

白交叉关联色噪声驱动的线性振子的扩散

陈德彝 王忠龙

(三峡大学理学院物理系, 宜昌 443002)

(2009 年 2 月 12 日收到, 2009 年 5 月 20 日收到修改稿)

研究了由白交叉相关的两色噪声所驱动的线性振子的扩散, 其中一个噪声受偏置的周期信号所调制. 揭示了乘性色噪声的自关联时间 τ_1 和加性色噪声的自关联时间 τ_2 对 $d-Q$, $d-D$ 及 $d-\Omega$ 曲线的影响, 其中 d , Q , D 和 Ω 分别为振子的扩散系数、受信号调制的噪声强度、未受调制的噪声强度和信号的频率. 发现 $d-Q$ 和 $d-D$ 曲线均存在一个极小值, 而 $d-\Omega$ 曲线则在 $\Omega = \tilde{\Omega}$ 处呈现极大值, $\tilde{\Omega}$ 为振子频率. 推导了使扩散系数 $d = 0$ 的条件.

关键词: 振子, 扩散, 信号调制噪声, 白交叉相关

PACC: 0540, 8220M

1. 引 言

动力学系统在考虑了噪声的影响后, 变成随机动力学系统. 由于确认了噪声具有建设性作用的一面^[1,2], 近年来随机动力学的研究迅速发展^[3-21]. 随机动力学研究的内容可从两个方面来概述. 一方面是研究引入噪声的途经和开发新型噪声; 另一方面是对各学科的随机动力学系统的统计性质进行具体研究.

早期, 引入到动力学方程中的噪声是以加性形式出现. 随着研究的深入, 例如由于研究染料激光反常统计性质的需要, 人们通过参数涨落的途经引入了乘性噪声^[6]. 有的系统会同时受加性噪声和乘性噪声的作用. 例如在研究染料激光的瞬态过程时, 激光动力学方程中必须同时考虑乘性噪声和加性噪声. 这是由于在激光场建立的初始阶段, 加性噪声起决定性作用. 而在场充分强时乘性噪声起决定性作用. 在这中间两者同时起作用^[7]. 此外, 由于在许多系统中加性噪声和乘性噪声来自同一噪声源, 因此就要考虑两噪声的相关性. 又例如激光系统中量子噪声的实部和虚部也出自同一噪声源, 有必要考虑它们之间的相关性^[8]. 在光通讯中往往要考虑噪声受信号的调制. 特别近几年来, 除了考虑噪声受周期信号的调制外, 还考虑受偏置信号的调制^[9,14]. 最近 Tessone 等在研究双稳系统的随机共振时, 引入了噪

声互关联程度 λ 受时间周期调制^[17]. 我们将此调制引入到激光系统, 研究了这一调制对激光随机共振的影响^[12].

对随机系统统计性质的研究, 首先就是计算系统的概率分布, 它是研究其他统计性质的基础. 再就是计算和实验联系紧密的统计量, 如方差、相对涨落及关联函数. 另一个重要方面是计算反映瞬态性质的首通时间, 这方面发表了许多论文.

由噪声驱动的线性振子是一个基本的随机动力学系统, 近年来研究者做了许多工作^[22-26]. 研究的内容, 一方面是由双态噪声或 O-U 噪声驱动的线性振子的随机共振^[22,24]; 另一方面是由高斯白噪声驱动的过阻尼振子及具有惯性项的线性振子的随机共振^[23]. 2007 年 Cao 等研究了线性振子扩散的信号调制效应和噪声交叉关联效应^[26]. 发现, 噪声受信号调制对振子扩散产生的效应是当信号频率等于振子的频率时扩散系数呈现极大值, 而信号频率高于振子频率会导致扩散的抑制. 噪声间交叉关联所引起的效应是扩散系数随噪声强度的变化会出现极小值.

本文所讨论的系统是如下两个色噪声驱动的振子: 受信号调制的色噪声 $\xi(t)$ (自关联时间为 τ_1) 和加性噪声 $\eta(t)$ (自关联时间为 τ_2), 而两噪声间的互关联时间为零 (白交叉关联)^[18]. 本文研究的内容是: 在这个新的条件下, 振子的扩散系数是否具有文献^[26]所揭示的特点; 噪声 $\xi(t)$ 的自关联时间

τ_1 及噪声 $\gamma(t)$ 的自关联时间 τ_2 对扩散系数各起到什么作用.

