

快慢型超混沌 Lorenz 系统分析*

韩修静 江波 毕勤胜†

(江苏大学理学院, 镇江 212013)

(2008 年 10 月 17 日收到, 2008 年 11 月 26 日收到修改稿)

讨论了快慢两时间尺度下超混沌 Lorenz 系统原点的稳定性问题, 分析了原点的 Hopf 分岔, 包括 Hopf 分岔的存在性, 分岔方向以及分岔周期解的稳定性等问题, 并用数值例子对所得到的结果加以验证. 在一定的参数条件下, 快慢系统会产生对称簇发并能达到超混沌状态. 基于快慢分析法, 揭示了对称簇发中沉寂态与激发态相互转迁的不同分岔模式, 并进一步分析了耦合强度对慢过效应的影响.

关键词: 超混沌 Lorenz 系统, Hopf 分岔, 对称式 fold/subHopf 簇发, 慢过效应

PACC: 0545

1. 引言

1979 年, Rössler 提出了第一个超混沌模型, 指出一个系统要成为超混沌系统必须满足下列两个条件: 1) 存在超混沌吸引子的超混沌系统至少是四维的; 2) 超混沌系统中耦合的方程导致不稳定的维数至少是二维, 其中之一必须包含非线性项^[1].

由于超混沌系统具有不止一个正 Lyapunov 指数, 且相轨在多个方向上分离, 因而具有更为复杂的动力学行为. 正是由于这种复杂性, 超混沌在保密通信等数字信息领域中具有广泛的应用前景^[2-5], 这也激起了人们对超混沌的关注. 特别是近年来, 超混沌受到国内外学者的高度重视, 大量的报道揭示了许多实际系统中存在的各种超混沌现象^[6-8]. 同时, 基于经典的混沌系统, 人们不断地提出构造超混沌的方法^[9, 10]; 其中, 把一个状态反馈控制器施加于混沌系统来获得超混沌的方法引起了人们的关注^[11-14].

例如, 通过对 Lorenz 系统第二个方程引入一个反馈控制器 $k_0 w$, 并令 $\dot{w} = l_1 x + l_2 y$, 可以得到如下超混沌 Lorenz 系统:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha(y - x), \\ \dot{y} &= x(\gamma - z) - y + k_0 w, \\ \dot{z} &= xy - \beta z, \end{aligned}$$

$$\dot{w} = l_1 x + l_2 y, \quad (1)$$

其中 $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0, k_0 > 0, l_1 \in \mathbf{R}, l_2 \in \mathbf{R}$.

当 $k_0 = 1, l_2 = 0$ 时, 文献 [1] 分析了该情形下超混沌系统 (1) 的基本特性及动力学行为演化过程, 并给出了系统的电路实现. 当 $\alpha = 10, \beta = \frac{8}{3}, \gamma = 28, k_0 = 1$ 时, 文献 [14] 详细地分析了这一情形下超混沌系统 (1) 的复杂动力学行为.

迄今为止, 大部分的工作都基于状态变量 w 与其他状态变量在同一时间尺度下的行为, 而对于 $0 < |l_1| \ll 1, 0 < |l_2| \ll 1$ 时, 即快慢两种无量纲时间尺度下系统的动力学行为, 目前还没有比较深入的工作. 本文正是基于这样的背景, 探讨这一特殊情形下系统的动力学行为. 引入小参数 ϵ , 使得 $l_1 = \epsilon k_1, l_2 = \epsilon k_2$, 于是系统 (1) 可以改写为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha(y - x), \\ \dot{y} &= x(\gamma - z) - y + k_0 w, \\ \dot{z} &= xy - \beta z, \\ \dot{w} &= \epsilon(k_1 x + k_2 y), \end{aligned} \quad (2)$$

其中 $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0, k_0 > 0, k_1 \in \mathbf{R}, k_2 \in \mathbf{R}, \epsilon(0 < \epsilon \ll 1)$.

2. 原点的稳定性及 Hopf 分岔分析

显然原点 O 始终是系统 (2) 的奇点, 当 $k_1 + k_2$

* 国家自然科学基金(批准号: 10872080, 10602020)资助的课题.

† 通讯联系人. E-mail: qbi@ujs.edu.cn

≠ 0 时,它是系统的唯一奇点;当 $k_1 + k_2 = 0$ 时,系统存在无数个奇点,它们可以统一地表示为

$$\left(x, x, \frac{x^2}{\beta}, \frac{x^3}{\beta} - (\gamma - 1)x \right), x \in \mathbf{R}. \text{ 由于原点 } O \text{ 始$$

终是系统(2)的奇点,只有当 $k_1 + k_2 = 0$ 这一极端条件满足时,系统才存在其他奇点.鉴于系统(2)原点的重要性,我们首先探讨其稳定性问题,其稳定性可由如下定理刻画.

定理 1 若 $k_1 + k_2 < 0, \epsilon k_0(\alpha k_1 - k_2) + \alpha(1 + \alpha)(1 - \gamma) > 0$ 则原点 O 是渐近稳定的.

证明 系统(2)在原点 O 处线性化系统所对应的雅可比矩阵为

$$J(O) = \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha & 0 & 0 \\ \gamma & -1 & 0 & k_0 \\ 0 & 0 & -\beta & 0 \\ \epsilon k_1 & \epsilon k_2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

其特征多项式为

$$F(\lambda) = (\lambda + \beta)(\lambda^3 + (1 + \alpha)\lambda^2 + (\alpha - \epsilon k_0 k_2 - \alpha\gamma) \times \lambda - \epsilon \alpha k_0(k_1 + k_2)), \quad (3)$$

于是可得 $\lambda_1 = -\beta < 0$. 令

$$f(\lambda) = \lambda^3 + (1 + \alpha)\lambda^2 + (\alpha - \epsilon k_0 k_2 - \alpha\gamma)\lambda - \epsilon \alpha k_0(k_1 + k_2). \quad (4)$$

由 Routh-Hurwitz 准则可知,方程 $f(\lambda) = 0$ 的所有根均具有负实部的充分必要条件是 inequality 组 $p_1^0 > 0, p_3^0 > 0, p_1^0 p_2^0 - p_3^0 > 0$ 成立,其中 $p_1^0 = 1 + \alpha, p_2^0 = \alpha - \epsilon k_0 k_2 - \alpha\gamma, p_3^0 = -\epsilon \alpha k_0(k_1 + k_2)$. 显然恒有 $p_1^0 > 0$, 而 $p_1^0 p_2^0 - p_3^0 = \epsilon k_0(\alpha k_1 - k_2) + \alpha(1 + \alpha)(1 - \gamma)$, 注意到 $\epsilon > 0, \alpha > 0, k_0 > 0$, 于是当 $k_1 + k_2 < 0, \epsilon k_0(\alpha k_1 - k_2) + \alpha(1 + \alpha)(1 - \gamma) > 0$ 时,方程 $f(\lambda) = 0$ 的所有根均具有负实部,从而特征方程 $F(\lambda) = 0$ 的所有根均具有负实部.于是可知,原点 O 是渐近稳定的.

