \ddot{u} + u\omega_0^2 + \alpha u^3 + \beta u^5 \\ &- \epsilon\omega_{10}(\mu - \gamma_1 u^2 - \gamma_2 u^4) \dot{u} \\ &+ F\epsilon \cos 2T \\ &= \epsilon S \cos T. \end{aligned} \quad (9)$$

方程两边同时除以 ω_{10}^2 ($\omega_{10} \neq 0$), 可得

$$\begin{aligned} &\ddot{u} + u \frac{\omega_0^2}{\omega_{10}^2} + \frac{\alpha}{\omega_{10}^2} u^3 + \frac{\beta}{\omega_{10}^2} u^5 \\ &- \frac{\epsilon}{\omega_{10}} (\mu - \gamma_1 u^2 - \gamma_2 u^4) \dot{u} \\ &+ \frac{F\epsilon}{\omega_{10}^2} \cos 2T \\ &= \frac{\epsilon S}{\omega_{10}^2} \cos T. \end{aligned} \quad (10)$$

(10) 式的一阶保守系统可以表示为

$$\begin{aligned} \dot{u} &= v, \\ \dot{v} &= -u \frac{\omega_0^2}{\omega_{10}^2} - \frac{\alpha}{\omega_{10}^2} u^3 - \frac{\beta}{\omega_{10}^2} u^5. \end{aligned} \quad (11)$$

保守系统(11)的总能量为

$$H(u, v) = \frac{1}{2} v^2 + \frac{\omega_0^2}{2\omega_{10}^2} u^2 + \frac{\alpha}{4\omega_{10}^2} u^4 + \frac{\beta}{6\omega_{10}^2} u^6, \quad (12)$$

其中势能为

$$V(u) = \frac{\omega_0^2}{2\omega_{10}^2} u^2 + \frac{\alpha}{4\omega_{10}^2} u^4 + \frac{\beta}{6\omega_{10}^2} u^6. \quad (13)$$

由(13)式与非线性动力学理论可知:当 $\alpha < 0, \alpha^2 < 4\beta\omega_0^2$ 或者 $\alpha > 0, \beta > 0$ 时,系统(11)只有一个平衡点.当 $\beta < 0$ 时,系统(11)具有一个中心和两个鞍点,

构成异宿轨道连接.当 $\alpha < 0, 0 < 4\beta\omega_0^2 < \alpha^2$ 时系统(11)具有 5 个平衡点,分别是中心 $X_0(0, 0)$,

$$\begin{aligned} X_1^+ &\left(\sqrt{-\frac{\alpha}{2\beta} + \frac{\sqrt{\alpha^2 - 4\beta\omega_0^2}}{2\beta}}, 0 \right), X_1^- \left(-\sqrt{-\frac{\alpha}{2\beta} + \frac{\sqrt{\alpha^2 - 4\beta\omega_0^2}}{2\beta}}, 0 \right), \\ X_2^+ &\left(\sqrt{-\frac{\alpha}{2\beta} - \frac{\sqrt{\alpha^2 - 4\beta\omega_0^2}}{2\beta}}, 0 \right), \\ X_2^- &\left(-\sqrt{-\frac{\alpha}{2\beta} - \frac{\sqrt{\alpha^2 - 4\beta\omega_0^2}}{2\beta}}, 0 \right). \end{aligned}$$

此处,我们着重讨论 $\alpha < 0, 0 < 4\beta\omega_0^2 < \alpha^2$ 时所对应的三阱势能情形,其势能曲线与同(异)宿轨道如图 1 所示,从中可以发现保守系统不但可以具有同宿轨道(图 1(a))还具有异宿轨道(图 1(b))连接.

