

# 分数阶混沌系统与整数阶混沌系统之间的同步

周 平<sup>†</sup> 邝 菲

(重庆邮电大学应用物理研究所, 重庆 400065)

(2009 年 12 月 12 日收到; 2010 年 1 月 27 日收到修改稿)

基于追踪控制的思想, 利用分数阶系统稳定性理论, 实现了分数阶混沌系统与整数阶混沌系统之间的混沌同步, 给出了补偿器和反馈控制器的选择方法. 以三维分数阶 Chen 系统和三维整数阶 Lorenz 混沌系统之间的混沌同步为例进行了数值仿真和电路仿真. 研究表明了该同步方法的有效性.

**关键词:** 分数阶混沌系统, 整数阶混沌系统, 混沌同步, 追踪控制

**PACC:** 0545

## 1. 引 言

混沌现象是非线性动力学系统所特有的一种复杂运动形式, 是自然界普遍存在的复杂现象. 自 20 世纪 90 年代以来, 非线性混沌研究是非线性科学领域的热点问题之一, 而混沌同步由于其在物理、通信、信息科学、医学、生物工程等领域的巨大应用潜力和发展前途, 已经引起广泛关注. 人们从不同的角度, 提出了许多控制方法来实现混沌系统的同步, 相继提出了混沌系统完全同步、混沌系统反相位同步、混沌系统广义同步和投影同步等<sup>[1-7]</sup>.

近年来分数阶非线性动力学系统中存在的混沌现象也引起了人们的广泛兴趣. 在研究 Chua 混沌电路、Lorenz 混沌系统以及 Chen 混沌和超混沌系统等混沌系统的过程中发现, 当 Chua 混沌电路系统<sup>[8]</sup>的阶数低至 2.7, Lorenz 混沌系统<sup>[9]</sup>的分数阶低至 2.97, Chen 混沌系统<sup>[10]</sup>的分数阶低至 2.4, 超混沌 Chen 系统<sup>[11]</sup>的分数阶低至 3.8 时, 上述系统仍然有混沌现象. 大量研究表明<sup>[8-13]</sup>, 当混沌系统的阶数为分数时仍然出现混沌现象, 并且更能反映系统的工程物理现象. 同时, 人们对分数阶混沌系统的同步现象也进行了广泛研究, 并取得了丰富的研究成果<sup>[8, 12-18]</sup>.

然而, 众多已经存在的混沌同步结果<sup>[1-8, 12-18]</sup>只针对整数阶混沌系统之间的同步或者只针对分数阶混沌系统之间的同步. 关于分数阶混沌系统与

整数阶混沌系统之间的同步研究却很少涉及. 本文基于追踪控制思想, 利用分数阶线性系统稳定性理论和反馈控制方法, 实现了三维分数阶 Chen 系统和三维整数阶 Lorenz 混沌系统之间的混沌同步. 理论分析和数值仿真结果的一致性表明了本文同步方法的有效性.

## 2. 三维分数阶 Chen 混沌系统和三维整数阶 Lorenz 混沌系统同步

Lorenz 在 1963 年提出了著名的三维混沌系统<sup>[19]</sup>

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= \sigma(x_2 - x_1), \\ \frac{dx_2}{dt} &= \gamma x_1 - x_1 x_3 - x_2, \\ \frac{dx_3}{dt} &= x_1 x_2 - \beta x_3.\end{aligned}\quad (1)$$

当系统参数为  $\sigma = 10$ ,  $\gamma = 28$ ,  $\beta = 8/3$  时, 其混沌吸引子如图 1 所示.

Chen 等<sup>[20]</sup>在 1999 年提出了另一个与 Lorenz 混沌系统相似, 但拓扑结构不同的三维混沌系统

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{dt} &= a(y_2 - y_1), \\ \frac{dy_2}{dt} &= (c - a)y_1 - y_1 y_3 + cy_2, \\ \frac{dy_3}{dt} &= y_1 y_2 - by_3.\end{aligned}\quad (2)$$

