

# 一类滞后相对转动动力学方程的分岔特性 及其解析近似解\*

侯东晓<sup>†</sup> 刘 彬 时培明

(燕山大学, 秦皇岛 066004)

(2008 年 10 月 25 日收到, 2008 年 12 月 1 日收到修改稿)

建立了一类含 Davidenkov 滞后环的非线性相对转动动力学方程, 分别分析了该非线性相对转动自治方程和微外扰下非自治方程的分岔特性, 并采用 KBM 法求解了滞后环指数  $n=2$  时该非线性相对转动方程在周期激励下的解析近似解. 通过数值仿真, 得到了几种分岔结构及外扰下全局分岔图, 同时将数值解与本文 KBM 法求解结果进行比较, 证明本文求解结果有较高的精度, 为研究这一类滞后相对转动系统提供了理论参考依据.

关键词: 相对转动, 滞后环, 分岔, KBM 法

PACC: 0340D, 0547

## 1. 引 言

转动是自然界中比较普遍的物理现象. 自 Carmeli<sup>[1,2]</sup>1985 年提出了转动相对论力学的理论以来, 转动相对论理论的研究引起了人们的广泛重视. 1996 年 Luo<sup>[3-5]</sup>建立了转动系统的相对论性分析力学理论, 并构造出转动相对论的 Hamilton 系统的积分变量. 近年来相对论分析力学和转动相对论分析力学的研究得到了很大发展<sup>[6,7]</sup>. 文献 [8-12] 基于相对性原理, 建立了弹性转轴任意两横截面间的相对转动线性和非线性动力学方程并进行了定量分析. 文献 [13] 研究了一类周期变系数线性系统的非线性相对转动系统的稳定性. 文献 [14-17] 研究了归结为一类含非线性阻尼或非线性刚度项的相对转动动力学系统的稳定性, 并对非线性相对转动系统的解进行了定量分析.

本文在考虑材料滞后特性的基础上, 基于广义拉格朗日方程建立了一类含 Davidenkov 滞后环连续轴的相对转动动力学方程. 分析了该非线性方程在自治和非自治情况下的分岔特性, 并采用 KBM 法求解了滞后环指数  $n=2$  时该非线性相对转动系统在

周期激励下的解析近似解. 最后通过数值仿真与本文 KBM 法结果进行比较, 表明本文结果有较高精度, 为研究这类滞后相对转动系统提供了参考依据.

## 2. 含 Davidenkov 滞后环的连续相对转动动力学方程

转动系统是广泛存在的动力传递系统. 设某一弹性转轴两个端面的扭转角分别为  $\theta_1$  和  $\theta_2$ , 考虑弹性转轴连续分布惯量可得其动能为<sup>[8]</sup>

$$E = \frac{1}{6} J (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2), \quad (1)$$

其中  $J$  为弹性转轴的转动惯量.

Davidenkov<sup>[18]</sup>提出了用两段光滑曲线描述的滞后模型, 该模型能够描述一类广泛的非线性滞后系统, 并且和实验结果能较好地符合, 引起了许多学者的关注和研究<sup>[19-24]</sup>. 含有 Davidenkov 滞后环的弹性转轴扭转力矩可用下式表示:

$$M = K \left\{ (\theta_2 - \theta_1) \mp \frac{\eta}{n} \left[ u_0 \mp (\theta_2 - \theta_1) \right]^n - 2^{n-1} u_0^n \right\}, \quad (2)$$

其中  $M$  为转轴的扭矩,  $\theta_2 - \theta_1$  为转轴的扭转角,  $K$

\* 国家十一五科技攻关项目(批准号:2007BAF02B10), 河北省自然科学基金(批准号:F2008000882), 河北省教育厅基金(批准号:ZH2007102, 2007496)资助的课题.

<sup>†</sup> E-mail: houdongxiao1982@163.com

为材料的线性扭转弹性刚度,  $\eta$  为滞后环系数,  $n$  为滞后环指数,  $\eta$  和  $n$  的选取与材料特性有关, 该滞后模型如图 1 所示.

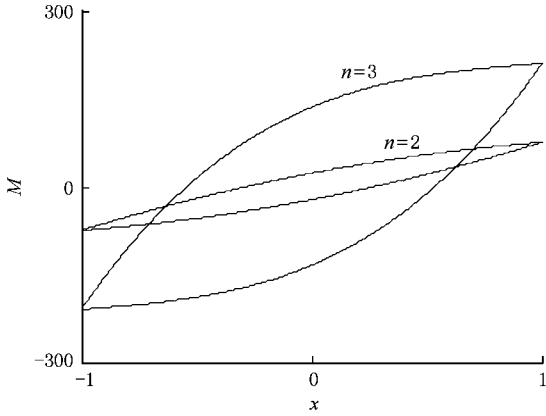


图 1 含 Davidenkov 滞后非线性刚度模型

由(2)式可得转轴的弹性势能为

$$U = \frac{1}{2} K (\theta_2 - \theta_1)^2 + \int_0^{\theta_2 - \theta_1} \mp \frac{\eta}{n} K \times [u_0 \mp (\theta_2 - \theta_1)]^n - 2^{n-1} u_0^n \times (\theta_2 - \theta_1). \quad (3)$$