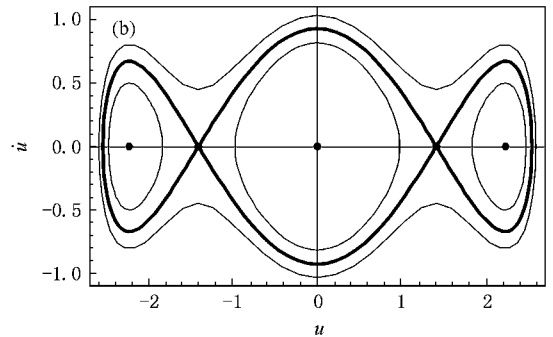
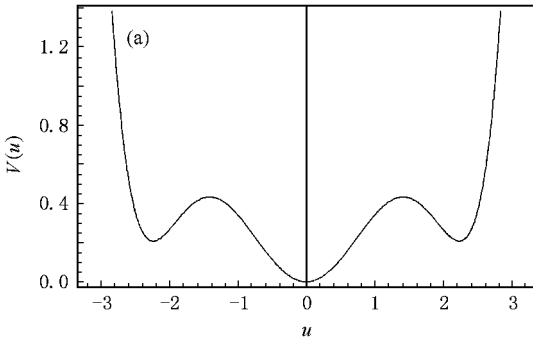


图 1 保守系统势能曲线及同(异)宿轨道 (a)势能曲线 (b)同(异)宿轨道

通过积分,建立系统(11)的同宿轨道与时间的关系表达式

$$\begin{aligned} \tilde{q}_{\text{hom}}^\pm(T) &= (\tilde{q}_{\text{hom}}^\pm(T), \dot{\tilde{q}}_{\text{hom}}^\pm(T)) \\ &= \left(\pm \frac{X_2 \sqrt{2} \cosh\left(\frac{\kappa T}{2}\right)}{\sqrt{\delta + \cosh(\kappa T)}}, \right. \\ &\quad \left. \mp \frac{\kappa X_2 \sqrt{2} (1 - \delta) \sinh\left(\frac{\kappa T}{2}\right)}{2(\delta + \cosh(\kappa T))^{3/2}} \right) \end{aligned} \quad (14)$$

和异宿轨道与时间的关系表达式

$$\begin{aligned} \tilde{q}_{\text{het}}^\pm(T) &= (\tilde{q}_{\text{het}}^\pm(T), \dot{\tilde{q}}_{\text{het}}^\pm(T)) \\ &= \left(\pm \frac{X_2 \sqrt{2} \sinh\left(\frac{\kappa T}{2}\right)}{\sqrt{-\delta + \cosh(\kappa T)}}, \right. \\ &\quad \left. \pm \frac{\kappa X_2 \sqrt{2} (1 - \delta) \cosh\left(\frac{\kappa T}{2}\right)}{2(-\delta + \cosh(\kappa T))^{3/2}} \right), \end{aligned} \quad (15)$$

其中

$$\begin{aligned} \kappa &= X_2^2 \sqrt{2 \frac{\beta}{\omega_{10}^2} (\rho - 1)}, \\ \delta &= \frac{5 - 3\rho}{3\rho - 1}, \\ \rho &= \frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\beta\omega_0^2}}{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\beta\omega_0^2}}. \end{aligned}$$

4. 非线性振动系统的 Melnikov 方法

首先给出小扰动量作用下,平面 Hamilton 系统的 Melnikov 函数表达式^[4]

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + \varepsilon g(x, t), \\ x &= \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \end{aligned} \quad (16)$$

其中

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix},$$

$$g(x, t) = \begin{pmatrix} g_1(x, t) \\ g_2(x, t) \end{pmatrix}$$

是 t 的周期函数. 假设当 $\varepsilon = 0$ 时, Hamilton 系统存在一个双曲鞍点 p_0 以及一条连结鞍点的同宿轨道 $q^\pm(t)$. 如图 2 所示, 在充分小的扰动量 ε 作用下, 系统存在唯一的双曲周期轨道, 即 Poincaré 映射存在唯一的双曲鞍点 $p_\varepsilon^0 = p_0 + O(\varepsilon)$, 双曲周期轨道的局部稳定流形和局部不稳定流形是 C^r 接近于 $\varepsilon = 0$ 时未扰系统周期轨道的局部稳定流形与局部不稳定流形. 定义 Melnikov 函数

$$M(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(q^\pm(t)) \Delta g(q^\pm(t), t + t_0) dt. \quad (17)$$

该积分函数的零点对应于 Poincaré 映射的同宿点, 简单零点对应于横截同宿点.

