第 58 卷 第 9 期 2009 年 9 月
1000-3290/2009/58(09)/5955-06

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.58, No.9, September., 2009
©2009 Chin. Phys. Soc.

两粒子自旋系统量子纠缠的时间演化*

卢 鹏 王顺金†

(四川大学物理科学与技术学院理论物理中心，成都 610064)

(2008 年 11 月 10 日收到；2008 年 12 月 1 日收到修改稿)

研究了两个具有海森伯耦合的自旋为 1/2 的粒子在随时间变化的磁场中的运动情况. 系统的哈密顿量具有 $SU(2)$ 代数结构，运用代数动力学方法对此系统进行求解，得到了时间演化算子的严格解. 基于严格解，求得两粒子体系随时间变化的波函数，从而计算得到两粒子体系的纠缠. 对不同初始波函数，研究了系统纠缠随时间的变化情况. 讨论了外场影响纠缠的条件.

关键词：二粒子系统纠缠，代数动力学解法

PACC：0365，0367，7510J

1. 引 言

量子纠缠是量子力学中最令人感兴趣的特性之一，是量子信息的物理资源[1,2]. 它在量子信息的各个领域中起着重要作用[3]，如量子计算、量子隐形传送、密集编码和量子通信等. 多种能够产生纠缠态的物理系统已经被提出，这些物理系统有电子自旋、量子点、核自旋以及库珀对等系统[4—6]. 在自旋系统中，磁场是控制纠缠的一种有力方法. 最近人们发现，海森伯模型是一个简单而且可以实现的模型，在固态系统中已经被大量研究[7,8]. Arnesen 等人已经研究了在热平衡时处于磁场中的各向同性海森伯链的自旋热纠缠[9]. 然而，自旋链的各向同性相互作用只是一个近似值. 在一个系统中它常常因一些原因而遭到破坏. 所以，对处于均匀磁场中的各向异性海森伯 XY 链的纠缠以及 XYZ 链的热纠缠的研究工作正广泛开展[10—15].

基于对上面的分析，本文研究了处于随时间变化的磁场中的耦合的两粒子海森伯自旋团簇的纠缠. 对于处于任意初始波函数状态的系统，运用代数动力学方法[16—18]，通过求解该系统的时间演化算子，可以得到任一时刻的波函数，根据 Abouraddy 等人定义的两量子比特纠缠度[19]，进而计算系统的纠缠随时间的演化情况，通过数值作图和解析公式分析纠缠的各种性质.

2. 系统的哈密顿量与严格的解析解

两个自旋为 1/2 的粒子在随时间变化的磁场中，该系统的哈密顿量为

$$\hat{H}(t) = \hat{H}_{\text{zeeman}} + \hat{H}_{\text{cluster}}, \tag{1}$$

$$\hat{H}_{\text{zeeman}} = \mu_{\text{B}} \boldsymbol{B}(t) \cdot \hat{S}, \tag{2}$$

$$\hat{H}_{\text{cluster}} = J(\hat{S}_1 \cdot \hat{S}_2). \tag{3}$$

(2)式中 $\hat{S} = \hat{S}_1 + \hat{S}_2$. 设 $\hat{S}_i = \hat{S}_1^i + \hat{S}_2^i (i = x, y, z)$. 总自旋算符 $\hat{S}_j$ 满足 $SU(2)$ 代数关系

$$[\hat{S}_i, \hat{S}_j] = \mathrm{i}\varepsilon_{ijk}\hat{S}_k \quad (i, j, k = x, y, z), \tag{4}$$

且有

$$[\hat{S}_i, \hat{H}_{\text{cluster}}] = 0 \quad (i = x, y, z). \tag{5}$$

含时薛定谔方程为

$$\mathrm{i}\hbar \frac{\partial}{\partial t}\hat{\psi} = \hat{H}(t)\hat{\psi}, \tag{6}$$

根据代数动力学[16—18]，我们引入规范变化

$$\hat{\tilde{\psi}}(t) = U_{\text{g}}^{-1}\hat{\psi}(t), \tag{7}$$

$$U_{\text{g}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda(t)\hat{S}_y}. \tag{8}$$

在规范参考系中，薛定谔方程变为

$$\mathrm{i}\hbar \frac{\partial}{\partial t}\hat{\tilde{\psi}} = \hat{\tilde{H}}(t)\hat{\tilde{\psi}}. \tag{9}$$

利用关系式

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda(t)\hat{S}_i} \cdot \hat{S}_j \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda(t)\hat{S}_i} = \hat{S}_j \cos\lambda(t) + \varepsilon_{ijk}\hat{S}_k \sin\lambda(t), \tag{10}$$

* 国家自然科学基金(批准号：90503008，10775100)和兰州重离子加速器国家实验原子核理论中心基金资助的课题.