系统中由阻尼形成的耗散项为

$$F'_1 = -C(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2), \quad (4)$$

$$F'_2 = -C(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1). \quad (5)$$

则转轴两个端面的广义力矩可等效为

$$Q_1 = T_1 + F'_1, \quad (6)$$

$$Q_2 = T_2 + F'_2, \quad (7)$$

其中,  $T_1, T_2$  为转轴两端受到的外扰力矩,  $F'_1, F'_2$  为转轴的阻尼力矩.

将(1)式,(3)式,(6)式和(7)式代入如下 Lagrange 动力学方程:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E}{\partial \dot{\theta}_r} - \frac{\partial E}{\partial \theta_r} + \frac{\partial U}{\partial \theta_r} = Q_r, \quad (r = 1, 2), \quad (8)$$

可得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3} \ddot{\theta}_1 + \frac{1}{6} \ddot{\theta}_2 + K(\theta_1 - \theta_2) \\ & \pm \frac{\eta}{n} K [(u_0 \mp (\theta_2 - \theta_1))^n - 2^{n-1} u_0^n] = T_1 + F'_1, \\ & \frac{1}{6} \ddot{\theta}_1 + \frac{1}{3} \ddot{\theta}_2 - K(\theta_1 - \theta_2) \\ & \mp \frac{\eta}{n} K [(u_0 \mp (\theta_2 - \theta_1))^n - 2^{n-1} u_0^n] = T_2 + F'_2. \end{aligned} \quad (9)$$

将(9)式中两个方程相减可得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{6} K (\ddot{\theta}_1 - \ddot{\theta}_2) + 2K(\theta_1 - \theta_2) \\ & = T_1 - T_2 \mp 2 \frac{\eta}{n} K [(u_0 \mp (\theta_2 - \theta_1))^n - 2^{n-1} u_0^n] \\ & + F'_1 - F'_2. \end{aligned} \quad (10)$$

将(4)式和(5)式代入(10)式,并令  $x = \theta_1 - \theta_2$ , 可得相对转角的非线性相对转动方程为

$$\ddot{x} + bx = T - ax - F(x), \quad (11)$$

其中,  $a = 12J^{-1}C, b = 12J^{-1}K, T = 6J^{-1}(T_1 - T_2),$

$$F(x) = \pm \frac{b\eta}{n} [(u_0 \pm x)^n - 2^{n-1} u_0^n].$$

(11)式即为含有 Davidenkov 滞后环的非线性相对转动动力学方程. 该方程是包含线性耗散阻尼和非线性滞后刚度的动力学方程, 可反映工程中一类存在滞后现象的相对转动动力学系统. 为了分析该滞后非线性相对转动方程的动力学特性, 下面对该非线性方程(11)进行定量和定性分析.

### 3. 非线性滞后相对转动方程的动力学特性分析

#### 3.1. 非线性滞后相对转动自治方程的分岔特性分析

当外扰  $T = 0$  时, 由(11)式可得非线性相对转动自治方程为

$$\ddot{x} + ax + bx + F(x) = 0. \quad (12)$$

将(12)式降阶为等阶的一阶方程组为

$$\dot{x} = y,$$

$$\dot{y} = -ay - bx - F(x). \quad (13)$$

将(13)式线性化后可得奇点的导算子为

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -b\eta u_0^{n-1} - b & -a \end{vmatrix} = 0. \quad (14)$$

由(14)式可得特征方程为

$$D(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b + b\eta u_0^{n-1} = 0. \quad (15)$$

解得

$$\lambda_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b - b\eta u_0^{n-1}}. \quad (16)$$

由线性系统的奇点稳定性理论可知(13)式在奇点附近存在如下几种结构:

1) 当  $\eta < -\frac{1}{u_0^{n-1}}$  时, 此时方程存在两个异号的实数根, 该方程在奇点附近为鞍点.

2) 当  $\frac{a^2 - 4b}{4b\eta u_0^{n-1}} \geq \eta > -\frac{1}{u_0^{n-1}}$  时, 方程存在两个同

号的实数根. 当  $a > 0$  时, 方程解实部为负, 为稳定结点.  $a < 0$  时, 方程解实部为正, 为不稳定结点.