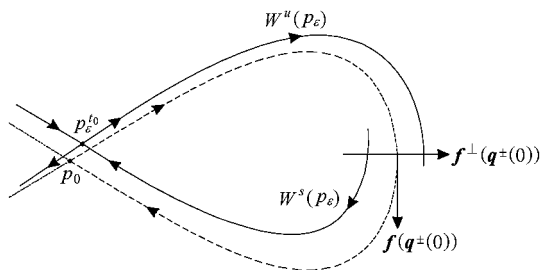


图 2 扰动流形与距离函数示意图

利用(14)和(15)式中得到的同宿、异宿轨道 $\tilde{q}^\pm(T)$ 来替代原有的 $q^\pm(t)$ 进行分析. 在 Σ^{T_0} 上, 假设轨道 $q_\varepsilon^s(T, T_0)$ 和 $q_\varepsilon^u(T, T_0)$ 可以表示为如下渐近展开式的形式:

$$\begin{aligned} q_\varepsilon^s(T, T_0) &= \tilde{q}^\pm(T - T_0) + \varepsilon \tilde{q}_1^\pm(T, T_0) + O(\varepsilon^2) \\ &\quad (T \in [T_0, \infty)), \\ q_\varepsilon^u(T, T_0) &= \tilde{q}^\pm(T - T_0) + \varepsilon \tilde{q}_1^\pm(T, T_0) + O(\varepsilon^2) \\ &\quad (T \in (-\infty, T_0]). \end{aligned} \quad (18)$$

从而形成新的 Melnikov 函数积分表达式

$$M(T_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tilde{q}^\pm(T)) \Delta g(\tilde{q}^\pm(T), T + T_0) dt. \quad (19)$$

较之(17)式 $M(T_0)$ 中引入了待定固有频率 ω_{10} , 更加充分地考虑了扰动量对于轨道 $\tilde{q}^\pm(T)$ 的影响, 因而有助于提高所得混沌临界值的计算精度.

利用上述结果计算系统(10)式的 Melnikov 函数

$$\begin{aligned} M(T_0) &= \frac{1}{\omega_{10}} \int_{-\infty}^{+\infty} [(\mu - \gamma_1 \tilde{q}_h^\pm(T))^2 \\ &\quad - \gamma_2 \tilde{q}_h^\pm(T) \dot{\tilde{q}}_h^\pm(T)] \dot{\tilde{q}}_h^\pm(T) dt \\ &\quad + \frac{1}{\omega_{10}^2} \int_{-\infty}^{+\infty} [-\tilde{q}_h^\pm(T) F \cos \chi(T + T_0) \\ &\quad + S \cos \chi(T + T_0)] \dot{\tilde{q}}_h^\pm(T) dt. \end{aligned} \quad (20)$$

其中

$$(\tilde{q}_h^\pm(T), \dot{\tilde{q}}_h^\pm(T)) = (\tilde{q}_{\text{hom}}^\pm(T), \dot{\tilde{q}}_{\text{hom}}^\pm(T))$$

或者

$$(\tilde{q}_h^\pm(T), \dot{\tilde{q}}_h^\pm(T)) = (\tilde{q}_{\text{het}}^\pm(T), \dot{\tilde{q}}_{\text{het}}^\pm(T)).$$

下面我们就从同宿、异宿分岔两个方面阐述(20)式的积分结果.

4.1. 同宿分岔

将系统同宿轨道与时间的关系表达式 $\tilde{q}_{\text{hom}}^\pm(T)$ 代入到(20)式中, 可得

$$M_{\text{hom}}(T_0) = M_{\text{hom-1}} + M_{\text{hom-2}} \sin T_0 - M_{\text{hom-3}} \sin 2T_0, \quad (21)$$