下面讨论一般情形下,系统(2)原点的 Hopf 分岔问题,包括 Hopf 分岔的存在性,分岔方向及分岔周期解的稳定性问题,我们有下列结果.

定理 2 若将 k_1 视为系统(2)的分岔参数,则系统在原点 O 处发生 Hopf 分岔的充分必要条件是 $p_2^0 = \alpha - \epsilon k_0 k_2 - \alpha\gamma > 0$, 此时分岔值

$$k_{10} = -\frac{(1 + \alpha)(\alpha - \epsilon k_0 k_2 - \alpha\gamma) + \epsilon \alpha k_0 k_2}{\epsilon \alpha k_0}.$$

证明 必要性:若系统(2)在原点处发生 Hopf 分岔,不妨设 $\lambda = cI (c > 0, I = \sqrt{-1})$ 为相应的纯

虚特征根,即 $f(cI) = 0$, 整理可得 $-\epsilon \alpha k_0(k_1 + k_2) - (1 + \alpha)c^2 + c(\alpha - \epsilon k_0 k_2 - \alpha\gamma - c^2)I = 0$, 于是 $p_2^0 = \alpha - \epsilon k_0 k_2 - \alpha\gamma = c^2 > 0$.

充分性:当 $p_2^0 = \alpha - \epsilon k_0 k_2 - \alpha\gamma > 0$ 时,我们直接验证 Hopf 分岔定理^[15]的两个条件.容易解得特征多项式 $F(\lambda)$ 在临界点

$$k_1 = k_{10} = -\frac{(1 + \alpha)(\alpha - \epsilon k_0 k_2 - \alpha\gamma) + \epsilon \alpha k_0 k_2}{\epsilon \alpha k_0}$$

处的四个特征根分别为 $\lambda_1 = -\beta < 0, \lambda_2 = -(1 + \alpha) < 0, \lambda_3 = \sqrt{\alpha - \epsilon k_0 k_2 - \alpha\gamma}I, \lambda_4 = -\sqrt{\alpha - \epsilon k_0 k_2 - \alpha\gamma}I$. 因而当 $p_2^0 = \alpha - \epsilon k_0 k_2 - \alpha\gamma > 0$ 时, Hopf 分岔定理第一个条件成立.

另一方面,由特征多项式 $F(\lambda)$ 可得

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}(k_{10})_{\lambda=cI} &= -\frac{\epsilon \alpha k_0(\beta^2 + c^2)}{2c^2(1 + \alpha + \beta)^2 + (\beta + \alpha\beta - c^2)^2} \\ &\quad + I \left\{ \frac{\epsilon \alpha k_0[(1 + \alpha)\beta^2 - (1 + \alpha + 2\beta)c^2]}{2c^3(1 + \alpha + \beta)^2 + 2c(\beta + \alpha\beta - c^2)^2} \right\}, \end{aligned}$$

其中 $c = \sqrt{\alpha - \epsilon k_0 k_2 - \alpha\gamma}$. 从而

$$\begin{aligned} \text{Re}(\dot{\lambda}(k_{10})_{\lambda=cI}) &= -\frac{\epsilon \alpha k_0(\beta^2 + c^2)}{2c^2(1 + \alpha + \beta)^2 + (\beta + \alpha\beta - c^2)^2} < 0, \end{aligned}$$

于是 Hopf 分岔定理第二个条件也成立. 综上所述,系统在原点 O 处会发生 Hopf 分岔,且分岔值

$$k_{10} = -\frac{(1 + \alpha)(\alpha - \epsilon k_0 k_2 - \alpha\gamma) + \epsilon \alpha k_0 k_2}{\epsilon \alpha k_0}.$$

定理 3 在定理 2 的条件下,即若 $p_2^0 = \alpha - \epsilon k_0 k_2 - \alpha\gamma > 0$, 则当参数 k_1 沿递减的方向经过分岔值 $k_{10} = -\frac{(1 + \alpha)(\alpha - \epsilon k_0 k_2 - \alpha\gamma) + \epsilon \alpha k_0 k_2}{\epsilon \alpha k_0}$ 时,系统(2)在原点 O 处将分岔出稳定的极限环,即超临界 Hopf 分岔.

证明 由命题条件 $p_2^0 = \alpha - \epsilon k_0 k_2 - \alpha\gamma > 0$, 且 Hopf 分岔值

$$k_{10} = -\frac{(1 + \alpha)(\alpha - \epsilon k_0 k_2 - \alpha\gamma) + \epsilon \alpha k_0 k_2}{\epsilon \alpha k_0}.$$

为了方便,令 $\Omega = \sqrt{\alpha - \epsilon k_0 k_2 - \alpha\gamma}$. 借助于软件 Maple9.5, 可以求出特征根 $\sqrt{\alpha - \epsilon k_0 k_2 - \alpha\gamma}I = \Omega I, -(1 + \alpha), -\beta$ 所对应的特征向量分别为

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\alpha + \Omega I}{\alpha} \\ 0 \\ \frac{\epsilon k_0 k_2 + \Omega(1 + \alpha)I}{k_0 \alpha} \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -\alpha \\ 1 \\ 0 \\ \frac{\alpha(\gamma - 1)}{k_0} \end{pmatrix},$$

$$v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

于是定义

$$P = (\operatorname{Re} v_1, -\operatorname{Im} v_1, v_2, v_3) \\ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\alpha & 0 \\ 1 & -\frac{\Omega}{\alpha} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\varepsilon k_2}{\alpha} & -\frac{\Omega(1+\alpha)}{k_0\alpha} & \frac{\alpha(\gamma-1)}{k_0} & 0 \end{pmatrix},$$