3) 当  $\eta > -\frac{1}{u_0^{n-1}}$ ,  $\eta > \frac{a^2 - 4b}{4bu_0^{n-1}}$  且  $a \neq 0$  时, 方程

存在两个带实部的复数根. 当  $a > 0$  时, 方程解实部为负, 为稳定焦点. 当  $a < 0$  时, 为不稳定焦点.

4) 当  $\eta > -\frac{1}{u_0^{n-1}}$  且  $a = 0$  时, 方程存在两个纯虚

根, 奇点为中心, 此时为振荡曲线, 将出现霍普夫分岔.

### 3.2. 非线性滞后相对转动非自治方程的分岔特性分析

当外扰  $T = F_0 \sin \omega t$  时, 由(11)式可得非线性相对转动非自治方程为

$$\ddot{x} + bx = F_0 \sin \omega t - ax - F(x). \quad (17)$$

为分析该非线性方程的分岔特性, 将(17)式右边冠以小参数  $\varepsilon$ , 可得

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon f(x, \dot{x}, t), \quad (18)$$

其中,  $\omega_0 = \sqrt{b}$ ,  $f(x, \dot{x}, t) = -ax + F_0 \sin \omega t - F(x)$ .

设外扰频率  $\omega$  接近系统固有频率  $\omega_0$  的  $\lambda$  倍. 其中,  $\lambda = 1, 2, \dots, m$  或  $\lambda = 1/2, 1/3, \dots, 1/m$ ,  $m$  为整数, 此时存在

$$\omega_0^2 = (\lambda \omega)^2 - \varepsilon \sigma. \quad (19)$$

方程(18)可写为

$$\ddot{x} + (\lambda \omega)^2 x = \varepsilon f(x, \dot{x}, t) + \varepsilon \sigma x. \quad (20)$$

设方程(18)存在受强迫振动的周期激励解

$$x = z \cos \varphi, \quad \dot{x} = -z \omega \sin \varphi, \quad (21)$$

其中,  $\varphi = \omega t - \theta$ .

由平均法可得

$$\begin{aligned} \dot{z} = & -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \frac{\varepsilon}{\omega} f(x, \dot{x}, t) + \frac{\varepsilon}{\omega} \sigma x \right. \\ & \left. + z \omega (1 - \lambda^2) \cos \varphi \right) \sin \varphi d\varphi, \\ \dot{\theta} = & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \frac{\varepsilon}{\omega z} f(x, \dot{x}, t) + \frac{\varepsilon}{\omega z} \sigma x \right. \\ & \left. + \omega (1 - \lambda^2) \cos \varphi \right) \cos \varphi d\varphi, \end{aligned} \quad (22)$$

其中

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} f(x, \dot{x}, t) \sin \varphi d\varphi \\ = & \int_0^{2\pi} -ax \sin \varphi d\varphi + \int_0^{2\pi} F_0 \sin \omega t \sin \varphi d\varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - \int_0^{2\pi} F(z \cos \varphi) \sin \varphi d\varphi \\ = & \int_0^{2\pi} az \sin^2 \varphi d\varphi + \int_0^{2\pi} F_0 \sin(\varphi + \theta) \sin \varphi d\varphi \\ & - \int_0^{2\pi} F(z \cos \varphi) \sin \varphi d\varphi \\ = & az\pi + F_0 \pi \cos \theta - A(z), \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} f(x, \dot{x}, t) \cos \varphi d\varphi \\ = & \int_0^{2\pi} -ax \cos \varphi d\varphi + \int_0^{2\pi} F_0 \sin \omega t \cos \varphi d\varphi \\ & - \int_0^{2\pi} F(z \cos \varphi) \cos \varphi d\varphi \\ = & \int_0^{2\pi} az \sin \varphi \cos \varphi d\varphi + \int_0^{2\pi} F_0 \sin(\varphi + \theta) \cos \varphi d\varphi \\ & - \int_0^{2\pi} F(z \cos \varphi) \cos \varphi d\varphi \\ = & F_0 \pi \sin \theta - B(z), \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} A(z) = & \int_0^{2\pi} F(z \cos \varphi) \sin \varphi d\varphi \\ = & \int_0^{2\pi} \pm \frac{b\eta}{n} [(u_0 \pm z \cos \varphi)^n \\ & - 2^{n-1} u_0^n] \sin \varphi d\varphi = 0, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} B(z) = & \int_0^{2\pi} F(z \cos \varphi) \cos \varphi d\varphi \\ = & \int_0^{2\pi} \pm \frac{b\eta}{n} [(u_0 \pm z \cos \varphi)^n - 2^{n-1} u_0^n] \cos \varphi d\varphi \\ = & \frac{2\pi b\eta}{n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \binom{n+1}{2} \frac{n u_0^{n-2i+1} \prod_{j=1}^i (2j-1)}{(2i-1)!(n-2i+1)! \prod_{j=1}^i (2j)} z^{2i-1}. \end{aligned} \quad (26)$$