其中

$$\begin{aligned} M_{\text{hom-1}} &= \frac{(2 + \delta) \kappa \mu X_2^2}{4(1 + \delta) \omega_{10}} - \frac{(2 + \delta^2) \kappa X_2^4 \gamma_1}{1 \chi (1 + \delta)^2 \omega_{10}} \\ &\quad - \frac{(8 - 5\delta + 4\delta^2 + 2\delta^3) \kappa X_2^6 \gamma_2}{4 \chi (1 + \delta)^3 \omega_{10}} \\ &\quad + \left[\frac{(1 + 2\delta) \kappa \mu X_2^2}{2 \sqrt{1 - \delta} (1 + \delta)^{3/2} \omega_{10}} \right. \\ &\quad - \frac{\delta \kappa X_2^4 \gamma_1}{2 \sqrt{1 - \delta} (1 + \delta)^2 \omega_{10}} \\ &\quad + \frac{\kappa X_2^6 \gamma_2}{8 \sqrt{1 - \delta} (1 + \delta)^2 \omega_{10}} \\ &\quad \left. - \frac{\delta \kappa X_2^6 \gamma_2}{2 \sqrt{1 - \delta} (1 + \delta)^2 \omega_{10}} \right] \\ &\quad \times \left[\arctan\left(\frac{\delta}{\sqrt{1 - \delta^2}}\right) - \arctan\left(\frac{1 + \delta}{\sqrt{1 - \delta^2}}\right) \right]. \end{aligned}$$

$$M_{\text{hom-2}} = \frac{2SX_2}{\omega_{10}^2} \sin \frac{2}{\kappa},$$

$$M_{\text{hom-3}} = \frac{2F\pi(1 - \delta)X_2^2}{\sqrt{1 - \delta^2} \kappa \omega_{10}^2} \operatorname{csch} \frac{2\pi}{\kappa} \sinh\left(\frac{2 \arccos \delta}{\kappa}\right),$$

当 $M_{\text{hom}}(T_0) = 0$ 时, 系统的同宿分岔得以发生. 若进一步简化, 可以得到

$$\frac{X_2}{48\omega_{10}^2} \left\{ 96S \sin \frac{2}{\kappa} \sin T_0 + \frac{96F\pi(-1 + \delta)X_2}{\sqrt{1 - \delta^2}} \right\}$$

$$\begin{aligned}
& \times \operatorname{csch} \frac{2\pi}{\kappa} \sinh\left(\frac{2\arccos\delta}{\kappa}\right) \sin 2T_0 \\
& - \frac{4(2+\delta^2)\kappa X_2^3 \gamma_1 \omega_{10}}{(1+\delta)^3} + \frac{12(2+\delta)\kappa\mu X_2 \omega_{10}}{1+\delta} \\
& - \frac{(8-5\delta+4\delta^2+2\delta^3)\kappa X_2^5 \gamma_2 \omega_{10}}{(1+\delta)^3} \\
& + \frac{6\kappa X_2}{\sqrt{1-\delta}(1+\delta)^{3/2}} \left[\arctan\left(\frac{\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}\right) \right. \\
& \left. - \arctan\left(\frac{1+\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}\right) \right] \\
& \times [4(1+\delta)(1+2\delta)\mu - 4\delta(1+\delta)\kappa X_2^2 \gamma_1 \\
& + (1-4\delta)X_2^4 \gamma_2] \omega_{10} \} = 0. \quad (22)
\end{aligned}$$

应用(8)式中的 ω_{10} 结果,同时以外加激励的幅值 $S = S_c$ 作为分岔参数,考虑 $M_{\text{het}}(T_0)$ 具有简单零点的情况,可以确定由同宿分岔衍生出的混沌运动的阈值.

4.2. 异宿分岔

将系统异宿轨道与时间的关系表达式 $\tilde{q}_{\text{het}}^{\pm}(T)$ 代入到(20)式中,可得

$$M_{\text{het}}(T_0) = M_{\text{het-1}} + M_{\text{het-2}} \cos T_0 - M_{\text{het-3}} \sin 2T_0, \quad (23)$$