<sup>†</sup> E-mail: zhouping@cqupt.edu.cn

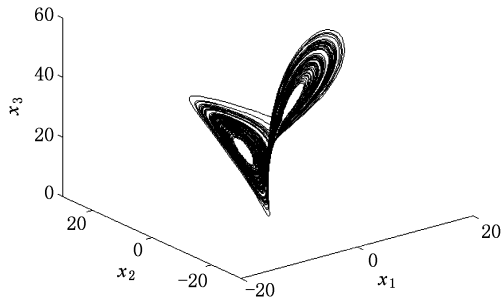
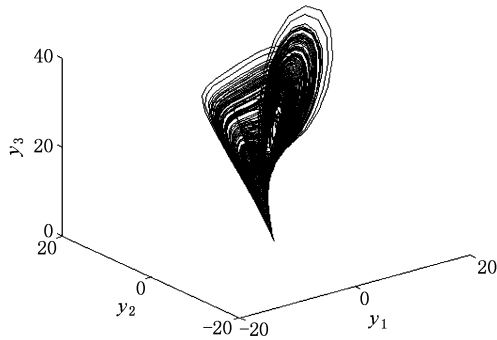


图1 Lorenz 混沌系统混沌吸引子

当系统参数为  $(a, b, c) = (35, 3, 28)$  时, 系统(2)存在混沌, 其对应的三维分数阶 Chen 混沌系统为

$$\begin{aligned} d^q y_1 / dt^q &= a(y_2 - y_1), \\ d^q y_2 / dt^q &= (c - a)y_1 - y_1 y_3 + cy_2, \\ d^q y_3 / dt^q &= y_1 y_2 - by_3. \end{aligned} \quad (3)$$

文献[21]指出, 当  $q \geq 0.83$  时, 分数阶 Chen 系统(3)存在混沌行为. 当分数阶大小  $q = 0.95$  时, 其混沌吸引子如图2所示.

图2 分数阶 Chen 混沌系统(3)混沌吸引子  $q = 0.95$ 

为实现分数阶 Chen 混沌系统与整数阶 Lorenz 混沌系统之间的混沌同步, 即实现  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|e(t)\| = \lim_{t \rightarrow +\infty} \|y(t) - x(t)\| = 0$ , 其中  $y(t) = (y_1, y_2, y_3)^T$ ,  $x(t) = (x_1, x_2, x_3)^T$ . 现将整数阶 Lorenz 混沌系统(1)作为驱动系统, 受控分数阶 Chen 混沌系统作为响应系统. 构造受控的分数阶 Chen 混沌系统为

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} d^q y_1 / dt^q \\ d^q y_2 / dt^q \\ d^q y_3 / dt^q \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a(y_2 - y_1) \\ (c - a)y_1 - y_1 y_3 + cy_2 \\ y_1 y_2 - by_3 \end{pmatrix} \\ &+ u(x(t)) + U(y(t), x(t)), \end{aligned} \quad (4)$$

(4)式中  $u(x(t)) + U(y(t), x(t))$  为追踪控制器, 其中  $u(x(t))$  为补偿器,  $U(y(t), x(t))$  为反馈控

制器.

由追踪控制思想, 可将驱动系统(1)的输出作为参考信号, 要实现受控分数阶 Chen 混沌系统(4)与整数阶 Lorenz 混沌系统(1)的混沌同步, 实质上就是要求受控分数阶 Chen 混沌系统(4)的输出  $y(t) = (y_1, y_2, y_3)^T$  追踪 Lorenz 混沌系统(1)的输出  $x(t) = (x_1, x_2, x_3)^T$ .

现有整数阶混沌系统追踪控制方法<sup>[22-24]</sup>的控制中多数都包含有对参考信号  $x(t)$  求微分的操作, 所以本文追踪控制器  $u(x(t)) + U(y(t), x(t))$  的设计也将使用参考信号  $x(t)$  的微分. 但是, 由于我们要实现的是分数阶混沌系统对参考信号  $x(t)$  的追踪, 所以不使用参考信号  $x(t)$  的整数阶微分, 而采用其相应的分数阶微分, 并将参考信号  $x(t)$  的分数阶微分设计在补偿器  $u(x(t))$  中.