2. 模型及扩散系数

本文研究的线性振子受两个自关联时间不同的色噪声 $\xi(t)$ 和 $\gamma(t)$ 所驱动, 其中噪声 $\xi(t)$ 受偏置的周期信号所调制, 相应的朗之万方程为

$$\ddot{x} = -\tilde{\Omega}^2 x + (i + A \cos(\Omega t))\xi(t) + \gamma(t), \quad (1)$$

式中 $A \cos(\Omega t)$ 为周期信号, i 为偏置量. 相互关联的两 O-U 噪声 $\xi(t)$ 及 $\gamma(t)$ 的统计性质如下:

$$\xi(t) = \gamma(t) = 0, \quad (2)$$

$$\xi(t)\xi(t+t') = \frac{Q}{\tau_1} \exp\left[-\frac{|t'|}{\tau_1}\right], \quad (3)$$

$$\gamma(t)\gamma(t+t') = \frac{D}{\tau_2} \exp\left[-\frac{|t'|}{\tau_2}\right], \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \xi(t)\gamma(t+t') &= \gamma(t)\xi(t+t') \\ &= 2\lambda \sqrt{QD} \delta(t'), \end{aligned} \quad (5)$$

λ 为交叉关联系数, $-1 \leq \lambda \leq 1$.

以上各式的特点是两噪声为自关联时间不同的噪声, 但它们之间的互关联为白相关, 即 δ 函数型的相关^[18].

振子扩散系数的定义为

$$d = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{[x(t)]^2}{t}. \quad (6)$$

可见要计算扩散系数 d , 关键就是要算出 $[x(t)]^2$.

为此要求出方程 (1) 的解

$$\begin{aligned} x(t) &= \left\{ x_0 - \int_0^t \frac{\sin(\tilde{\Omega}t_1)}{\tilde{\Omega}} \left[(i + A \cos(\Omega t_1))\xi(t_1) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \gamma(t_1) \right] dt_1 \right\} \cos(\tilde{\Omega}t) \\ &\quad + \left\{ \frac{v_0}{\tilde{\Omega}} + \int_0^t \frac{\cos(\tilde{\Omega}t_1)}{\tilde{\Omega}} \left[(i + A \cos(\Omega t_1))\xi(t_1) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \gamma(t_1) \right] dt_1 \right\} \sin(\tilde{\Omega}t). \end{aligned} \quad (7)$$

从而可计算出 $x(t)$ 的平方平均值

$$\begin{aligned} [x(t)]^2 &= \left\{ \left[x_0 - \int_0^t \frac{\sin(\tilde{\Omega}t_1)}{\tilde{\Omega}} \left[(i + A \cos(\Omega t_1)) \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \xi(t_1) + \gamma(t_1) \right] dt_1 \right] \cos(\tilde{\Omega}t) \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{v_0}{\tilde{\Omega}} + \int_0^t \frac{\cos(\tilde{\Omega}t_1)}{\tilde{\Omega}} \left[(i + A \cos(\Omega t_1)) \right. \right. \right. \end{aligned}$$

$$\left. \left. \times \xi(t_1) + \gamma(t_1) \right] dt_1 \right] \sin(\tilde{\Omega}t) \right\}^2. \quad (8)$$

由 (6) 式和 (8) 式可求出扩散系数 d , 计算十分冗长, 我们只写出最后结果

$$\begin{aligned} d &= \frac{1}{2\tilde{\Omega}^2} \left\{ \frac{Q}{2\tau_1^2} A^2 \left[\frac{1}{\tau_1^{-2} + (\tilde{\Omega} - \Omega)^2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{\tau_1^{-2} + (\tilde{\Omega} + \Omega)^2} \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{2D/\tau_2^2}{\tau_2^{-2} + \tilde{\Omega}^2} + \frac{2i^2 Q/\tau_1^2}{\tau_1^{-2} + \tilde{\Omega}^2} + 4\lambda i \sqrt{QD} \right\}. \end{aligned} \quad (9)$$