将(23)式(24)式(25)式和(26)式代入(22)式, 可得

$$\begin{aligned} \dot{z} = & -\frac{1}{2\pi} \frac{\varepsilon}{\omega} (az\pi + F_0 \pi \cos \theta), \\ \dot{\theta} = & \frac{1}{2\pi z} \left( \frac{\varepsilon}{\omega z} F_0 \pi \sin \theta - \frac{\varepsilon}{\omega z} B(z) \right. \\ & \left. + \frac{\varepsilon}{\omega} \sigma \pi + \omega (1 - \lambda^2) \pi \right). \end{aligned} \quad (27)$$

当(27)式中  $\dot{z} = \dot{\theta} = 0$  时, 方程将存在稳态的振幅和频率, 消去  $\theta$  可得分岔方程为

$$(az\pi)^2 + [B(z) - z\sigma\pi - \frac{\omega^2 z\pi}{\varepsilon} (1 - \lambda^2)]^2 = F_0^2 \pi^2, \quad (28)$$

(28) 式即为非自治方程 (18) 的分岔方程. 当  $\lambda = 1$ , (28) 式为主共振分岔方程; 当  $\lambda = 2, 3, \dots, m$ , 为超谐波共振分岔方程; 当  $\lambda = 1/2, 1/3, \dots, 1/n$ , 为亚谐波共振分岔方程.

考虑  $n = 2$  时, 由 (28) 式可得

$$\left[ \left( a^2 + \left( b\eta u_0 - \sigma - \frac{\omega^2}{\varepsilon} (1 - \lambda^2) \right) \right)^2 \right] z^2 = F_0^2. \quad (29)$$

令  $H(z, \mu) = z^3 - \mu z$ , 取  $H(z, \mu)$  的一个普通开折:

$$H(z, \mu, a_1, a_2) = z^3 + a_1 z^2 - \mu z + a_2, \quad (30)$$

其中

$$\mu = \frac{F_0^2}{\left( a^2 + \left( b\eta u_0 - \sigma - \frac{\omega^2}{\varepsilon} (1 - \lambda^2) \right) \right)^2}.$$

存在

$$H_z = 3z^2 + 2a_1 z - \mu, \quad (31)$$

$$H_\mu = -z, \quad (32)$$

$$H_{zz} = 6z + 2a_1. \quad (33)$$

由奇异性理论可得, 当  $H = H_z = H_\mu = 0$  时, 存在分岔点集  $B = \{(a_1, a_2) \in \mathbf{R}^2 \mid a_1 = 0\}$ ; 当  $H = H_z = H_{zz} = 0$  时, 存在滞后点集  $H = \{(a_1, a_2) \in \mathbf{R}^2 \mid a_1 = a_2^3/27\}$ ; 同时存在双极限点集  $D = \emptyset$  和转迁集  $\Sigma = B \cup H \cup D$ .

### 3.3. 非线性滞后相对转动非自治方程在周期激励下的近似解

对非线性方程的求解有很多方法, KBM 法是由克雷洛夫和包戈留包夫于 1937 年提出的, 是一种适用于求解非线性方程的有效方法.

设方程 (18) 有如下形式的渐进解:

$$x = z \cos \varphi + \varepsilon x_1(z, \varphi, t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (34)$$

其中

$$\dot{z} = \varepsilon A_1(z) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (35)$$

$$\dot{\varphi} = \omega_0 + \varepsilon B_1(z) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (36)$$

则有

$$\ddot{z} = \varepsilon^2 A_1 \frac{dA_1}{dt} + \mathcal{O}(\varepsilon^3), \quad (37)$$

$$\ddot{\varphi} = \varepsilon^2 A_1 \frac{dB_1}{dt} + \mathcal{O}(\varepsilon^3). \quad (38)$$

由 (35) 式 (36) 式 (37) 式和 (38) 式可得

$$\begin{aligned} \dot{x} = & -z\omega_0 \sin \varphi + \varepsilon \left( A_1 \cos \varphi - zB_1 \sin \varphi \right. \\ & \left. + \omega_0 \frac{\partial x_1}{\partial \varphi} + \frac{\partial x_1}{\partial t} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \ddot{x} = & -z\omega_0^2 \cos \varphi + \varepsilon \left( \frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} - 2zB_1 \omega_0 \cos \varphi \right. \\ & \left. - 2A_1 \omega_0 \sin \varphi + \omega_0^2 \frac{\partial^2 x_1}{\partial \varphi^2} + 2\omega_0 \frac{\partial^2 x_1}{\partial \varphi \partial t} \right) \\ & + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (40)$$