† 通讯联系人. E-mail：sjwang@home.swjtu.edu.cn

经规范变化后，$\hat{\tilde{H}}(t)$ 为

$$\begin{aligned}\hat{\tilde{H}}(t) &= U_g^{-1}\hat{H}(t)U_g - \mathrm{i}\hbar U_g^{-1}\frac{\partial}{\partial t}U_g \\ &= \hat{H}_{\text{cluster}} + [\mu_B B_x\cos\lambda(t) + \mu_B B_z\sin\lambda(t)]\hat{S}_x \\ &\quad + [\mu_B B_y + \hbar\,\mathrm{d}\lambda(t)/\mathrm{d}t]\hat{S}_y \\ &\quad + [\mu_B B_z\cos\lambda(t) - \mu_B B_x\sin\lambda(t)]\hat{S}_z. \end{aligned} \tag{11}$$

若使磁场 $\boldsymbol{B}(t)$ 和 $\lambda(t)$ 满足

$$\begin{aligned} B_x(t) &= B_0\sin(\omega t), \\ B_y(t) &= \omega\hbar/\mu_B, \\ B_z(t) &= B_0\cos(\omega t), \end{aligned} \tag{12}$$

且有

$$\lambda(t) = -\omega t, \tag{13}$$

则规范变换后的哈密顿量简化为

$$\hat{\tilde{H}}(t) = \hat{H}_{\text{cluster}} + \mu_B B_0\hat{S}_z. \tag{14}$$

设在 $\hat{S}_1^z, \hat{S}_2^z(\hat{S}_z)$ 的本征表象中，一般初始波函数可表示为

$$\begin{aligned}\psi(0) &= \alpha_1|\downarrow\downarrow\rangle + \alpha_2|\downarrow\uparrow\rangle + \alpha_3|\uparrow\downarrow\rangle \\ &\quad + \alpha_4|\uparrow\uparrow\rangle, \end{aligned} \tag{15}$$

其中

$$\sum_{i=1}^{4}|\alpha_i|^2 = 1.$$

由初始条件

$$\hat{\tilde{\psi}}(0) = \psi(0), \tag{16}$$

则规范变换后任意时刻的波函数为

$$\begin{aligned}\hat{\tilde{\psi}}(t) &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{\tilde{H}}t/\hbar}\hat{\tilde{\psi}}(0) \\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu_B B_0 t/\hbar}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Jt/(4\hbar)}\alpha_1|\downarrow\downarrow\rangle \\ &\quad + \frac{1}{2}[(\alpha_2+\alpha_3)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Jt/(4\hbar)} + (\alpha_2-\alpha_3)\mathrm{e}^{3\mathrm{i}Jt/(4\hbar)}]|\downarrow\uparrow\rangle \\ &\quad + \frac{1}{2}[(\alpha_2+\alpha_3)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Jt/(4\hbar)} + (\alpha_3-\alpha_2)\mathrm{e}^{3\mathrm{i}Jt/(4\hbar)}]|\uparrow\downarrow\rangle \\ &\quad + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu_B B_0 t/\hbar}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Jt/(4\hbar)}\alpha_4|\uparrow\uparrow\rangle. \end{aligned} \tag{17}$$

原来薛定谔方程的解可由下列逆变换得出：

$$\psi(t) = U_g\hat{\tilde{\psi}}(t). \tag{18}$$

由此可得时间演化算子为

$$U(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Jt/(4\hbar)}\begin{bmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu_B B_0 t/\hbar}A^2 & AB & AB & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu_B B_0 t/\hbar}B^2 \\ -\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu_B B_0 t/\hbar}AB & C & D & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu_B B_0 t/\hbar}AB \\ -\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu_B B_0 t/\hbar}AB & D & C & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu_B B_0 t/\hbar}AB \\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu_B B_0 t/\hbar}B^2 & -AB & -AB & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu_B B_0 t/\hbar}A^2 \end{bmatrix}, \tag{19}$$

其中

$$\begin{aligned} A &= \cos(\omega t/2), \\ B &= \sin(\omega t/2), \\ C &= (\cos(\omega t) + \mathrm{e}^{\mathrm{i}Jt/\hbar})/2, \\ D &= (\cos(\omega t) - \mathrm{e}^{\mathrm{i}Jt/\hbar})/2, \end{aligned}$$