其中

$$\begin{aligned}
M_{\text{het-1}} &= \frac{(2+\delta)\kappa\mu X_2^2}{4(1+\delta)\omega_{10}} - \frac{(2+\delta^2)\kappa X_2^4 \gamma_1}{12(1+\delta)^3 \omega_{10}} \\
& - \frac{(8-5\delta+4\delta^2+2\delta^3)\kappa X_2^6 \gamma_2}{48(1+\delta)^3 \omega_{10}} \\
& + \left[\frac{(1+2\delta)\kappa\mu X_2^2}{2\sqrt{1-\delta}(1+\delta)^{3/2} \omega_{10}} \right. \\
& - \frac{\delta\kappa X_2^4 \gamma_1}{2\sqrt{1-\delta}(1+\delta)^{5/2} \omega_{10}} \\
& \left. + \frac{(1-4\delta)\kappa X_2^6 \gamma_2}{8\sqrt{1-\delta}(1+\delta)^{7/2} \omega_{10}} \right] \\
& \times \left[\arctan\left(\frac{\sqrt{1-\delta}}{\sqrt{1+\delta}}\right) + \arctan\left(\frac{\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}\right) \right].
\end{aligned}$$

$$M_{\text{het-2}} = \frac{2S\pi X_2}{\kappa\omega_{10}^2} \operatorname{csch} \frac{\pi}{\kappa},$$

$$M_{\text{het-3}} = \frac{2F\pi(1-\delta)X_2^2}{\sqrt{1-\delta^2}\kappa\omega_{10}^2} \operatorname{csch} \frac{2\pi}{\kappa} \sinh\left(\frac{2\pi-2\arccos\delta}{\kappa}\right),$$

当 $M_{\text{het}}(T_0) = 0$ 时,系统的异宿分岔得以发生.若进一步简化,可以得到

$$\frac{X_2}{48\kappa\omega_{10}^2} \left\{ 96\pi S \cos T_0 \operatorname{csch} \frac{\pi}{\kappa} \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{96F\pi(-1+\delta)X_2}{\sqrt{1-\delta^2}} \\
& \times \operatorname{csch} \frac{2\pi}{\kappa} \sinh\left(\frac{2\pi-2\arccos\delta}{\kappa}\right) \sin 2T_0 \\
& + \frac{12(2+\delta)\kappa^2 \mu X_2 \omega_{10}}{1+\delta} \\
& - \frac{4(2+\delta^2)\kappa^2 X_2^3 \gamma_1 \omega_{10}}{(1+\delta)^3} \\
& - \frac{(8-5\delta+4\delta^2+2\delta^3)\kappa^2 X_2^5 \gamma_2 \omega_{10}}{(1+\delta)^3} \\
& + \frac{6\kappa^2 X_2}{\sqrt{1-\delta}(1+\delta)^{3/2}} \left[\arctan\left(\frac{\sqrt{1-\delta}}{\sqrt{1+\delta}}\right) \right. \\
& \left. + \arctan\left(\frac{\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}\right) \right] \\
& \times [4(1+\delta)(1+2\delta)\mu - 4\delta(1+\delta)X_2^2 \gamma_1 \\
& + (1-4\delta)X_2^4 \gamma_2] \omega_{10} \} = 0. \quad (24)
\end{aligned}$$

应用(8)式中的 ω_{10} 结果,同时以外加激励的幅值 $S = S_c$ 作为分岔参数,考虑 $M_{\text{het}}(T_0)$ 具有简单零点的情况,则可以确定由异宿分岔衍生出的混沌运动的阈值.

5. 算例分析

应用上述结果,研究非线性振动系统的同宿分岔和异宿分岔问题,并通过与传统方法以及数值方法的对比验证本文方法的有效性.

5.1. 同宿分岔

选取系统(2)中的扰动参数 $\epsilon = 0.1$,建立如下的 Φ^6 -van der Pol 非自治振动系统,并利用本文方法计算其由于同宿分岔衍生出的混沌运动阈值.

$$\begin{aligned}
& \ddot{u} + (0.92)^2 u - 3u^3 + 2.3u^5 + \epsilon(0.09 \\
& - 0.21u^2 - u^4)\dot{u} + 0.9\epsilon u \cos(\Omega_1 t) \\
& = \epsilon S \cos(\Omega_2 t). \quad (25)
\end{aligned}$$

由(22)式可知 $S_c = -0.4$,相应的数值积分结果为 $S_c = -0.36$,而原有 Melnikov 方法结果为 $S_c = -0.16$.图 3(a)为 $S = -0.385$ 处的混沌相图,图 3(b)为此时系统的 Lyapunov 指数谱.通过分析可以发现,此时系统的最大 Lyapunov 指数 $\lambda_1 = 0.0511089 > 0$,同时满足 $\lambda_2 = 0, \lambda_3 = -0.10448, \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 < 0$ 的混沌吸引子指数形式要求^[13,14];系统的 Hausdorff 维数(分数维)等于 2.48918,从而验证了混

沌吸引子的存在性.