将 (39) 式 (40) 式代入方程 (18) 的左边部分, 可得

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \omega_0^2 x = & \varepsilon \left( \frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} + \omega_0^2 \frac{\partial^2 x_1}{\partial \varphi^2} + 2\omega_0 \frac{\partial^2 x_1}{\partial \varphi \partial t} \right. \\ & \left. - 2A_1 \omega_0 \sin \varphi - 2zB_1 \omega_0 \cos \varphi + \omega_0^2 x_1 \right) \\ & + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (41)$$

同时可得方程 (18) 的右边部分为

$$\begin{aligned} \varepsilon f(x, \dot{x}, t) = & \varepsilon (az\omega_0 \sin \varphi + F_0 \sin(\omega t) \\ & - F(z \cos \varphi)) + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (42)$$

令 (41) 式和 (42) 式的  $\varepsilon$  的同次项相等, 可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} + \omega_0^2 \frac{\partial^2 x_1}{\partial \varphi^2} + 2\omega_0 \frac{\partial^2 x_1}{\partial \varphi \partial t} \\ - 2A_1 \omega_0 \sin \varphi - 2zB_1 \omega_0 \cos \varphi + \omega_0^2 x_1 \\ = az\omega_0 \sin \varphi + F_0 \sin(\omega t) - F(z \cos \varphi). \end{aligned} \quad (43)$$

为了消去久期项, 令 (43) 式中的  $\sin \varphi$  和  $\cos \varphi$  系数为零, 得

$$\begin{aligned} A_1 = & -\frac{az}{2} + \frac{1}{2\pi\omega_0} \int_0^{2\pi} F(z \cos \varphi) \sin \varphi d\varphi \\ = & -\frac{az}{2} + \frac{1}{2\pi\omega_0} A(z) \\ B_1 = & \frac{1}{2z\pi\omega_0} \int_0^{2\pi} F(z \cos \varphi) \cos \varphi d\varphi \\ = & \frac{1}{2z\pi\omega_0} B(z). \end{aligned} \quad (44)$$

将 (25) 式 (26) 式和 (44) 式代入 (35) 式 (36) 式, 可得

$$\dot{z} = -\frac{az\varepsilon}{2},$$

$$\dot{\varphi} = \omega_0 + \varepsilon \frac{b\eta}{z\omega_0 n}$$

$$\begin{aligned} & \binom{n+1}{2} \frac{n! u_0^{-2i+1} \prod_{j=1}^i (2j-1)}{(2i-1)(n-2i+1)! \prod_{j=1}^i (2j)} z^{2i-1}. \\ & \times \sum_{i=1}^{(n+1)/2} \frac{n! u_0^{-2i+1} \prod_{j=1}^i (2j-1)}{(2i-1)(n-2i+1)! \prod_{j=1}^i (2j)} z^{2i-1}. \end{aligned} \quad (45)$$

将 (45) 式积分可得

$$z = z_0 e^{-\frac{az}{2}(t-t_0)},$$

$$\varphi = \varphi_0 + \left( \omega_0 + \varepsilon \frac{b\eta}{2\omega_0 n} \right) \times \sum_{i=1}^{(n+1)/2} \frac{n! u_0^{n-2i+1} \prod_{j=1}^i (2j-1)}{(2i-1)!(n-2i+1)! \prod_{j=1}^i (2j)} z^{2i-1} \times (t - t_0). \quad (46)$$

当  $n = 2$ , 由(43)式可求得

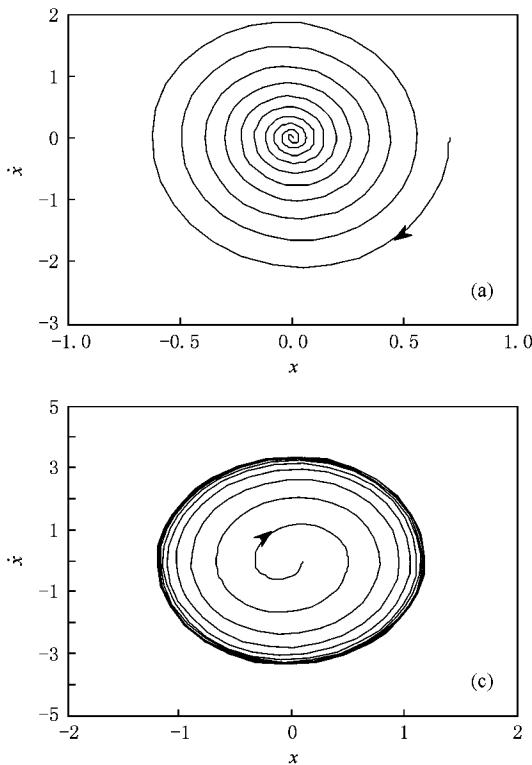
$$x_1(z, \varphi, t) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} F_0 \sin \omega t + y_1(z, \varphi, t), \quad (47)$$