依据 Lorenz 混沌系统(1)的输出  $x(t) = (x_1, x_2, x_3)^T$ , 可定义受控系统(4)中的补偿器  $u(x(t))$  为

$$u(x(t)) = d^q x(t) / dt^q - f(x(t)), \quad (5)$$

其中  $f(x(t)) = \begin{pmatrix} a(x_2 - x_1) \\ (c - a)x_1 - x_1 x_3 + cx_2 \\ x_1 x_2 - bx_3 \end{pmatrix}$ . 故受控分

数阶 Chen 混沌系统(4)变为

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} d^q y_1 / dt^q \\ d^q y_2 / dt^q \\ d^q y_3 / dt^q \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a(y_2 - y_1) \\ (c - a)y_1 - y_1 y_3 + cy_2 \\ y_1 y_2 - by_3 \end{pmatrix} \\ &+ d^q x(t) / dt^q \\ &- \begin{pmatrix} a(x_2 - x_1) \\ (c - a)x_1 - x_1 x_3 + cx_2 \\ x_1 x_2 - bx_3 \end{pmatrix} \\ &+ U(y(t), x(t)), \end{aligned} \quad (6)$$

令受控分数阶 Chen 混沌系统(4)与驱动整数阶 Lorenz 混沌系统(1)的同步误差为  $e_i = y_i - x_i (i = 1, 2, 3)$ , 则系统(6)变化为

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} d^q e_1 / dt^q \\ d^q e_2 / dt^q \\ d^q e_3 / dt^q \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a(e_2 - e_1) \\ (c - a)e_1 - x_3 e_1 - x_1 e_3 - e_1 e_3 + ce_2 \\ x_2 e_1 + x_1 e_2 + e_1 e_2 - be_3 \end{pmatrix} \\ &+ U(y(t), x(t)), \end{aligned} \quad (7)$$

为得到反馈控制器  $U(y(t), x(t))$ , 令  $e(t) = \begin{pmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \end{pmatrix}$ , 其中  $e_1(t) = e_1$ ,  $e_2(t) = (e_2, e_3)^T$ . 故(7)

式中的  $\begin{pmatrix} a(e_2 - e_1) \\ (c - a)e_1 - x_3e_1 - x_1e_3 - e_1e_3 + ce_2 \\ x_2e_1 + x_1e_2 + e_1e_2 - be_3 \end{pmatrix}$  改写为  $\begin{pmatrix} \mathbf{B}_1\mathbf{e}_1(t) + \mathbf{F}_1(\mathbf{x}(t), \mathbf{e}_1(t), \mathbf{e}_2(t)) \\ \mathbf{B}_2\mathbf{e}_2(t) + \mathbf{F}_{21}(\mathbf{x}(t), \mathbf{e}_1(t), \mathbf{e}_2(t)) + \mathbf{F}_{22}(\mathbf{x}(t), \mathbf{e}_2(t)) \end{pmatrix}$ , 其中  $\mathbf{B}_1 \in R^{1 \times 1}$ ,  $\mathbf{B}_2 \in R^{2 \times 2}$ ,  $\mathbf{F}_1(\mathbf{x}(t), \mathbf{e}_1(t), \mathbf{e}_2(t)) = ae_2$ ,  $\mathbf{F}_{21}(\mathbf{x}(t), \mathbf{e}_1(t), \mathbf{e}_2(t)) = \begin{pmatrix} (c - a)e_1 - x_3e_1 - e_1e_3 \\ x_2e_1 + e_1e_2 \end{pmatrix}$ , 且  $\mathbf{F}_{22}(\mathbf{x}(t), \mathbf{e}_1(t), \mathbf{e}_2(t)) = \begin{pmatrix} -x_1e_3 \\ x_1e_2 \end{pmatrix}$ , 且  $\mathbf{F}_{22}(\mathbf{x}(t), \mathbf{e}_2(t)) = \begin{pmatrix} -x_1e_3 \\ x_1e_2 \end{pmatrix}$ , 且  $\mathbf{F}_{22}(\mathbf{x}(t), \mathbf{e}_2(t))$  为不包含误差  $\mathbf{e}_1(t)$  的非线性函数, 故  $\lim_{e_1(t) \rightarrow 0} \mathbf{F}_{21}(\mathbf{x}(t), \mathbf{e}_1(t), \mathbf{e}_2(t)) = \lim_{e_1(t) \rightarrow 0} \begin{pmatrix} (c - a)e_1 - x_3e_1 - e_1e_3 \\ x_2e_1 + e_1e_2 \end{pmatrix} = 0$  成立. 因而(7)式可以写为

$$\begin{pmatrix} d^q \mathbf{e}_1(t) / dt^q \\ d^q \mathbf{e}_2(t) / dt^q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1\mathbf{e}_1(t) + \mathbf{F}_1(\mathbf{x}(t), \mathbf{e}_1(t), \mathbf{e}_2(t)) \\ \mathbf{B}_2\mathbf{e}_2(t) + \mathbf{F}_{21}(\mathbf{x}(t), \mathbf{e}_1(t), \mathbf{e}_2(t)) + \mathbf{F}_{22}(\mathbf{x}(t), \mathbf{e}_2(t)) \end{pmatrix} + \mathbf{U}(\mathbf{y}(t), \mathbf{x}(t)), \tag{8}$$

其中  $\mathbf{B}_1 = -a$ ,  $\mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix}$ .