从而可得任意时刻的波函数

$$\begin{aligned}\psi(t) &= \beta_1|\downarrow\downarrow\rangle + \beta_2|\downarrow\uparrow\rangle + \beta_3|\uparrow\downarrow\rangle \\ &\quad + \beta_4|\uparrow\uparrow\rangle, \end{aligned} \tag{20}$$

其中

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Jt/(4\hbar)}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu_B B_0 t/\hbar}A^2\alpha_1 + AB\alpha_2 \\ &\quad + AB\alpha_3 + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu_B B_0 t/\hbar}B^2\alpha_4), \\ \beta_2 &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Jt/(4\hbar)}(-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu_B B_0 t/\hbar}AB\alpha_1 + C\alpha_2 \\ &\quad + D\alpha_3 + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu_B B_0 t/\hbar}AB\alpha_4), \\ \beta_3 &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Jt/(4\hbar)}(-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu_B B_0 t/\hbar}AB\alpha_1 + D\alpha_2 \\ &\quad + C\alpha_3 + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu_B B_0 t/\hbar}AB\alpha_4), \\ \beta_4 &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Jt/(4\hbar)}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mu_B B_0 t/\hbar}B^2\alpha_1 - AB\alpha_2 \\ &\quad - AB\alpha_3 + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mu_B B_0 t/\hbar}A^2\alpha_4). \end{aligned}$$

设初态波函数中 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 分别为

$$\begin{aligned} &\alpha_1 = a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_1}, \alpha_2 = b\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_2}, \\ &\alpha_3 = c\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_3}, \alpha_4 = d\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_4} \end{aligned}$$

（a, b, c, d 为正实数）.

根据 Abouraddy 等人定义的两量子比特纠缠度[19]，得到该系统任一时刻的纠缠为

$$\begin{aligned} E &= 2|\beta_1\beta_4 - \beta_2\beta_3| \\ &= 2\Big|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Jt/(2\hbar)}\alpha_1\alpha_4 \\ &\quad - \frac{1}{4}\Big[(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Jt/(2\hbar)} - \mathrm{e}^{3\mathrm{i}Jt/(2\hbar)})(\alpha_2^2 + \alpha_3^2) \\ &\quad + 2\alpha_2\alpha_3(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Jt/(2\hbar)} + \mathrm{e}^{3\mathrm{i}Jt/(2\hbar)})\Big]\Big| \\ &= [4a^2d^2 + 4ad(b^2\sin(\theta_2 - Jt/\hbar)\sin(Jt/\hbar) \\ &\quad - 2bc\cos(\theta_1 - Jt/\hbar)\cos(Jt/\hbar) \\ &\quad + c^2\sin(\theta_3 - Jt/\hbar)\sin(Jt/\hbar)) + 4b^2c^2\cos^2(Jt/\hbar) \\ &\quad + 2bc(b^2 - c^2)\sin\theta_4\sin(2Jt/\hbar) \\ &\quad + (b^4 + c^4 + 2b^2c^2\cos(2\theta_4))\sin^2(Jt/\hbar)]^{1/2}, \end{aligned} \tag{21}$$

其中

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \phi_1 + \phi_4 - \phi_2 - \phi_3, \\ \theta_2 &= \phi_1 + \phi_4 - 2\phi_2, \\ \theta_3 &= \phi_1 + \phi_4 - 2\phi_3, \\ \theta_4 &= \phi_2 - \phi_3. \end{aligned}$$

3. 结果分析与讨论

从(21)式我们可以知道，在与时间有关的磁场

的作用下，系统纠缠随时间 t 发生周期性变化，演化周期一般为 $T = 2\pi\hbar/J$（特殊情况为 $T = \pi\hbar/J$）. 初态波函数和耦合系数 J 是决定纠缠的主要因素. 不同的初态纠缠随时间的演化情况不同.

从(21)式还可看出，纠缠 E 与外磁场参数 $\mu_B B_0$，ω 无关，即算子 $e^{-i\mu_B B_0 \hat{S}_z t/\hbar}$ 和 $e^{-i\omega\hat{S}_y t}$ 不改变波函数的纠缠. 上述算子必然不是相互作用产生的二体算子，但也不是只作用于一个粒子的局域操作，而是同时作用于两个粒子的外场的整体操作. 按一般多体理论，作用于多个粒子的共同外场自由度，一般要诱导出被作用的粒子之间的相互耦合的. 用多体理论方法消去外场自由度就立即诱导出粒子-粒子等效相互作用，就可以证明上述论点. 但粒子之间的等效相互作用要改变纠缠，而这里的共同外场算子 $e^{-i\mu_B B_0 \hat{S}_z t/\hbar}$ 和共同规范算子 $e^{-i\omega\hat{S}_y t}$ 却又不改变波函数的纠缠，这就出现佯谬. 我们先用计算证明共同外场算子确实不改变波函数的纠缠，然后再讨论产生佯谬的物理原因.