3. 关于 (9) 式几个特例的讨论

1) 当 $i = 0$ 及 $D = 0$, 即调制噪声 $\xi(t)$ 的信号没有偏置, 而加性噪声为零时 (9) 式简化为

$$d = \frac{A^2 Q^2}{4\tilde{\Omega}^2 \tau_1^2} \left[\frac{1}{\tau_1^{-2} + (\tilde{\Omega} - \Omega)^2} + \frac{1}{\tau_1^{-2} + (\tilde{\Omega} + \Omega)^2} \right]. \quad (10)$$

从 (10) 式可看出, 在 $\Omega > \tilde{\Omega}$ 区域, 信号频率高, 振子扩散系数变小, 当 $\Omega \rightarrow \infty$, $d = 0$.

2) 当 $i \neq 0$, $\lambda \neq 0$ 时, 即使增大信号频率 Ω , $\Omega \rightarrow \infty$, d 也不会为零.

3) 从 (9) 式可以看出, 即使偏置信号及噪声间交叉关联均为零, d 也不会为零.

4) $A = 0$ (9) 式变为

$$d = \frac{1}{2\tilde{\Omega}^2} \left\{ \frac{2D/\tau_2^2}{\tau_2^{-2} + \tilde{\Omega}^2} + \frac{2i^2 Q/\tau_1^2}{\tau_1^{-2} + \tilde{\Omega}^2} + 4\lambda i \sqrt{QD} \right\}. \quad (11)$$

从 (11) 式可以看出, 只有当噪声交叉关联系数 λ 和偏置量 i 的符号相反, 才有可能出现 $d = 0$ 的情况. 下面设 $\lambda = -1$, $i > 0$, 则从 (11) 式可知当两噪声比值满足等式

$$\sqrt{\frac{Q}{D}} = \frac{1}{i} \left[(1 + \tau_1^2 \tilde{\Omega}^2) \pm \sqrt{(1 + \tau_1^2 \tilde{\Omega}^2) - \frac{1 + \tau_1^2 \tilde{\Omega}^2}{1 + \tau_2^2 \tilde{\Omega}^2}} \right]$$

时, 扩散系数 $d = 0$. 当 $\xi(t)$ 和 $\gamma(t)$ 为白交叉相关的白噪声 $\tau_1 = \tau_2 = 0$ 时, 上面的条件简化为 $\sqrt{\frac{Q}{D}} =$

$\frac{1}{i}$, 即当噪声比值 $\frac{Q}{D}$ 的开方为 $\frac{1}{i}$ 时, $d = 0$.

综上所述, 与文献 [26] 比较, 噪声调制效应和噪声间关联效应在各噪声自关联时间和互关联时间互不相等的情况下仍会出现.

4. 噪声 $\xi(t)$ 及 $\eta(t)$ 的自关联时间 τ_1, τ_2 对振子扩散系数的影响

下面分别讨论 τ_1, τ_2 对 $d-Q$ 曲线, $d-D$ 曲线, $d-\Omega$ 曲线的影响.

4.1. 以 τ_1, τ_2 为参数的 $d-Q$ 曲线

图 1 绘出以 τ_1 为参数的 $d-Q$ 曲线. 可以看出曲线有一极小值, 随着 τ_1 的增大极小值变深, 且极小值位置向右移动.

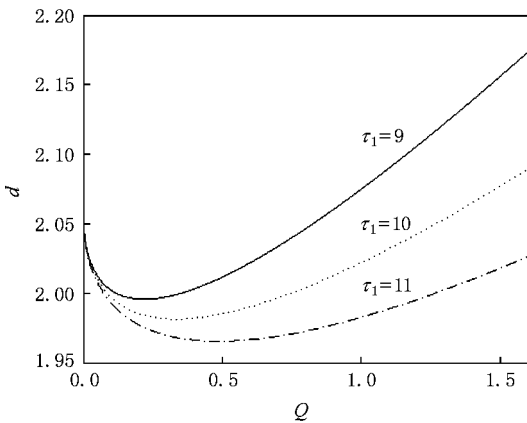


图 1 扩散系数 d 作为噪声强度 Q 的函数曲线(各参数的取值为 $\tau_2=0.9, D=2, i=3, \lambda=-0.02, \tilde{\Omega}=0.8, \Omega=8, A=10$)

图 2 是以 τ_2 为参数的 $d-Q$ 曲线. 该曲线也具有一个极小值. 随着 τ_2 的增大整条曲线下移, 且极值位置不变. 但 $Q=0$ 时, 不同 τ_2 的值对应不同的 d 值. τ_2 小对应 d 值大.