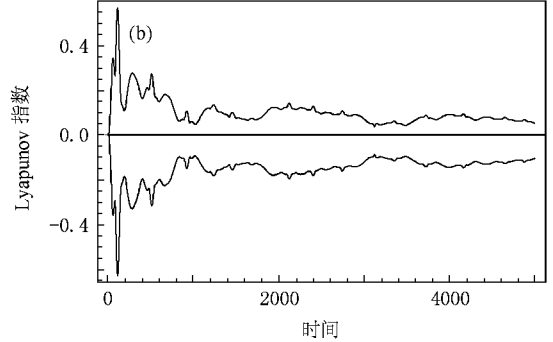
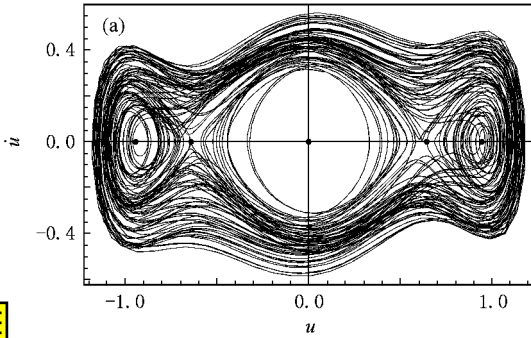


图 3 同宿分岔 (a)衍生出的混沌相图 (b) Lyapunov 指数谱

5.2. 异宿分岔

选取系统 (2) 中的扰动参数 $\epsilon = 0.1$, 建立如下的 Φ^6 -van der Pol 非自治振动系统 , 并利用本文方法计算其由于异宿分岔衍生出的混沌运动阈值.

$$\begin{aligned} &\ddot{u} + u - 3u^3 + 2.1u^5 + \epsilon(0.06 - u^2 \\ &- 4u^4)\dot{u} + 1.5\epsilon u \cos(\Omega_1 t) \\ &= \epsilon S \cos(\Omega_2 t). \end{aligned} \tag{26}$$

由 (24) 式可知 $S_c = 0.428$, 相应的数值积分结果为 $S_c = 0.415$, 原有 Melnikov 方法结果为 $S_c = 0.25$. 图 4 (a) 为 $S = 0.45$ 处的混沌相图 , 图 4 (b) 为此时系统的 Lyapunov 指数谱 . 通过分析可以发现 , 此时系统的最大 Lyapunov 指数 $\lambda_1 = 0.0640491 > 0$, 且满足 $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = -0.141797$, $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 < 0$ 的混沌吸引子指数形式要求 ; 系统的 Hausdorff 维数 (分数维) 等于 2.45169 , 从而验证了混沌吸引子的存在性 .

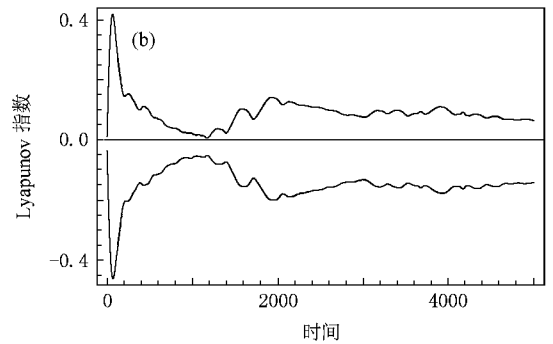
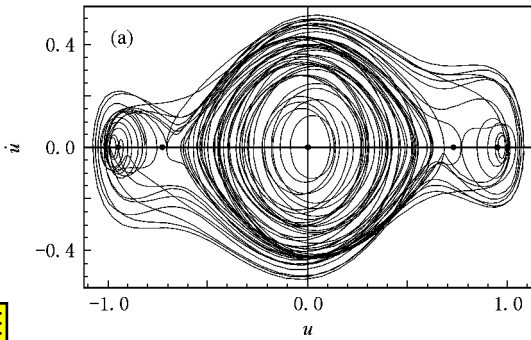