共同外场算子不改变波函数的纠缠证明如下.

任意时刻系统的波函数可写为

$$\hat{\psi}(t) = U_g(t) U_J(t) U_z(t) \hat{\psi}(0), \tag{22a}$$

其中

$$\begin{aligned} U_J(t) &= e^{-iJ\hat{S}_1\cdot\hat{S}_2 t/\hbar}, \\ U_z(t) &= e^{-i\mu_B B_0 \hat{S}_z t/\hbar}, \\ U_g(t) &= e^{-i\omega\hat{S}_y t}, \end{aligned} \tag{23}$$

U_J 是由两粒子的耦合项 $J(\hat{S}_1\cdot\hat{S}_2)$ 产生的时间演化算子，U_z 是由转动外磁场 $\mu_B B_0 \hat{S}_z$ 产生的时间演化算子，U_g 是绕 y 轴的规范变换.

由于 $[U_J, U_g] = [U_J, U_z] = 0$，所以(22a)式可改写为

$$\hat{\psi}(t) = U_g(t) U_z(t) U_J(t) \hat{\psi}(0). \tag{22b}$$

在 $\hat{S}_1^z$，$\hat{S}_2^z$（$\hat{S}_z$）的本征表象 $|\downarrow\downarrow\rangle$，$|\downarrow\uparrow\rangle$，$|\uparrow\downarrow\rangle$，$|\uparrow\uparrow\rangle$ 下，算符 U_z 和 U_g 分别为

$$U_z = \begin{pmatrix} e^{i\mu_B B_0 t/\hbar} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-i\mu_B B_0 t/\hbar} \end{pmatrix}, \tag{24a}$$

$$U_g = \begin{pmatrix} A^2 & AB & AB & B^2 \\ -AB & A^2 & -B^2 & AB \\ -AB & -B^2 & A^2 & AB \\ B^2 & -AB & -AB & A^2 \end{pmatrix}. \tag{24b}$$

(24b)式中 $A = \cos(\omega t/2)$，$B = \sin(\omega t/2)$.

设任一波函数 $\varphi = \gamma_1|\downarrow\downarrow\rangle + \gamma_2|\downarrow\uparrow\rangle + \gamma_3|\uparrow\downarrow\rangle + \gamma_4|\uparrow\uparrow\rangle$，经算符 U_g，U_z 分别作用后波函数分别为 $\varphi' = U_z\varphi$，$\varphi'' = U_g\varphi$. 且令

$$\begin{aligned} \varphi' &= \gamma'_1|\downarrow\downarrow\rangle + \gamma'_2|\downarrow\uparrow\rangle + \gamma'_3|\uparrow\downarrow\rangle + \gamma'_4|\uparrow\uparrow\rangle, \\ \varphi'' &= \gamma''_1|\downarrow\downarrow\rangle + \gamma''_2|\downarrow\uparrow\rangle + \gamma''_3|\uparrow\downarrow\rangle + \gamma''_4|\uparrow\uparrow\rangle, \end{aligned} \tag{25}$$

波函数 φ 对应的纠缠为

$$E(\varphi) = 2|\gamma_1\gamma_4 - \gamma_2\gamma_3|. \tag{26}$$

直接计算 φ'，φ'' 的纠缠分别为

$$\begin{aligned} E(\varphi') &= 2|\gamma'_1\gamma'_4 - \gamma'_2\gamma'_3| \\ &= 2|\gamma_1\gamma_4 - \gamma_2\gamma_3|, \end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned} E(\varphi'') &= 2|\gamma''_1\gamma''_4 - \gamma''_2\gamma''_3| \\ &= 2|\gamma_1\gamma_4 - \gamma_2\gamma_3|. \end{aligned} \tag{28}$$

由(26)，(27)，(28)式可知，算符 U_g 和 U_z 不改变波函数的纠缠，即

$$E(\varphi) = E(\varphi') = E(\varphi'').$$

由此我们可以得出如下关系式：

$$\begin{aligned} E[U_z(t)U_J(t)\hat{\psi}(0)] &= E[U_J(t)\hat{\psi}(0)], \\ E[U_g(t)U_J(t)\hat{\psi}(t)] &= E[U_J(t)\hat{\psi}(0)], \end{aligned} \tag{29}$$