对系统(2)施行如下线性变换:

$$(x_1 \ y_1 \ z_1 \ w_1)^T = P(x_2 \ y_2 \ z_2 \ w_2)^T,$$

可得

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= -\Omega y_2 + F_1(x_2, y_2, z_2, w_2), \\ \dot{y}_2 &= \Omega x_2 + F_2(x_2, y_2, z_2, w_2), \\ \dot{z}_2 &= -(1+\alpha)z_2 + F_3(x_2, y_2, z_2, w_2), \\ \dot{w}_2 &= -\beta z_2 + F_4(x_2, y_2, z_2, w_2), \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} F_1(x_2, y_2, z_2, w_2) &= \frac{(1+2\alpha-\alpha\gamma)m_1 + \alpha(1+\alpha)m_2 - \alpha k_0 m_3 + \Omega^3 y_2 + \Omega y_2(1+\alpha)^2}{\Omega^2 + (1+\alpha)^2}, \\ F_2(x_2, y_2, z_2, w_2) &= -\frac{m_1(\varepsilon k_0 k_2 + \alpha^2 - \alpha^2 \gamma) - \alpha m_2 \Omega^2 - \alpha(1+\alpha)k_0 m_3 - \Omega^2 x_2(\Omega^2 + (1+\alpha)^2)}{\Omega(\Omega^2 + (1+\alpha)^2)}, \\ F_3(x_2, y_2, z_2, w_2) &= -\frac{m_1(\varepsilon k_0 k_2 + \alpha^2 - \alpha^2 \gamma) + \alpha(1+\alpha)m_2 - \alpha k_0 m_3 + \alpha(1+\alpha)\Omega^2(\Omega^2 + (1+\alpha)^2)z_2}{\alpha(\Omega^2 + (1+\alpha)^2)}, \\ F_4(x_2, y_2, z_2, w_2) &= (x_2 - \alpha z_2)\Omega x_2 - \frac{\Omega y_2}{\alpha} + z_2. \end{aligned}$$

m_1, m_2, m_3 的定义如下:

$$\begin{aligned} m_1 &= \alpha \left(-\frac{\Omega y_2}{\alpha} + z_2 + \alpha z_2 \right), \\ m_2 &= (x_2 - \alpha z_2)\Omega(\gamma - w_2) - x_2 + \frac{\Omega y_2}{\alpha} - z_2 + k_0 \\ &\quad \times \left(\frac{\varepsilon k_2 x_2}{\alpha} - \frac{\Omega(1+\alpha)y_2}{\alpha k_0} + \frac{\alpha(\gamma-1)z_2}{k_0} \right), \\ m_3 &= \varepsilon [k_1(x_2 - \alpha z_2) + k_2(x_2 - \frac{\Omega y_2}{\alpha} + z_2)]. \end{aligned}$$

于是可得

$$\begin{aligned} g_{11} &= \frac{1}{4} \left[\frac{\partial^2 F_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial y_2^2} + I \left(\frac{\partial^2 F_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial y_2^2} \right) \right] = 0, \\ g_{02} &= \frac{1}{4} \left[\frac{\partial^2 F_1}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 F_1}{\partial y_2^2} - 2 \frac{\partial^2 F_2}{\partial x_2 \partial y_2} \right. \\ &\quad \left. + I \left(\frac{\partial^2 F_2}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 F_2}{\partial y_2^2} + 2 \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_2 \partial y_2} \right) \right] = 0, \\ g_{20} &= \frac{1}{4} \left[\frac{\partial^2 F_1}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 F_1}{\partial y_2^2} + 2 \frac{\partial^2 F_2}{\partial x_2 \partial y_2} \right. \\ &\quad \left. + I \left(\frac{\partial^2 F_2}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 F_2}{\partial y_2^2} - 2 \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_2 \partial y_2} \right) \right] = 0, \\ G_{21} &= \frac{1}{8} \left[\frac{\partial^3 F_1}{\partial x_2^3} + \frac{\partial^3 F_1}{\partial x_2 \partial y_2^2} + \frac{\partial^3 F_2}{\partial x_2^2 \partial y_2} + \frac{\partial^3 F_2}{\partial y_2^3} \right] \end{aligned}$$

$$+ I \left(\frac{\partial^3 F_2}{\partial x_2^3} + \frac{\partial^3 F_2}{\partial x_2 \partial y_2^2} - \frac{\partial^3 F_1}{\partial x_2^2 \partial y_2} - \frac{\partial^3 F_1}{\partial y_2^3} \right) = 0.$$

进而

$$\begin{aligned} h_{11}^1 &= \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 F_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 F_3}{\partial y_2^2} \right) = 0, \\ h_{11}^2 &= \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 F_4}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 F_4}{\partial y_2^2} \right) = \frac{1}{2}, \\ h_{20}^1 &= \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 F_3}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 F_3}{\partial y_2^2} - 2I \frac{\partial^2 F_3}{\partial x_2 \partial y_2} \right) = 0, \\ h_{20}^2 &= \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 F_4}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 F_4}{\partial y_2^2} - 2I \frac{\partial^2 F_4}{\partial x_2 \partial y_2} \right) = \frac{1}{2} + \frac{\Omega I}{2\alpha}. \end{aligned}$$

然后求解下列方程:

$$\begin{aligned} DW_{11} &= -h_{11}, \\ (D - 2\omega_0 I)W_{20} &= -h_{20}, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} D &= \begin{pmatrix} -(1+\alpha) & 0 \\ 0 & -\beta \end{pmatrix}, h_{11} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \\ h_{20} &= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{\Omega I}{2\alpha} \end{pmatrix}, \omega_0 = \Omega, \end{aligned}$$

可得

$$W_{11} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2\beta \end{pmatrix}, W_{20} = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha + \Omega I \\ 2\alpha(\beta + 2\Omega I) \end{pmatrix}.$$

接着计算

$$G_{110}^1 = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 F_1}{\partial x_2 \partial z_2} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial y_2 \partial z_2} + I \left(\frac{\partial^2 F_2}{\partial x_2 \partial z_2} - \frac{\partial^2 F_2}{\partial y_2 \partial z_2} \right) \right] = 0,$$

$$G_{110}^2 = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 F_1}{\partial x_2 \partial w_2} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial y_2 \partial w_2} + I \left(\frac{\partial^2 F_2}{\partial x_2 \partial w_2} - \frac{\partial^2 F_2}{\partial y_2 \partial w_2} \right) \right] = -\frac{\alpha(1+\alpha)}{\chi \Omega^2 + (1+\alpha)^2} + \frac{\alpha \Omega I}{\chi \Omega^2 + (1+\alpha)^2},$$

$$G_{101}^1 = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 F_1}{\partial x_2 \partial z_2} - \frac{\partial^2 F_1}{\partial y_2 \partial z_2} + I \left(\frac{\partial^2 F_2}{\partial x_2 \partial z_2} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial y_2 \partial z_2} \right) \right] = 0,$$