故可以选择反馈控制器  $\mathbf{U}(\mathbf{y}(t), \mathbf{x}(t))$  为

$$\mathbf{U}(\mathbf{y}(t), \mathbf{x}(t)) = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1\mathbf{e}_1(t) - \mathbf{F}_1(\mathbf{x}(t), \mathbf{e}_1(t), \mathbf{e}_2(t)) \\ \mathbf{A}_2\mathbf{e}_2(t) - \mathbf{F}_{22}(\mathbf{x}(t), \mathbf{e}_2(t)) \end{pmatrix}, \tag{9}$$

其中  $\mathbf{A}_1 \in R^{1 \times 1}$ ,  $\mathbf{A}_2 \in R^{2 \times 2}$  为待定实数矩阵. 将(9)式带入(8)式, 可得

$$\begin{cases} d^q \mathbf{e}_1(t) / dt^q = (-a + \mathbf{A}_1)\mathbf{e}_1(t), \\ d^q \mathbf{e}_2(t) / dt^q = \left( \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix} + \mathbf{A}_2 \right) \mathbf{e}_2(t) \\ \quad + \mathbf{F}_{21}(\mathbf{x}(t), \mathbf{e}_1(t), \mathbf{e}_2(t)). \end{cases} \tag{10}$$

从(10)式中的第一个方程有: 由分数阶线性系统稳定性理论可知, 当选择  $-a + \mathbf{A}_1 < 0$  时, 则有  $\lim_{t \rightarrow +\infty} e_1 = \lim_{t \rightarrow +\infty} y_1 - x_1 = 0$ . 当  $t \rightarrow \infty$  时,  $\lim_{e_1(t) \rightarrow 0} \mathbf{F}_{21}(\mathbf{x}(t), \mathbf{e}_1(t), \mathbf{e}_2(t)) = 0$  成立, 此时(10)中第二个方程变为

$$d^q \mathbf{e}_2(t) / dt^q = \left( \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix} + \mathbf{A}_2 \right) \mathbf{e}_2(t).$$

由分数阶线性系统稳定性理论可知, 当选择合适矩阵  $\mathbf{A}_2 \in R^{2 \times 2}$ , 使得矩阵  $\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix} + \mathbf{A}_2$  所有特征值的幅角满足  $|\arg \lambda_{1,2}| > 0.5\pi q$ , 则有  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbf{e}_2(t) = 0$ , 即有  $\lim_{t \rightarrow +\infty} e_i = \lim_{t \rightarrow +\infty} y_i - x_i = 0$  ( $i = 2, 3$ ).

由上面分析可得, 选择合适  $\mathbf{A}_1 \in R^{1 \times 1}, \mathbf{A}_2 \in$

$R^{2 \times 2}$ , 可以使  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\mathbf{e}(t)\| = \lim_{t \rightarrow +\infty} \|\mathbf{y}(t) - \mathbf{x}(t)\| = 0$  成立, 即实现了受控分数阶 Chen 混沌系统(4)与整数阶 Lorenz 混沌系统(1)之间的混沌同步.

上述方法也可以实现分数阶 Chen 混沌系统(4)的输出  $\mathbf{y}(t) = (y_1, y_2, y_3)^T$  追踪任意给定的参考信号  $\mathbf{x}(t) = (x_1, x_2, x_3)^T$ , 该参考信号可以来于整数阶混沌系统, 也可以来于其他分数阶混沌系统. 进一步, 参考信号  $\mathbf{x}(t)$  可来于混沌系统状态变量组合生成的函数, 即  $\mathbf{x}(t) = (f_1(\mathbf{x}(t)), f_2(\mathbf{x}(t)), f_3(\mathbf{x}(t)))^T$ .

本文方法可以推广到分数阶混沌系统和整数阶混沌系统为高维情况下的混沌同步, 进一步可以推广到  $m$  维分数阶混沌系统与  $n$  ( $n \leq m$ ) 维整数阶混沌系统之间的同步.

3. 数值仿真

为验证上述三维分数阶 Chen 混沌系统和三维整数阶 Lorenz 混沌系统同步方法的有效性, 现进行数值仿真研究.