所以，

$$\begin{aligned} E[\hat{\psi}(t)] &= E[U_g(t)U_z(t)U_J(t)\hat{\psi}(0)] \\ &= E[U_z(t)U_J(t)\hat{\psi}(0)] \\ &= E[U_J(t)\hat{\psi}(0)]. \end{aligned} \tag{30}$$

这就直接证明了任一波函数经算子 U_z，U_g 作用后波函数的纠缠不发生变化，只有波函数经算子 U_J 作用后波函数的纠缠才发生变化. 也就是说只有两粒子的耦合项 $J(\hat{S}_1\cdot\hat{S}_2)$ 对纠缠有贡献，$\mu_B \boldsymbol{B}(t)\cdot\hat{S}$ 和规范变换对纠缠是没有贡献的. 这就具体阐明了纠缠 E 与 $\mu_B B_0$，ω 无关而只与耦合系数 J 有关的数学原因.

现在讨论产生上述佯谬的物理原因. 共同外场(如环境热辐射场)诱导多体等效相互作用的条件是：这一外场必须是动力学自由度，即它必须是在相互作用时发生动力学变化的外场；这样的场，它在与系统的一个粒子相互作用时，通过自身的变化接受这个粒子的信息，再通过它与另一个粒子相互作用而把第一个粒子的信息反馈给第二个粒子，从而通过以它为中介，把没有直接相互作用的两个粒子关联耦合起来，产生等效相互作用. 按照量子多体理论，共同的动力学外场与粒子之间的反馈作用是非线性过程，消去这一动力学外场后必然诱导出等效的非线性相互作用. 反之，当共同外场给定时，它就

不再是动力学自由度,这时其作用是单向的:它只影响粒子,而不接受粒子的信息,当然更不能把一个粒子的信息反馈给另一个粒子,引起粒子之间的关联与纠缠.在本文中,U_z 和 U_g 都是给定外场产生的演化,不能接收和反馈粒子的信息,不能在粒子之间传递信息,故不能影响和改变粒子之间的纠缠.

对于外场只作用于一个粒子的局域操作的情况,很容易证明它对系统的纠缠没有贡献(证明从略).

由纠缠公式我们知道,初态波函数

$$\hat{\psi}(0)=\frac{1}{\sqrt{2}}(|\downarrow\downarrow\rangle\pm|\uparrow\uparrow\rangle)$$

或

$$\hat{\psi}(0)=\frac{1}{\sqrt{2}}(|\downarrow\uparrow\rangle\pm|\uparrow\downarrow\rangle),$$

纠缠最大 $E=1$,即 Bell 态纠缠最大.分离态波函数 $|\downarrow\downarrow\rangle$,$|\downarrow\uparrow\rangle$,$|\uparrow\downarrow\rangle$,$|\uparrow\uparrow\rangle$,纠缠最小 $E=0$.其他形式的初态纠缠介于 0 和 1 之间.

下面我们分别对以下三种情况进行讨论.

1)初态 $\hat{\psi}(0)=a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_1}|\downarrow\downarrow\rangle+d\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_4}|\uparrow\uparrow\rangle$ 时,随时间演化的纠缠为

$$E=2ad,\quad(a^2+d^2=1),\tag{31}$$

如图 1 所示.

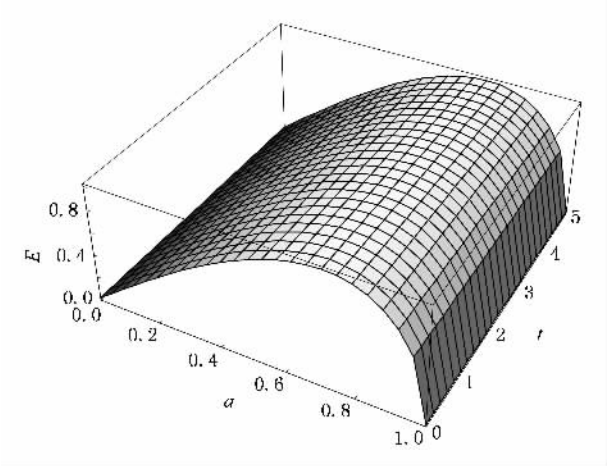

图 1 初态波函数 $\hat{\psi}(0)=a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_1}|\downarrow\downarrow\rangle+d\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_4}|\uparrow\uparrow\rangle$ 时,纠缠 E 随 a 和 t 的变化

由(31)式我们知道,当初态 $\hat{\psi}(0)=a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_1}|\downarrow\downarrow\rangle+d\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_4}|\uparrow\uparrow\rangle$ 时,纠缠不随时间变化,也不随 ϕ_1 和 ϕ_4 变化而变化,与相因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_1}$ 和 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_4}$ 无关.纠缠的大小只取决于初态系数 a 和 d.当 $a=d=1/\sqrt{2}$ 时,$E=1$,纠缠最大.当 $a=0$,$d=1$ 或 $a=1$,$d=0$ 时,纠缠最小,$E=0$.