$$G_{101}^2 = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 F_1}{\partial x_2 \partial w_2} - \frac{\partial^2 F_1}{\partial y_2 \partial w_2} + I \left(\frac{\partial^2 F_2}{\partial x_2 \partial w_2} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial y_2 \partial w_2} \right) \right] = -\frac{\alpha(1+\alpha)}{\chi \Omega^2 + (1+\alpha)^2} + \frac{\alpha \Omega I}{\chi \Omega^2 + (1+\alpha)^2},$$

$$g_{21} = G_{21} + (2G_{110}^1 W_{11}^1 + G_{101}^1 W_{20}^1) + (2G_{110}^2 W_{11}^2 + G_{101}^2 W_{20}^2)$$

$$= -\frac{2\alpha(1+\alpha)(\beta^2 + 4\Omega^2) + \alpha\beta^2(1+\alpha) + \beta\Omega^2(2+\beta)}{4\beta(\beta^2 + 4\Omega^2)(\Omega^2 + (1+\alpha)^2)}$$

$$+ I \left\{ \frac{\Omega[2\alpha(\beta^2 + 4\Omega^2) + \alpha\beta^2 + 2\beta\Omega^2] - \Omega\beta(1+\alpha)(\beta - 2\alpha)}{4\beta(\beta^2 + 4\Omega^2)(\Omega^2 + (1+\alpha)^2)} \right\}.$$

基于以上计算,由

$$C_1(0) = \frac{I}{2\omega_0} (g_{20}g_{11} - 2|g_{11}|^2 - \frac{1}{3}|g_{02}|^2) + \frac{1}{2}g_{21}$$

$$= \frac{1}{2}g_{21},$$

$$\mu_2 = -\frac{\text{Re}(C_1(0))}{\alpha(0)},$$

$$\beta_2 = 2\text{Re}(C_1(0)),$$

其中

$$\alpha(0) = \text{Re}(\lambda(k_{10})_{\lambda=\omega}) = -\frac{\epsilon \alpha k_0 (\beta^2 + \Omega^2)}{2\Omega^2(1+\alpha+\beta)^2 + \chi(\beta + \alpha\beta - \Omega^2)^2} < 0, \omega_0 = \Omega > 0,$$

$$\text{Re}(C_1(0)) = -\frac{2\alpha(1+\alpha)(\beta^2 + 4\Omega^2) + \alpha\beta^2(1+\alpha) + \beta\Omega^2(2+\beta)}{8\beta(\beta^2 + 4\Omega^2)(\Omega^2 + (1+\alpha)^2)} < 0,$$

可得 $\mu_2 < 0, \beta_2 < 0$, 于是由文献 16 可知, 当参数 k_1 沿递减的方向经过分岔值

$k_{10} = -\frac{(1+\alpha)(\alpha - \epsilon k_0 k_2 - \alpha\gamma) + \epsilon \alpha k_0 k_2}{\epsilon \alpha k_0}$ 时, 在点 O 处将分岔出稳定的极限环, 即超临界

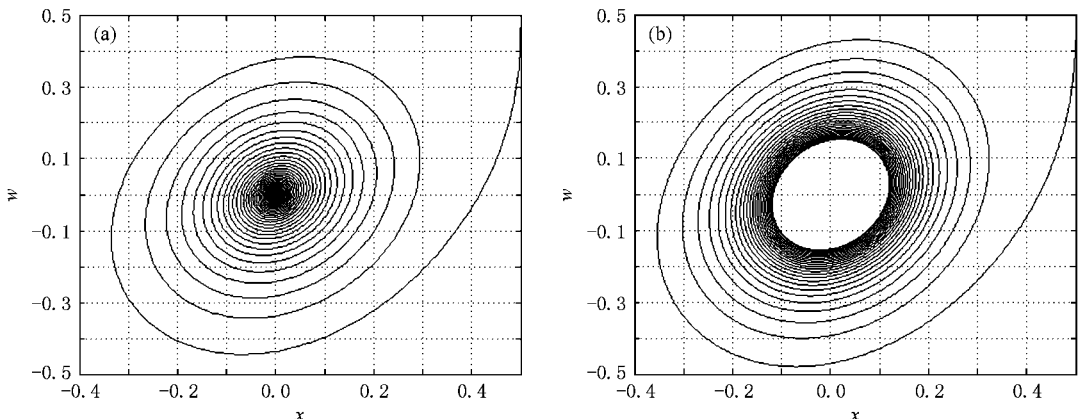


图 1 (a) 稳定的原点 $k_1 = -2.2$; (b) 稳定的极限环 $k_1 = -2.3$

Hopf 分岔.

数值例子 若取定参数 $\alpha = 4, \beta = \epsilon = k_0 = k_2 = 1, \gamma = 0.5$ 则 $p_2^0 = \alpha - \epsilon k_0 k_2 - \alpha \gamma = 1 > 0$, 于是由定理 2 可知系统在原点 O 处会发生 Hopf 分岔, 且分岔值 $k_{10} = -\frac{(1 + \alpha)(\alpha - \epsilon k_0 k_2 - \alpha \gamma) + \epsilon \alpha k_0 k_2}{\epsilon \alpha k_0} = -2.25$. 若取 $k_1 = -2.2$, 则 $k_1 + k_2 = -1.2 < 0$, $\epsilon k_0(\alpha k_1 - k_2) + \alpha(1 + \alpha)(1 - \gamma) = 0.2 > 0$, 由定理 1 可知此时原点是稳定的(图 1(a)). 进一步地, 由定理 3 可知当参数 k_1 沿递减的方向经过分岔值 $k_{10} = -2.25$ 时, 从原点 O 处将分岔出稳定的极限环(图 1(b)).

3. 对称式 fold/subHopf 簇发及超混沌吸引子

下面我们探讨快慢两时间尺度下, 系统(2)的动力学行为. 系统(2)前三个方程构成了一个快子系统(FS), 而第四个方程单独构成了一个慢子系统(SS). 为了便于讨论, 我们设定参数 $\beta = \frac{8}{3}, \gamma = 28, k_0 = 10, k_1 = -8, k_2 = 2, \epsilon = 0.01$, 将参数 $\alpha (> 0)$ 视

为系统的控制参数.