其中

$$y_1(z, \varphi, t) = \begin{cases} \frac{b\eta}{\omega_0^2} \left( -u_0^2 + \frac{z^2}{2} - \frac{z^2}{6} \cos(2\varphi) \right) & \dot{x} \geq 0, \\ -\frac{b\eta}{\omega_0^2} \left( -u_0^2 + \frac{z^2}{2} - \frac{z^2}{6} \cos(2\varphi) \right) & \dot{x} < 0, \end{cases} \quad (48)$$

其中的  $z, \varphi$  可由(46)式得

$$z = z_0 e^{-\frac{a\varepsilon}{2}(t-t_0)}, \quad \varphi = \varphi_0 + \left( \omega_0 + \varepsilon \frac{b\eta u_0}{2\omega_0} \right) (t - t_0), \quad (49)$$



其中,  $z_0, \varphi_0, t_0$  分别代表振动的初始振幅, 初始相位和初始时间.

此时, 可得该非线性方程(18)在周期激励下的解析近似解为

$$x = z \cos \varphi + \varepsilon x_1(z, \varphi, t) = z \cos \varphi + \varepsilon \left( \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} F_0 \sin \omega t + y_1(z, \varphi, t) \right). \quad (50)$$

### 4. 仿真研究

令非线性滞后方程(12)参数分别如下:  $n = 2, u_0 = 1, b = 10$ . 可得该自治方程的几种分岔曲线, 如图2所示. 由上面分析可知, 当  $\eta > -1/u_0^2 = -1$ , 该非线性方程在  $a = 0$  附近将出现焦点和中心点. 其中, 图2(a)为稳定焦点, 图2(b)为不稳定焦点, 图2(c)和(d)为取不同初值时, 出现稳定极限环.

图3为外扰频率恒定时, 相对转速随外扰振幅变化的全局分岔图. 在图3(a)和(b)中, 随着外扰幅值的增大, 方程为周期运动和非周期运动的交替运

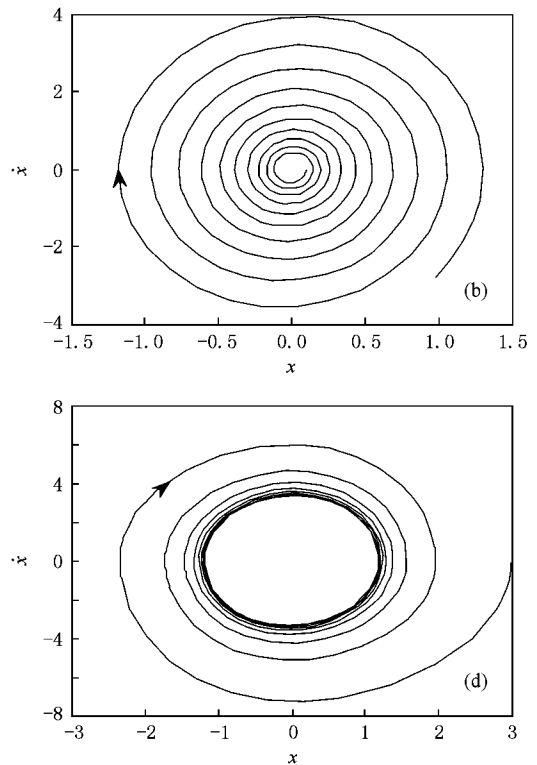


图2 不同参数  $\eta$  和  $a$  的分岔结构图 (a)  $\eta = 0.01, a = 0.2$  (b)  $\eta = -0.1, a = -0.2$  (c)  $\eta = -0.2, a = 0.01$  (d)  $\eta = -0.2, a = 0.01$