2)初态 $\hat{\psi}(0)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_2}|\downarrow\uparrow\rangle$ 或 $\hat{\psi}(0)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_3}|\uparrow\downarrow\rangle$ 时,随时间演化的纠缠均为

$$E=|\sin(Jt/\hbar)|,\tag{32}$$

如图 2 所示.

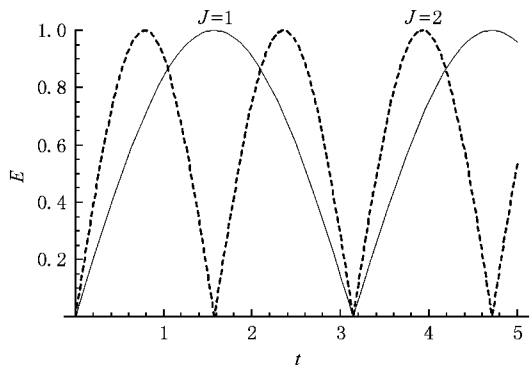

图 2 初态波函数 $\hat{\psi}(0)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_2}|\downarrow\uparrow\rangle$ 或 $\hat{\psi}(0)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_3}|\uparrow\downarrow\rangle$,纠缠 E 随时间 t 的变化($\hbar=1$,$J=1$,2)

从(32)式我们知道,当初态波函数为 $\hat{\psi}(0)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_2}|\downarrow\uparrow\rangle$ 或 $\hat{\psi}(0)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_3}|\uparrow\downarrow\rangle$ 时,纠缠随时间作周期性演化,演化周期为 $\pi\hbar/J$,且在时间 $t=\pi\hbar/(2J)$ 时纠缠达到最大值 1.在这种情况纠缠也与相因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_2}$ 和 $e^{\mathrm{i}\phi_3}$ 无关.纠缠 E 随时间 t 的演化如图 2.在时间 $t=0$ 时,其纠缠为 0.通过时间演化,可以在时间 $t=\pi\hbar/(2J)$ 时使纠缠演化为最大值 1.通过增大耦合系数 J 可以减小纠缠随时间演化的周期 T,从而在较短的时间里使纠缠增长为最大值 1.

当初态为 $\hat{\psi}(0)=a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_1}|\downarrow\downarrow\rangle+b\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_2}|\downarrow\uparrow\rangle$ 或 $\hat{\psi}(0)=b\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_2}|\downarrow\uparrow\rangle+d\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_4}|\uparrow\uparrow\rangle$ 时,随时间演化的纠缠为 $E=b^2|\sin(Jt/\hbar)|$,$(0\leqslant b\leqslant 1)$,纠缠 E 的取值范围是 $0\leqslant E\leqslant b^2$.

当初态为 $\hat{\psi}(0)=a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_1}|\downarrow\downarrow\rangle+c\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_3}|\uparrow\downarrow\rangle$ 或 $\hat{\psi}(0)=c\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_3}|\uparrow\downarrow\rangle+d\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_4}|\uparrow\uparrow\rangle$ 时,随时间演化的纠缠为 $E=c^2|\sin(Jt/\hbar)|$,$(0\leqslant c\leqslant 1)$,纠缠 E 的取值范围是 $0\leqslant E\leqslant c^2$.这说明以上这两种情况,$S_z=\pm 1$ 的自旋三态分量 $|\downarrow\downarrow\rangle$ 和 $|\uparrow\uparrow\rangle$ 对纠缠没有贡献,纠缠仅由分量 $|\downarrow\uparrow\rangle$ 和 $|\uparrow\downarrow\rangle$ 的系数决定.