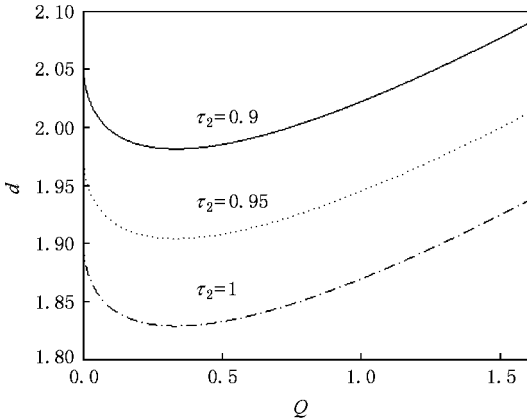


图 2 扩散系数 d 作为噪声强度 Q 的函数曲线(各参数的取值为 $\tau_1=10, D=2, i=3, \lambda=-0.02, \tilde{\Omega}=0.8, \Omega=8, A=10$)

4.2. 以 τ_1, τ_2 为参数的 $d-D$ 曲线

以 τ_1 为参数的 $d-D$ 曲线绘于图 3. 可以看出, 曲线存在一极小值. 随着 τ_1 的增大曲线极值变低, 但极值位置不变. 当 $D=0$ 时, 随着 τ_1 增加扩散系数变小.

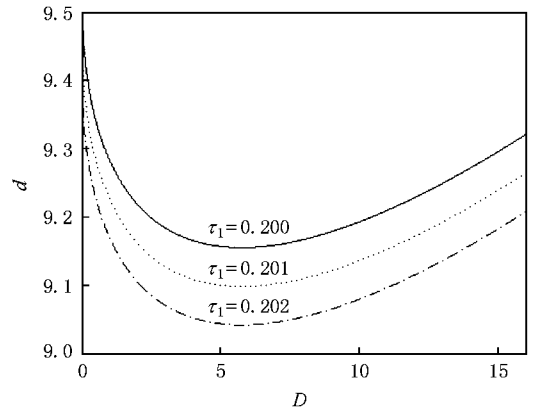


图 3 扩散系数 d 作为噪声强度 D 的函数曲线(各参数的取值为 $\tau_2=6, Q=1, i=1, \lambda=-0.1, \tilde{\Omega}=0.8, \Omega=8, A=6$)

以 τ_2 为参数的 $d-D$ 曲线如图 4 所示. 图 4 显示随着 τ_2 的增大, 极小值变深, 极值位置向右移动.

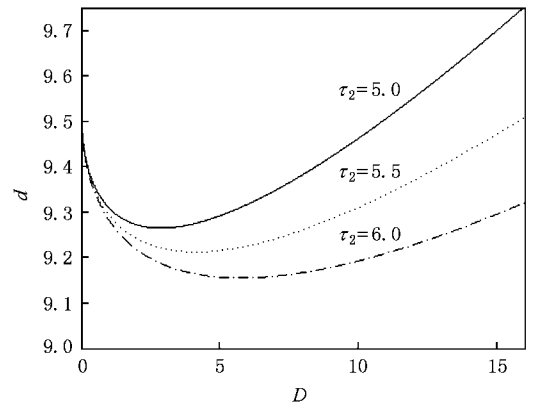


图 4 扩散系数 d 作为噪声强度 D 的函数曲线(各参数的取值为 $\tau_1=0.2, Q=1, i=1, \lambda=-0.1, \tilde{\Omega}=0.8, \Omega=8, A=6$)

4.3. 以 τ_1, τ_2 为参数的 $d-\Omega$ 曲线

以 τ_1 为参数的 $d-\Omega$ 曲线如图 5 所示. 从图中可以看出, 曲线出现一个极大值. 极大值出现在 $\Omega = \tilde{\Omega}$ 处. 随着 τ_1 的减小, 极大值变平, 峰的位置向左移动. 若继续增大 τ_1 值, 极大值消失, 变为单调减少曲线.