显然此时系统存在唯一的奇点 O , 且总有 $p_1^0 p_2^0 - p_3^0 = \epsilon k_0(\alpha k_1 - k_2) + \alpha(1 + \alpha)(1 - \gamma) = 0.2 - 4\alpha - 1 - 27\alpha(1 + \alpha) < 0$ (p_1^0, p_2^0, p_3^0 含义同定理 1 所述), 于是由 Routh-Hurwitz 准则可知, 此时方程 $f(\lambda) = \lambda^3 + p_1^0 \lambda^2 + p_2^0 \lambda + p_3^0 = 0$ 至少存在一个非负实部的根, 即零根、纯虚根或实部为正数的根. 显然方程 $f(\lambda) = 0$ 不存在零根, 而若 $f(\lambda) = 0$ 存在纯虚根, 不妨设其为 aI ($a > 0, I = \sqrt{-1}$) 将其代入 $f(\lambda) = 0$ 整理可得 $p_3^0 - p_1^0 a^2 + \alpha(p_2^0 - a^2)I = 0$. 于是 $a^2 = p_2^0, p_3^0 - p_1^0 a^2 = p_3^0 - p_1^0 p_2^0 = 0$ 这与 $p_1^0 p_2^0 - p_3^0 = 0.2 - 4\alpha - 1 - 27\alpha(1 + \alpha) < 0$ 矛盾. 所以方程 $f(\lambda) = 0$ 至少存在一个实部为正数的根, 由此可知, 此时系统的唯一奇点 O 总是不稳定的.

图 2(a)(b)(c) 给出的是随着参数 α 的变化, 系统(2)典型的动力学行为. 其中, $\alpha = 3$ (图 2(a)) 以及 $\alpha = 5$ (图 2(b)) 时是周期的, $\alpha = 10$ 时(图 2(c)) 是超混沌的, 其四个 Lyapunov 指数分别为 $LE_1 = 1.2393, LE_2 = 0.0431, LE_3 = 0.0000, LE_4 = -20.9992$. 图 2(d)(e)(f) 为相应的变量 x 的时间历程.

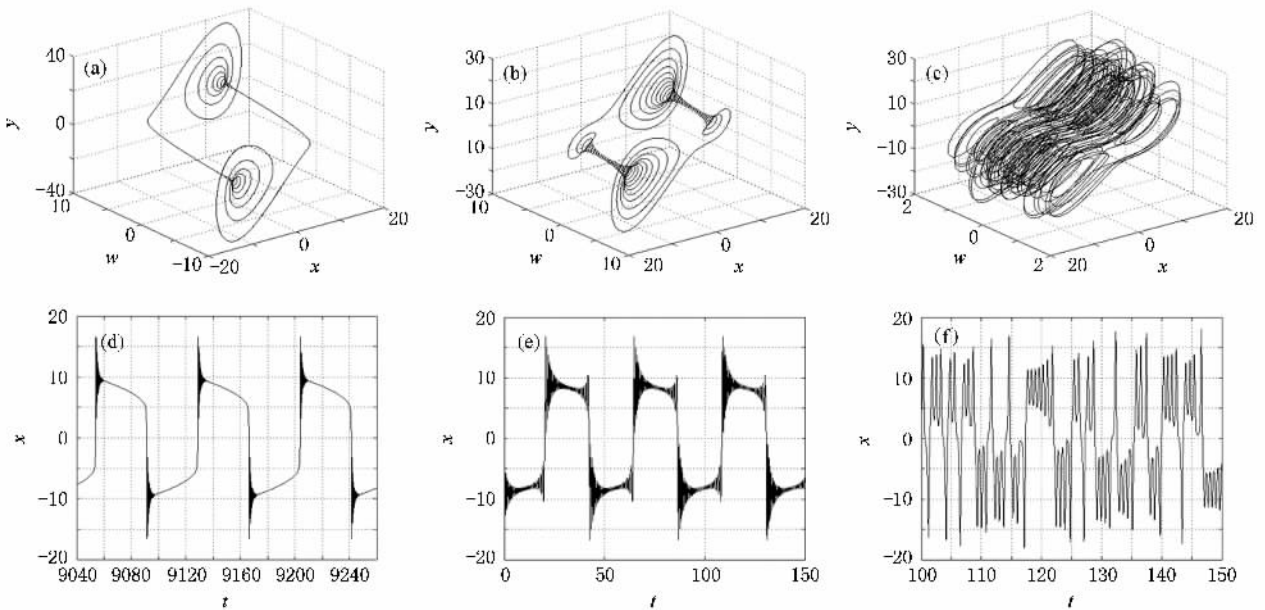


图 2 系统(2)的对称簇发、超混沌吸引子及相应的时间历程 (a) $\alpha = 3$ 时, $x-w-y$ 空间相投影; (b) $\alpha = 5$ 时, $x-w-y$ 空间相投影; (c) $\alpha = 10$ 时, $x-w-y$ 空间相投影; (d) $\alpha = 3$ 时, x 的时间历程; (e) $\alpha = 5$ 时, x 的时间历程; (f) $\alpha = 10$ 时, x 的时间历程

图 3 给出的是 $\alpha = 3$ 时, 对称周期解(图 3(a)) 在六个平面上的相投影. 事实上, 这是一种对称簇发(symmetric bursting), 不少文献都发现了这种具有对

称结构的周期解, 如文献[11]和文献[12]分别给出了类似于图 3(b)和图 3(c)的周期解, 但没有探讨其产生机理.