图 4 异宿分岔 (a)衍生出的混沌相图 (b) Lyapunov 指数谱

6. 结 论

本文将待定固有频率法用于分析非线性振动系统 (同 / 异) 宿分岔问题 , 获取提高 Melnikov 函数判定 Smale 马蹄意义下混沌临界值的有效方法 . 通过引入以待定固有频率为基础的时间尺度变换 , 构造非线性振动系统的 (同 / 异) 宿轨道 , 替换原有算法距离函

数展开式的首项 , 有助于充分考虑小扰动量的影响 , 提高 Melnikov 方法分析混沌问题的求解精度 .

本文的研究对象主要针对单自由度非自治参数共振的三阱势能系统 , 因此该方法对于分析单阱及双阱势能系统仍然具有可行性 . 而将其与高阶 Melnikov 方法相结合则可以进一步改善求解问题的计算精度 , 对于非线性振动系统的混沌和混沌控制研究都是有益的尝试 .

[1] Melnikov V K 1963 *Trans. Moscow Math. Soc.* **12** 1

Comput. Nonlinear Dynam. **1** 196

[2] Siewe M S , Kahmeni F M M , Tchawoua C , Woato P 2006 *J.*

[3] Siewe M S , Kahmeni F M M , Tchawoua C , Woato P 2005 *Physica*

- A 357 383
- [4] Liu Z R 1994 *Perturbation Criteria for Chaos* (Shanghai : Shanghai Scientific and Technological Education Publishing House) 112 (in Chinese)[刘曾荣 1994 混沌的微扰判据 (上海 : 上海科技教育出版社) 第 112 页]
- [5] Lei Y M , Xu W 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 3342 (in Chinese)[雷佑铭、徐 伟 2008 物理学报 **57** 3342]
- [6] Lei Y M , Xu W 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 5103 (in Chinese)[雷佑铭、徐 伟 2007 物理学报 **56** 5103]
- [7] Wu Q , Li F 2007 *Chin. Phys. Lett.* **24** 640
- [8] Luo S Y , Shao M Z , Wei L X , Liu Z R 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 1940 (in Chinese)[罗诗裕、邵明珠、韦洛霞、刘曾荣 2004 物理学报 **53** 1940]
- [9] Zhang Q C , Wang W , He X J 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 5384 (in Chinese)[张琪昌、王 炜、何学军 2008 物理学报 **57** 5384]
- [10] Zhang Q C , Wang W , Li W Y 2008 *Chin. Phys. Lett.* **25** 1905
- [11] Wang W , Zhang Q C , Tian R L 2008 *J. Vib. Shock* **27** 130 (in Chinese)[王 炜、张琪昌、田瑞兰 2008 振动与冲击 **27** 130]
- [12] Nayfeh A H 1993 *Method of Normal Forms* (New York : John Wiley & Sons) p14
- [13] Sandri M 1996 *Math. J.* **6** 78
- [14] Haken H 1983 *Phys. Lett. A* **94A** 71

The application of the undetermined fundamental frequency for analyzing the critical value of chaos ^{*}

Wang Wei[†] Zhang Qi-Chang Wang Xue-Jiao

(School of Mechanical Engineering , Tianjin University , Tianjin 300072 , China)

(Received 8 September 2008 ; revised manuscript received 7 October 2008)

Abstract

The simple approach to improve the computational precision of Melnikov method is presented by using the undetermined fundamental frequency and normal form method. We construct the improved Melnikov expression for a triple-well nonlinear oscillator subject to principal parametric resonance and external excitation. For the occurrence of chaos , the approximate threshold values of chaotic motion are obtained from the Homoclinicity and Heteroclinicity points of view. It depends on the introduction of undetermined fundamental frequency , and adopting new time transformation for fulfilling the homoclinic and heteroclinic orbits , so that the effect of disturbing parameter can be easily detected and embodied in the Melnikov operation. As is illustrated , the explicit applications show that the improved results coincide very well with the results of numerical simulation.

Keywords : normal form , Melnikov method , chaos , homoclinic bifurcation

PACC : 0340 , 0540 , 0547

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10872141).

[†] E-mail : wangweifrancois@yahoo.com.cn