以 τ_2 为参数的 $d-\Omega$ 曲线如图 6 所示. 曲线也出现一个极大值, 但极值位置不随 τ_2 变化. 值得指出:

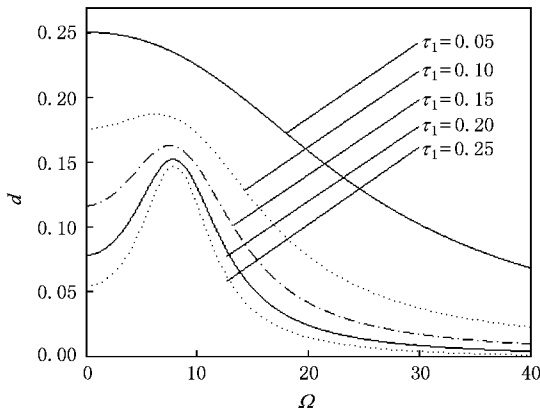


图5 扩散系数 d 作为信号频率 Ω 的函数曲线(各参数的取值为 $\tau_2 = 6, Q = 1, i = 1, \lambda = -0.1, \bar{\Omega} = 8, D = 2.5, A = 6$)

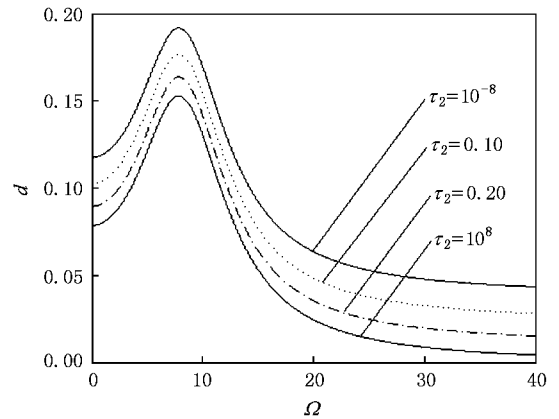


图6 扩散系数 d 作为信号频率 Ω 的函数曲线(各参数的取值为 $\tau_1 = 0.2, Q = 1, i = 1, \lambda = -0.1, \bar{\Omega} = 8, D = 2.5, A = 6$)

随着 τ_2 值的减小,峰变高.但当 τ_2 值减小到一定程度,曲线不再变化.随着 τ_2 值的增大,峰变低,但当 τ_2 值增大到一定程度,曲线也不再变化.

5. 结 论

1. 就其对线性振子扩散系数的影响来说, τ_1 和 τ_2 有很大的差别,这可以从 $d-Q$ 曲线、 $d-D$ 曲线和 $d-\Omega$ 曲线看出.这种差别反映了噪声偏置信号调制效应.其中值得指出的是 τ_1, τ_2 对 $d-\Omega$ 曲线的影响

有定性的差异.随着 τ_1 的变化, $d-\Omega$ 曲线会出现两种不同的“相”,即具有一个极大值的曲线和单调减小的曲线.而 τ_2 对 $d-\Omega$ 曲线的影响则很不一样,当 τ_2 值变到很大或很小时(从 $\tau_2 = 0$ 到 $\tau_2 \rightarrow \infty$),曲线始终具有一个极大值.

2. 零扩散($d = 0$)的存在,体现了噪声间的交叉关联效应.当 $\lambda = 0$ 时,不论从(9)式或更特殊的(11)式,都可以看到所有的项的符号均为正, d 不可能为零.只有 $\lambda \neq 0$ 且其符号与偏置量 i 符号相反时,才有可能使 $d = 0$.