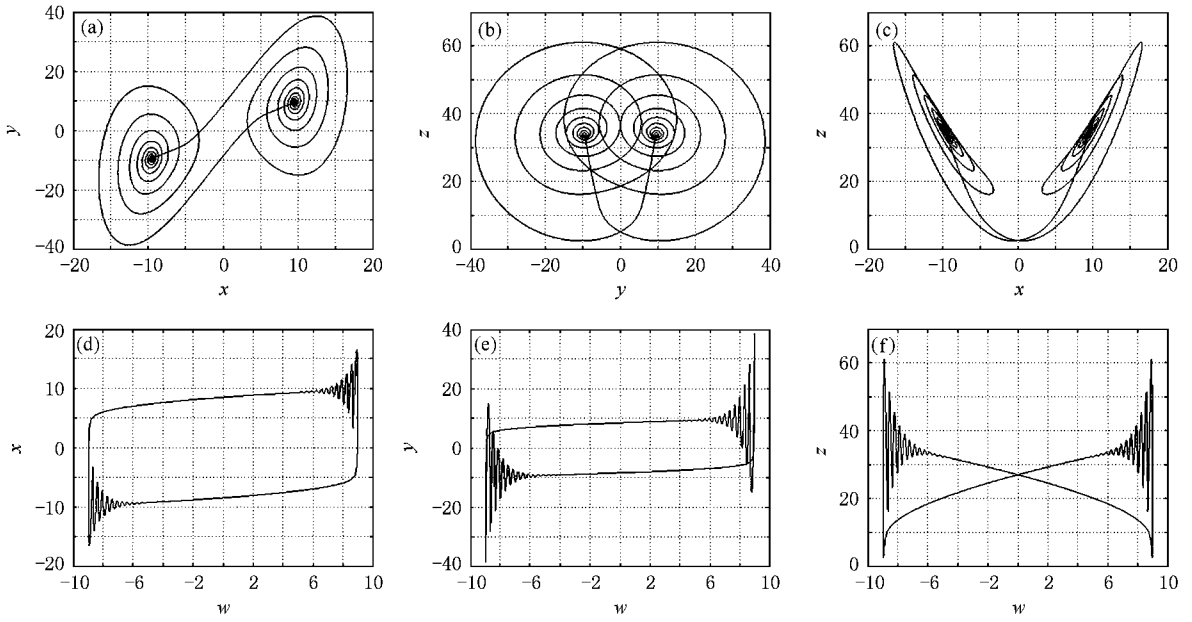


图3 $\alpha = 3$ 时, 系统(2)在各平面上的相投影 (a)x-y 平面 (b)y-z 平面 (c)x-z 平面 (d)w-x 平面 (e)w-y 平面 (f)w-z 平面

Rinzel 和 Ermentrout 提出了快慢分析法 (slow-fast analysis^[17]) , 解释了神经元系统的簇放电 (bursting) 现象. 下面我们用该方法探讨 $\alpha = 3, \beta = \frac{8}{3}, \gamma = 28, k_0 = 10, k_1 = -8, k_2 = 2, \epsilon = 0.01$ 这一具有代表性情形下, 对称簇发的产生机理问题.

我们将慢变量 w 视为快子系统 (x, y, z) 的分岔参数, 慢变参数 w 调节控制系统的行为. 图 4(a) 给出的是该情形下, $x - y - w$ 空间中快子系统 (x, y, z) 关于慢变参数 w 的平衡点分岔分析. Z 形曲线由实线和虚线两部分组成, 分别表示稳定和不安定的平衡点. SH_1, SH_2 表示平衡点的亚临界 Hopf 分岔, 分岔值分别为 $w_{SH1} = -6.0483, w_{SH2} = 6.0483$;

LP_1, LP_2 表示平衡点的 Fold^[18] 分岔, 分岔值分别为 $w_{LP1} = -8.8182, w_{LP2} = 8.8182$.

不妨认为系统从轨线下半支 $w = 7.0$ 处 (位于 LP_2, SH_2 两分岔点之间) 出发, 由 x 的时间历程 (图 2(d)) 我们可以确定全系统的轨线沿顺时针方向运动 (图 4(b)), 从而此时参数 w 沿增长的方向运动. 由图 4(b) 可知, 当参数 w 增加到 Fold 分岔值 $w_{LP2} = 8.8182$ 时, 系统因 Fold 分岔从平稳运动转向周期运动, 这时系统处于轨线上半支, 参数开始减小. 随着参数的减小, 系统周期运动的振幅逐渐减小, 但由于慢过效应 (slow passage effect^[18]), 系统在微小振幅的周期运动上持续了较长的一段时间, 直到参数递减到亚临界 Hopf 分岔值 $w_{SH1} = -6.0483$ 时, 系统才由

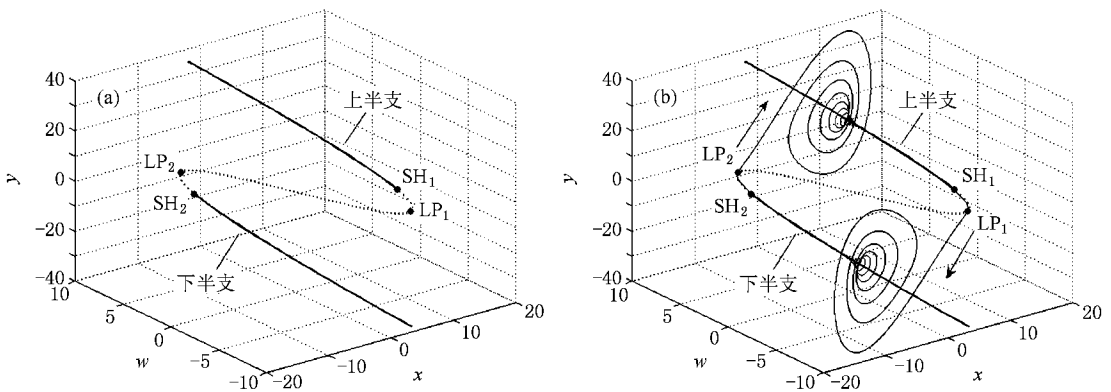


图4 (a) 快子系统 (x, y, z) 关于慢变参数 w 的平衡点分岔分析 (b) 快子系统 (x, y, z) 关于慢变参数 w 的平衡点分岔分析与 $x - w - y$ 空间中相图的叠加

周期运动转向平稳运动. 参数 w 仍在不断递减, 当参数递减到 $w_{LP1} = -8.8182$ 时, 系统又因 Fold 分岔转向周期运动. 此时系统处于轨线下半支, 于是参数开始增加. 同样地, 由于慢过效应, 当参数增加到 $w_{SH2} = 6.0483$ 时, 系统才发生亚临界 Hopf 分岔, 恢复了平稳运动. 直到参数增加至 7.0 时, 系统完成了一个周期的运动.

这种周期解的产生机理和 fold/subHopf 簇发 (fold/subHopf Bursting^[18]) 的产生机理非常相似, 不同之处在于该周期解本身具有自对称结构, 因而 Fold

分岔和 SubHopf 分岔都发生了两次, 我们不妨称之为对称式 fold/subHopf 簇发.

图 5 给出的是 $\alpha = 3$ 时, $w-x$ 平面上快子系统 (x, y, z) 关于慢变参数 w 的平衡点分岔分析 (图 5 (a)), 及其与 $w-x$ 平面上相图的叠加 (图 5 (b)).

需要指出的是, 系统在向混沌演化的过程中依然保持着明显的快慢节律 (图 2 (b)) (e)); 同时我们注意到, 即使是超混沌状态这种快慢效应依然存在, 即在超混沌时间历程 (图 2 (f)) 上快慢效应交替出现.