3)初态 $\hat{\psi}(0)=b\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_2}|\downarrow\uparrow\rangle+c\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_3}|\uparrow\downarrow\rangle$ 时,随时间演化的纠缠为

$$E=[4b^2c^2\cos^2(Jt/\hbar)+2bc(b^2-c^2)\sin\theta_4\sin(2Jt/\hbar)+(b^4+c^4+2b^2c^2\cos(2\theta_4))\sin^2(Jt/\hbar)]^{1/2},\tag{33}$$

其中

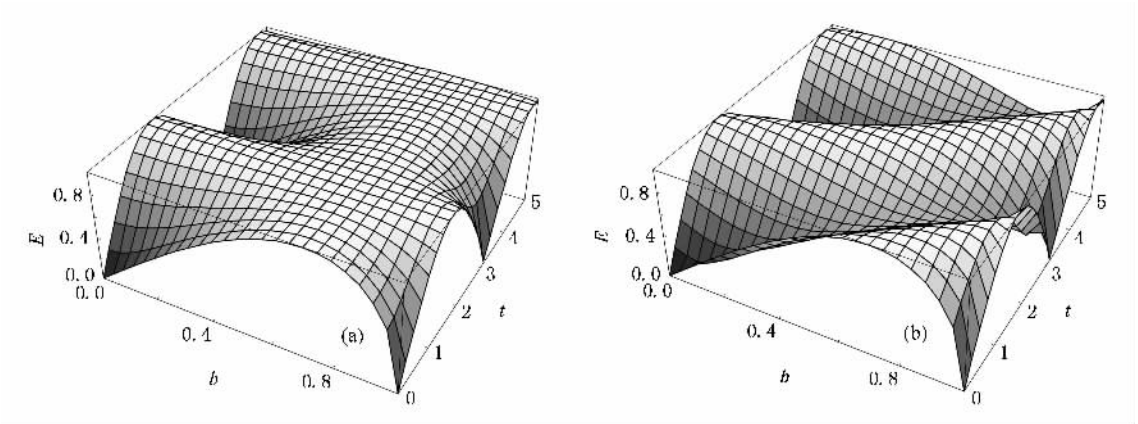

图 3　初态为 $\hat{\psi}(0) = b\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_2}|\downarrow\uparrow\rangle + c\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_3}|\uparrow\downarrow\rangle$纠缠随 b 和 t 的变化（$\hbar = 1, J = 1$）　(a) $\theta_4 = 0$；(b) $\theta_4 = \pi/4$

$$b^2 + c^2 = 1,$$

如图 3 所示.

由(33)式我们知道，当初态波涵数 $\hat{\psi}(0) = b\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_2}|\downarrow\uparrow\rangle + c\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_3}|\uparrow\downarrow\rangle$ 时，纠缠随时间的演化不仅与 b, c 有关，而且还与 $\theta_4(\phi_2 - \phi_3)$ 有关，即与相因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_2}$ 和 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_3}$ 有关. 纠缠随时间演化的周期为 $T = \pi\hbar/J$. 通过对(33)式的分析可以求得纠缠达到最大值 $E = 1$ 时的时间与初态的关系式

$$t(n_0) = \frac{\hbar}{2J}\left(n_0\pi + \arctan\frac{-4bc(b^2 - c^2)\sin\theta_4}{(b^2 - c^2)^2 - 4b^2c^2\sin^2\theta_4}\right)$$
$$= \frac{\hbar}{2J}(n_0\pi + \tau_0), \tag{34}$$

其中

$$\tau_0 = \arctan\frac{-4bc(b^2 - c^2)\sin\theta_4}{(b^2 - c^2)^2 - 4b^2c^2\sin^2\theta_4},$$

τ_0 可正可负，仅为参数，$t(n_0)$ 为时间，必须大于 0；n_0 为自然数且满足条件 $t(n_0) > 0$. 若

$$\cos(2Jt(n_0)/\hbar - \tau_0) < 0$$

时，则在时间 $t = t(n_0)$ 时纠缠 $E[t(n_0)]$ 为最大值 1. 若

$$\cos(2Jt(n_0)/\hbar - \tau_0) > 0$$

时，则在时间 $t = t(n_0 + 1)$ 时纠缠 $E[t(n_0 + 1)]$ 为最大值 1. 图 3 是其纠缠 E 随初态 b 和时间 t 的演化情况((a) $\theta_4 = 0$, (b) $\theta_4 = \pi/4$). 由(34)式我们可以知道，当 $\theta_4 = 0$ 时，不论 b 取何值，通过时间演化，在时间 $t = (2n + 1)\pi\hbar/(2J)$ 时纠缠达到最大值 $E = 1$；当 $b = 0, c = 1$ 或 $b = 1, c = 0$ 时，不论 θ_4 取何值，通过时间演化，在时间 $t = (2n + 1)\pi\hbar/(2J)$ 时纠缠达到最大值 $E = 1$，n 为自然数.