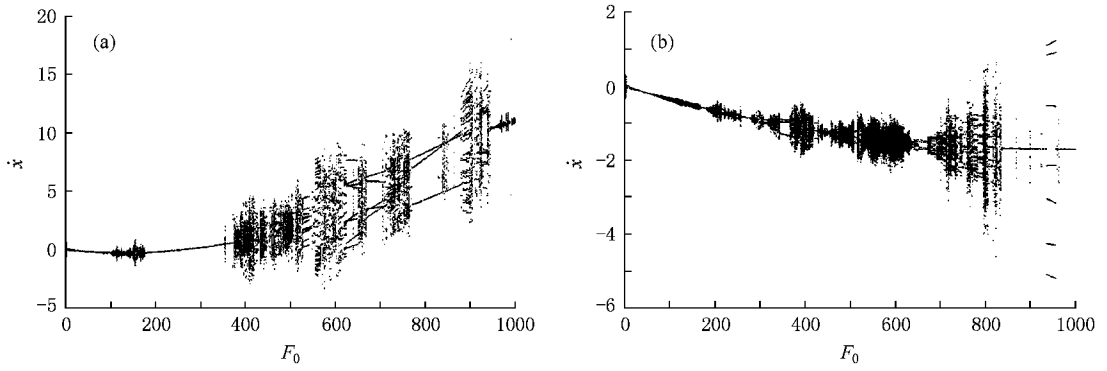


图 3 相对转速随外扰振幅变化全局分岔图 (a)  $\omega = 2\pi$  (b)  $\omega = 2.5\pi$

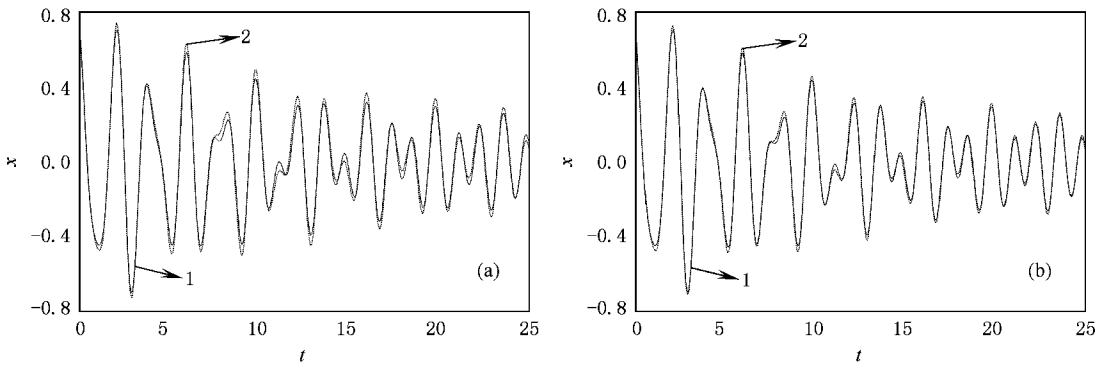


图 4 不同滞后环系数  $\eta$  时 KBM 法与数值仿真结果比较 (a)  $\eta = 0.1$  (b)  $\eta = 0.05$

表 1 KBM 法与数值仿真结果数据比较

时间/s	$\eta = 0.1$			$\eta = 0.05$		
	KBM 解	数值解	差值	KBM 解	数值解	差值
0	0.7000	0.7000	0	0.7000	0.7000	0
1	-0.4412	-0.4653	0.0241	-0.4413	-0.4617	0.0203
2	0.6804	0.7190	-0.0386	0.6810	0.7109	-0.0299
3	-0.6455	-0.6674	0.0219	-0.6467	-0.6570	0.0103
4	0.2816	0.3100	-0.0283	0.2836	0.2998	-0.0162
6	0.5726	0.6148	-0.0422	0.5761	0.5998	-0.0237
8	0.1522	0.2115	-0.0593	0.1573	0.1978	-0.0375
10	0.2930	0.3348	-0.0417	0.2995	0.3156	-0.0170
11	0.0145	-0.0660	-0.0514	-0.0216	-0.0490	0.0274
12	0.2519	0.3142	-0.0623	0.2595	0.2979	-0.0383

行过程.在整个全局分岔图中,存在周期运动、倍周期运动和准周期运动等多种运动形式.

图 4 为在不同滞后系数  $\eta$  下,KBK 法和数值仿真的比较曲线.实线 1 为本文用 KBK 法求解解析结果,虚线 2 为采用龙格库塔四五阶变步长算法数值

仿真结果.由图 4(a)和(b)比较可得,通过降低非线性参数,KBK 法与数值解在拐点处误差明显减小,部分具体比较数据见表 1.对于拐点处误差还可通过提高求解阶次来降低,从总体上来说,KBK 法一阶解与数值结果已取得了很好的一致性,能够有效

反映方程的动态响应状况.

## 5. 结 论

本文建立了一类含 Davidenkov 滞后环的相对转动动力学方程. 分别讨论了该滞后相对转动方程在自治和非自治两种情况下的分岔特性, 得到了方程

的分岔条件. 采用了 KBM 法求解了该方程在周期激励下的解析近似解. 通过数值仿真得到了方程的稳定焦点, 不稳定焦点以及中心极限环等几种分岔结构以及随外扰振幅变化时相对速度的全局分岔图, 并将 KBM 法与数值结果进行了比较, 取得了很好的一致性, 为研究含这类滞后特性的相对转动问题提供了一种理论参考依据.