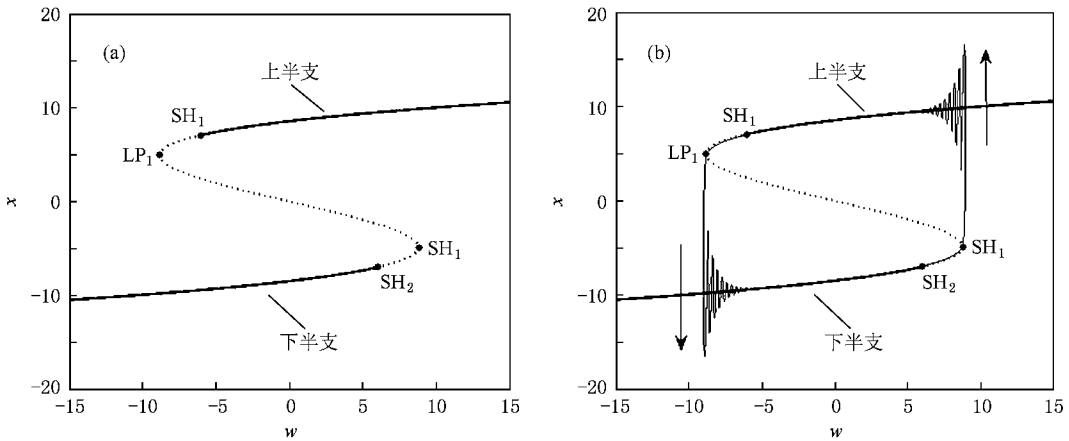


图 5 (a) 快子系统 (x, y, z) 关于慢变参数 w 的平衡点分岔分析; (b) 快子系统 (x, y, z) 关于慢变参数 w 的平衡点分岔分析与 $w-x$ 平面上相图的叠加



4. 耦合强度 k_0 对慢过效应的影响

簇发对应着两种重要的分岔, 其中一种是与沉寂态 (quiescent state^[18]) 相关的分岔, 它导致系统由沉寂态进入激发态 (spiking^[18]); 另一种是与激发态相关的分岔, 它导致系统由激发态返回沉寂态. 若以沉寂态的类型为分类标准, 簇发可以分为 point-cycle 式和 cycle-cycle 式两种^[18]. 第三部分所讨论的对称式 fold/subHopf 簇发就是一种 point-cycle 式簇发, 即此时的沉寂态为平衡点. 系统在从激发态返回平衡点的过程中, 当系统接近平衡点时, 如果慢变量缓慢地接近并穿过分岔值, 那么系统在返回平衡点之前, 会在微小振幅的周期运动上持续较长的一段时间, 这就是所谓的慢过效应, 也称为 memory effect, ramp effect^[19-20]等. 在生物化学反应等系统中已有不少关于慢过效应的报道^[19-22], 系统的非光滑性对该效应具有很大影响, 另外该效应对噪声也非常敏感^[18, 22].

对于快慢系统 (2), 本部分探讨耦合强度 k_0 对

慢过效应的影响. 为了便于讨论, 设定参数 $\alpha = 3, \beta = \frac{8}{3}, \gamma = 28, k_1 = -8, k_2 = 2, \epsilon = 0.01$, 将耦合强度 k_0 视为系统的控制参数.

图 6 给出的是在不同的耦合强度 k_0 下, 快慢系统 (2) 在 $x-w-y$ 空间中的相图 (已标记分岔点), 及其与快子系统关于慢变参数 w 的平衡点分岔分析图的叠加. SH_1, SH_2, LP_1, LP_2 含义同前. 当 $k_0 = 10$ 时 (图 6 (a)) (b)), 即第三部分所讨论的情形, 由前面的讨论分析可知, 系统存在着明显的慢过效应 (图 6 (b)). 若将耦合强度 k_0 增大 1 倍, 即 $k_0 = 20$ 时 (图 6 (c)) (d)), 由图 6 (d) 可知, 此时系统存在慢过效应, 但与 $k_0 = 10$ 时的情形相比, 该效应较弱. 若将耦合强度 k_0 增大 2 倍, 即 $k_0 = 30$ 时 (图 6 (e)) (f)), 由图 6 (f) 可知, 此时的慢过效应与前面的相比更弱. 进一步地, 若将耦合强度 k_0 增大 3 倍, 即 $k_0 = 40$ 时 (图 6 (g)) (h)), 由图 6 (h) 可知, 此时系统不存在慢过效应. 由以上分析可知, 慢过效应与耦合强度密切相关, 随着耦合强度的增加, 该效应逐渐变弱, 最终消失.