[1] Robb G R M, Firth W J 2007 *Phys. Rev. Lett.* **99** 253601
 [2] Iwaniszewski J 2008 *Phys. Rev. E* **78** 021140
 [3] Reimann P 2002 *Phys. Rep.* **361** 57
 [4] Risken H 1984 *Fokker-Planck Equation* (Berlin: Springer)
 [5] Horsthemke W, Lefever R 1984 *Noise-Induced Transitions* (Berlin: Springer)
 [6] Lett P, Short R, Mandel L 1984 *Phys. Rev. Lett.* **52** 341
 [7] Roy R, Yu A W, Zhu S 1985 *Phys. Rev. Lett.* **55** 2794
 [8] Zhou X, Gao W, Zhu S 1996 *Phys. Lett. A* **214** 131
 [9] Jin G X, Zhang L Y, Cao L 2009 *Chin. Phys. B* **18** 952
 [10] Zhou B C, Xu W 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 2035 (in Chinese) [周丙常、徐伟 2008 物理学报 **57** 2035]
 [11] Wang B, Shao J H, Wu X Q 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 1377 (in Chinese) [王兵、邵继红、吴秀清 2009 物理学报 **58** 1377]
 [12] Chen D Y, Wang Z L 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 1403 (in Chinese) [陈德彝、王忠龙 2009 物理学报 **58** 1403]
 [13] Dong X J 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 5618 (in Chinese) [董小娟 2007 物理学报 **56** 5618]

[14] Zhang L Y, Jin G X, Cao L 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 4706 (in Chinese) [张良英、金国祥、曹力 2008 物理学报 **57** 4706]
 [15] Wang B, Shao J H, Wu X Q 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 1391 (in Chinese) [王兵、邵继红、吴秀清 2009 物理学报 **58** 1391]
 [16] Ning L J, Xu W, Yang X L 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 25 (in Chinese) [宁丽娟、徐伟、杨晓丽 2007 物理学报 **56** 25]
 [17] Tessone C J, Wio H S, Hanggi P 2000 *Phys. Rev. E* **62** 4623
 [18] Jia Y, Li J R 1997 *Phys. Rev. Lett.* **78** 994
 [19] [14] Li J Y, Li R W, Sun J D, Liu S J 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 446 (in Chinese) [李佳阳、李融武、孙俊东、刘绍军 2007 物理学报 **56** 446]
 [20] Zheng X P, Zhang P F, Fan D W 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 425 (in Chinese) [郑小平、张佩峰、范多旺 2008 物理学报 **57** 425]
 [21] Lin F, Bao J D 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 696 (in Chinese) [林方、包景东 2008 物理学报 **57** 696]
 [22] Gitterman M 2003 *Phys. Rev. E* **67** 057103
 [23] Gitterman M 2004 *Phys. Rev. E* **69** 041101
 [24] Fulinski A, Gora P F 2000 *J. Stat. Phys.* **101** 483
 [25] Mankin R, Laas K, Laas T 2008 *Phys. Rev. E* **78** 031120

[26] Cao L , Wu D J 2006 *Int. J. Mod. Phys. B* **21** 1721

Diffusion in a linear oscillator driven by colored noises with white cross-correlation

Chen De-Yi Wang Zhong-Long

(*Department of Physics , Science College , China Three Gorges University , Yichang 443002 , China*)

(Received 12 February 2009 ; revised manuscript received 20 May 2009)

Abstract

The diffusion in a linear oscillator driven by white cross-correlation colored noises in which one of the noises is modulated by a biased period signal is studied. Effects on d versus Q curve , d versus D curve , and d versus Ω curve by multiplicative colored noise self-correlation time τ_1 as well as additive colored noise self-correlation time τ_2 are revealed. Here d , Q , D , and Ω denote the diffusion coefficient of the oscillator , the intensity of the signal modulated noise , the intensity of the pure additive noise , and the signal frequency , respectively. It is found that a minimum exists in the d versus Q curve and the d versus D curve respectively. The diffusion coefficient as a function of signal frequency Ω exhibits a pronounced maximum at $\Omega = \tilde{\Omega}$, here $\tilde{\Omega}$ is the oscillator frequency. The condition of diffusion coefficient $d = 0$ is derived.

Keywords : oscillator , diffusion , noise modulated signal , white cross-correlation

PACC : 0540 , 8220M