- [ 1 ] Carmeli M 1985 *Found. Phys.* **15** 175
- [ 2 ] Carmeli M 1986 *Inter. J. Theor. Phys.* **25** 89
- [ 3 ] Luo S K 1996 *Appl. Math. Mech.* **17** 683
- [ 4 ] Luo S K 1996 *J. Beijing Inst. Technol.* **16**(S1)154 (in Chinese) [ 罗绍凯 1996 北京理工大学学报 **16**(S1)154 ]
- [ 5 ] Luo S K 1998 *Appl. Math. Mech.* **19** 45
- [ 6 ] Luo S K, Guo Y X, Chen X W 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2053 (in Chinese) [ 罗绍凯、郭永新、陈向炜 2001 物理学报 **50** 2053 ]
- [ 7 ] Luo S K, Fu J L, Chen X W 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 383 (in Chinese) [ 罗绍凯、傅景礼、陈向炜 2001 物理学报 **50** 383 ]
- [ 8 ] Dong Q L, Liu B 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 2191 (in Chinese) [ 董全林、刘 彬 2002 物理学报 **51** 2191 ]
- [ 9 ] Dong Q L, Wang K, Zhang C X, Liu B 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 337 (in Chinese) [ 董全林、王 坤、张春熹、刘 彬 2004 物理学报 **53** 337 ]
- [ 10 ] Zhao W, Liu B 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 4543 (in Chinese) [ 赵武、刘 彬 2005 物理学报 **54** 4543 ]
- [ 11 ] Wang K 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 3987 (in Chinese) [ 王 坤 2005 物理学报 **54** 3987 ]
- [ 12 ] Wang K 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 5530 (in Chinese) [ 王 坤 2005 物理学报 **54** 5530 ]
- [ 13 ] Zhao W, Liu B, Shi P M, Jiang J S 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3852 (in Chinese) [ 赵 武、刘 彬、时培明、蒋金水 2006 物理学报 **55** 3852 ]
- [ 14 ] Shi P M, Liu B 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3678 (in Chinese) [ 时培明、刘 彬 2007 物理学报 **56** 3678 ]
- [ 15 ] Meng Z, Liu B 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 6194 (in Chinese) [ 孟宗、刘 彬 2007 物理学报 **56** 6194 ]
- [ 16 ] Shi P M, Liu B, Hou D X 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 1312 (in Chinese) [ 时培明、刘 彬、侯东晓 2008 物理学报 **57** 1312 ]
- [ 17 ] Meng Z, Liu B 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 1329 (in Chinese) [ 孟宗、刘 彬 2008 物理学报 **57** 1329 ]
- [ 18 ] Davidenkov N N 1983 *J. Tech. Phys.* **8** 483
- [ 19 ] Evan-Iwanowsk R M 1985 *Material Nonlinearity in Vibration Problem. ASME* **71** 61
- [ 20 ] Jin D P, Chen Y S 1997 *Journal of Tianjin University.* **30** 299 (in Chinese) [ 金栋平、陈予恕 1997 天津大学学报 **30** 299 ]
- [ 21 ] Yang S P, Chen Y S 1991 *Journal of Vibration Engineering.* **4** 95 (in Chinese) [ 杨绍普、陈予恕 1991 振动工程学报 **4** 95 ]
- [ 22 ] Ding Q, Chen Y S, Ye M 2002 *Acta Mechanica Sinica.* **34** 123 (in Chinese) [ 丁 千、陈予恕、叶 敏等 2002 力学学报 **34** 123 ]
- [ 23 ] Mozer D T. 1972 *The Shock and Vibration Bull.* **42** 153
- [ 24 ] Yang S P, Chen Y S 1992 *Mechanics Research Communication* **19** 35

# The bifurcation of a kind of relative rotational dynamic equation with hysteresis and its approximate solution<sup>\*</sup>

Hou Dong-Xiao<sup>†</sup> Liu Bin Shi Pei-Ming

(*Yanshan University, Qinhuangdao 066004, China*)

(Received 25 October 2008; revised manuscript received 1 December 2008)

## Abstract

Based on the Lagrange function, a new nonlinear relative rotational equation with Davidenkov hysteresis is established. Firstly, the bifurcation characteristics of the hysteretic relative rotational autonomous function and non-autonomous function are discussed. Secondly, the approximate solution of the nonlinear function under periodic force excitation is obtained by KBM method. At last, by numerical simulation, several bifurcation structures are obtained, and the comparisons result indicate the approximate solution of KBM method has higher accuracy and better reflects the dynamic characteristic of equation effectively.

**Keywords**: relatively rotation, hysteresis, bifurcation, KBM method

**PACC**: 0340D, 0547

---

<sup>\*</sup> Project supported by the National Science and Technology Foundation during the 11 st Five-Year Plan Period of China (Grant No. 2007BAF02B10), the Natural Science Foundation of Hebei Province, China (Grant No. 2008000882), the Foundation of the Education Department of Hebei Province, China (Grant Nos. ZH2007102, 2007496).

<sup>†</sup> E-mail: houdongxiao1982@163.com