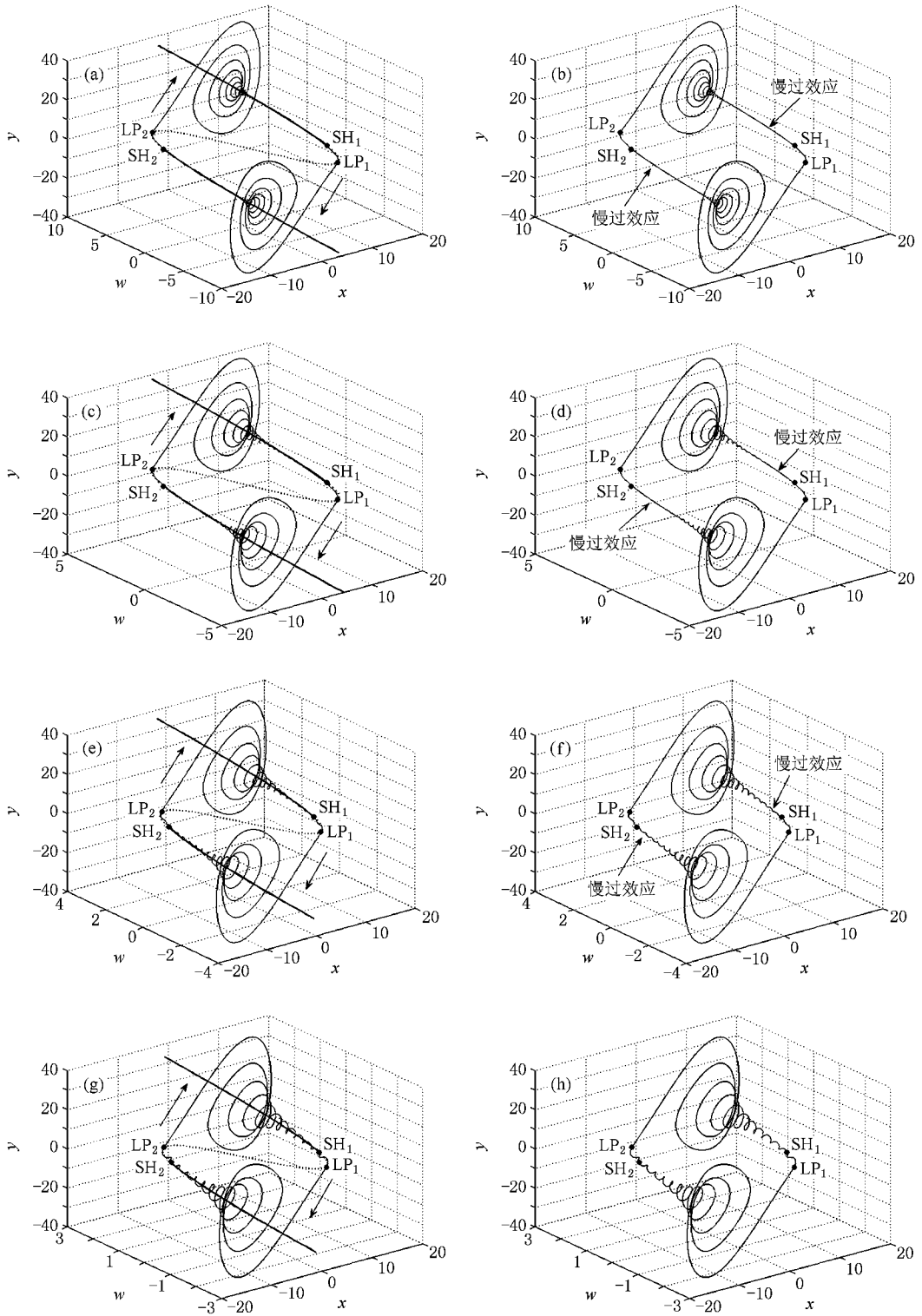


图 6 (a)(c)(e)(g)快子系统关于慢变参数 w 的平衡点分岔分析与 $x-w-y$ 空间中相图的叠加 (b)(d)(f)(h) $x-w-y$ 空间中相图 (已标记分岔点) (a)(b) $k_0 = 10$ (c)(d) $k_0 = 20$ (e)(f) $k_0 = 30$ (g)(h) $k_0 = 40$

5. 结 论

我们从理论上分析了一个快慢型超混沌 Lorenz

系统原点的稳定性及 Hopf 分岔问题,并用数值例子加以验证,数值结果和理论分析相符,说明了理论分析的正确性.在一定的参数条件下,系统能达到超混沌状态.另外,当系统处于快慢两时间尺度下时,由

于慢变参数对系统行为的不断调节,系统会交替进行着不同的运动形式,从而系统表现出了对称式 fold/subHopf 簇发这种除了混沌、超混沌以外的比较

复杂的行为.此外,耦合强度 k_0 对慢过效应具有重要的影响作用,慢过效应可以通过增加耦合强度的方式加以减弱或消除.

- [1] Rössler O E 1979 *Phys. Lett. A* **71** 155
- [2] Chen G , Dong X 1998 *From Chaos to Order : Methodologies , Perspectives and Applications* (Singapore : World Scientific) p12.
- [3] Kuang J Y ,Deng K ,Huang R H 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1856 (in Chinese) [匡锦瑜、邓 昆、黄荣怀 2001 物理学报 **50** 1856]
- [4] Hua C C , Guan X P 2004 *Chin. Phys.* **13** 1441
- [5] Li X J ,Peng J H ,Xu N *et al* 2003 *Journal of Image and Graphics* **8** (A) 1192 in Chinese [李雄军、彭建华、徐宁等 2003 中国图象图形学报 **8** (A) 1192]
- [6] Stenflo L 1996 *Phys. Scr.* **53** 83.
- [7] Cafagna D , Grassi G 2003 *Int. J. Bifurcat. Chaos* **13** 2889
- [8] Barbara C , Silvano C 2002 *Int. J. Circ. Theory Appl.* **30** 625
- [9] Li Y , Tang W K S , Chen G 2005 *Int. J. Circ. Theor. Appl.* **33** 235
- [10] Gao T G , Chen Z Q , Yuan Z Z , Chen G R 2006 *Int. J. Modern Physics C* **17** 471
- [11] Wang G Y ,Zheng Y ,Liu J B 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3113 (in Chinese) [王光义、郑 艳、刘敬彪 2007 物理学报 **56** 3113]
- [12] Cang S J ,Chen Z Q ,Yuan Z Z 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 1493 (in Chinese) [仓诗建、陈增强、袁著祉 2008 物理学报 **57** 1493]
- [13] Wang X Y ,Wang M J 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 5136 (in Chinese) [王兴元、王明军 2007 物理学报 **56** 5136]
- [14] Yang Q G , Zhang K M , Chen G R 2008 *Nonlinear Analysis Real World Applications*
- [15] Gukenheimer J ,Holmes P 1983 *Nonlinear oscillations , dynamical systems and bifurcation of vector field* (New York : Springer)
- [16] Hassard B ,Kazarinoff N ,Wan Y 1981 *Theory and application of Hopf bifurcation* (Cambridge : Cambridge University Press)
- [17] Rinzel J ,Ermentrout 1989 *Method in Neuronal Modeling ed Koch C and Segev I* (Cambridge :THE MIT Press) *Analysis of neural excitability and oscillations*
- [18] Izhikevich E M 2000 *Int. J. Bifurcat. Chaos* **10** 1171
- [19] Baer S M , Erneux T , Rinzel J 1989 *J. Appl. Math.* **49** 55
- [20] Nejshtadt A 1985 *Usp. Mat. Nauk* **40** 190
- [21] Holden L ,Erneux T 1993 *J. Math. Biol.* **31** 353
- [22] Hoppensteadt F C ,Izhikevich E M 1997 *Weakly Connected Neural Networks* (Springer-Verlag , NY)

Analysis of the fast-slow hyperchaotic Lorenz system^{*}

Han Xiu-Jing Jiang Bo Bi Qin-Sheng[†]

(Faculty of Science , Jiangsu University , Zhenjiang 212013 , China)

(Received 17 October 2008 ; revised manuscript received 26 November 2008)

Abstract

The stability of the origin of the hyperchaotic Lorenz system with two time scales is investigated. The characteristics of Hopf bifurcation from the origin, including the existence condition, the direction as well as the stability of bifurcating periodic solutions are discussed in detail, which can be demonstrated by the numerical simulations. With certain parameter, the fast-slow system can exhibit symmetric bursting and further lead to hyperchaotic movement. Based on the method of slow-fast analysis, different bifurcation forms between quiescent state and spiking has been revealed and the influence of coupling strength on slow passage effect is discussed.

Keywords : hyperchaotic Lorenz system, Hopf bifurcation, symmetric fold/subHopf bursting, slow passage effect

PACC : 0545

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10872080 ,10602020).

[†] Corresponding author. E-mail: qb@ujs.edu.cn