4. 结　　论

通过对两粒子海森伯自旋团簇的研究发现：1) 从外部施加的共同的、给定的外场，无论是对个别粒子进行的局域操作还是对所有粒子进行的整体操作，由于它已给定因而不是动力学自由度，当它与粒子相互作用时，其作用和影响是单向的：它只能影响粒子的运动，既不能接受粒子的信息，也不能向粒子反馈信息，因而不能引起粒子之间的关联，故对系统纠缠不作出贡献. 2) 纠缠的时间演化只决定于相互作用和初态；对本模型，$S_z = \pm 1$ 的自旋分离三态 $|\uparrow\uparrow\rangle$ 和 $|\downarrow\downarrow\rangle$ 对纠缠没有贡献，而 $S_z = 0$ 自旋分离态 $|\downarrow\uparrow\rangle$ 和 $|\uparrow\downarrow\rangle$ 的纠缠却可以从 $E = 0$ 的最小纠缠态增长到 $E = 1$ 的最大纠缠态. 3) 对本模型，纠缠的时间演化是周期性的，其周期由相互作用强度决定：一般为 $T = 2\pi\hbar/J$（特殊情况为 $T = \pi\hbar/J$）. 4) 当初态为 $b\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_2}|\downarrow\uparrow\rangle + c\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_3}|\uparrow\downarrow\rangle$ 时，无论 $b\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_2}, c\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_3}$ 取何值，通过时间演化，总可使其纠缠增长到 1，且求得其纠缠等于 1 时，时间与初态系数的关系式.

[1] Bennett C H, DiVincenzo D P 2000 *Nature* **404** 247

[2] Ye M Y, Zhang Y S, Guo G C 2008 *Science in China* G **51** 14

[3] Ding S C, Jin Z 2007 *Chin. Sci. Bull.* **52** 2161

[4] Ionicioiu R, Zanardi P, Rossi F 2001 *Phys. Rev.* A **63** 050101

[5] Loss D, Divincenzo D P 1998 *Phys. Rev.* A **57** 120

[6] Kane B E 1998 *Nature* **393** 133

[7] Zhou L, Song H S, Guo Y Q, Li C 2003 *Phys. Rev.* A **68** 024301

[8] Eggert S, Affleck I, Takahashi M 1994 *Phys. Rev. Lett.* **73** 332

[9] Arnesen M C, Bose S, Vedral V 2001 *Phys. Rev. Lett.* **87** 017901
[10] Xi X Q, Chen W X, Liu Q, Yue R H 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3026 (in Chinese) [惠小强、陈文学、刘 起、岳瑞宏 2006 物理学报 **55** 3026]
[11] Qin M, Tian D P, Tao Y J 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 3595 (in Chinese) [秦 猛、田东平、陶应娟 2008 物理学报 **57** 3595]
[12] Zhou L, Song H S, Guo Y Q, Li C 2003 *Phys. Rev.* A **68** 024301
[13] Qin M, Tao Y J, Hu M L, Tian D P 2008 *Science in China G* **51** 817
[14] Zhang Y, Long G L, Wu Y C, Guo G C 2007 *Commun. Theor. Phys.* **47** 787
[15] Zhang J F, Long G L, Zhang W, Deng Z W, Liu W Z, Lu Z H 2005 *Phys. Rev.* A **72** 012331
[16] Wang S J 1999 *Prog. Phys.* **19** 331
[17] Wang S J, Li F L, Weiguny A 1993 *Phys. Lett.* A **180** 189
[18] Wang S J 2005 *Advanced Quantum Theory and Quantum Many-Body Theory* (Chengdu: Sichuan University Press) p238 (in Chinese) [王顺金 2005 高等量子论与量子多体理论 (成都:四川大学出版社) 第 238 页]
[19] Abouraddy A F, Saleh B E A, Sergienko A V, Teich M C 2001 *Phys. Rev.* A **64** 050101

Time evolution of entanglement for the two spin-1/2 particles system*

Lu Peng Wang Shun-Jin†
(*Center of Theoretical Physics, School of Physics and Technology, Sichuan University, Chengdu* 610064, *China*)
(Received 10 November 2008; revised manuscript received 1 December 2008)

Abstract

The Heisenberg spin cluster with two particles controlled by a time-dependent magnetic field is investigated. Since the system possesses an $SU(2)$ algebraic structure, the exact analytical solution to time evolution operator can be obtained by using algebraic dynamical method. Based on the analytical solution, the time evolution of wave function of the two-particle system can be obtained, then the entanglement can be calculated easily. The time evolution of the entanglement for different initial states is studied, and the effect of external field on the entanglement is discussed as well.

Keywords: entanglement of two particles system, algebraic dynamics
PACC: 0365, 0367, 7510J

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 90503008 and 10775100) and the Center of Theoretical Nuclear Physics of HIRFL of China.
† Corresponding author. E-mail: sjwang@home.swjtu.edu.cn