如为实现受控分数阶 Chen 混沌系统(4)与 Lorenz 混沌系统(1)的混沌同步, 现取  $\mathbf{A}_1 = 33$ ,  $\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} -19 & 11 \\ -10 & -7 \end{pmatrix}$ , 故有  $-a + \mathbf{A}_1 < 0$ , 矩阵  $\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix} + \mathbf{A}_2$  的特征值分别为  $\lambda_{\pm} = -0.5 \pm 4.444j$ , 特征值  $\lambda_{\pm}$  的幅角满足  $|\arg \lambda_{\pm}| = \pi > 0.5\pi q$ . 其同步仿真结果如图 3 所示, 此时 Lorenz 混沌系统(1)的初始条件为  $\mathbf{x}(0) = (0, 1, 2)^T$ , 受控分数阶 Chen 混沌系统

(4) 的初始条件为  $\mathbf{y}(0) = (1, 3, 5)^T$ , 本文图 3 中  $\varepsilon = (\sum_{i=1}^3 e_i^2)^{1/2}$ .

如为实现受控分数阶 Chen 混沌系统(4) 的输出  $\mathbf{y}(t) = (y_1, y_2, y_3)^T$  追踪 Lorenz 混沌系统(1) 状态变量组合生成的函数  $\mathbf{x}(t) = (f_1(\mathbf{x}(t)), f_2(\mathbf{x}(t)), f_3(\mathbf{x}(t)))^T = (x_1 + 2x_2, x_2 - 0.5x_3, x_3 - x_1)^T$ . 此时  $\mathbf{F}_1(\mathbf{x}(t), \mathbf{e}_1(t), \mathbf{e}_2(t)) = a\mathbf{e}_2$ ,  $\mathbf{F}_{21}(\mathbf{x}(t), \mathbf{e}_1(t), \mathbf{e}_2(t)) = \begin{pmatrix} (c-a)e_1 - (x_3 - x_1)e_1 - e_1e_3 \\ (x_2 - 0.5x_3)e_1 + e_1e_2 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{F}_{22}(\mathbf{x}(t), \mathbf{e}_2(t)) = \begin{pmatrix} -(x_1 + 2x_2)e_3 \\ (x_1 + 2x_2)e_2 \end{pmatrix}$ . 现取  $\mathbf{A}_1 = 33, \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} -29 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ , 故有  $-a + \mathbf{A}_1 < 0$ 、矩阵  $\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix} + \mathbf{A}_2$  的特征值分别为  $\lambda_{\pm} = -1 \pm 3j$ , 特征值  $\lambda_{\pm}$  的幅角满足  $|\arg \lambda_{\pm}| = \pi > 0.5\pi q$ . 选取 Lorenz 混沌系统(1) 的初始条件为  $\mathbf{x}(0) = (0, 1, 2)^T$ , 受控分数阶 Chen 混沌系统(4) 的初始条件为  $\mathbf{y}(0) = (1, 3, 5)^T$ , 此时受控分数阶 Chen 混沌系统(4) 的输出  $\mathbf{y}(t) = (y_1, y_2, y_3)^T$  追踪 Lorenz 混沌系统(1) 状态变量组合生成的函数  $\mathbf{x}(t) = (f_1(\mathbf{x}(t)), f_2(\mathbf{x}(t)), f_3(\mathbf{x}(t)))^T = (x_1 + 2x_2, x_2 - 0.5x_3, x_3 - x_1)^T$  的追踪误差仿真结果, 如图 4 所示.

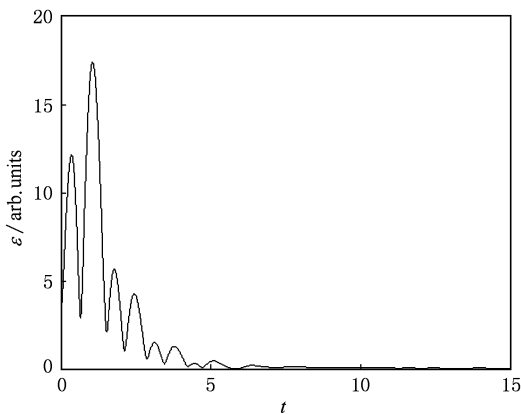


图 3 受控分数阶 Chen 混沌系统(4) 与 Lorenz 混沌系统(1) 的同步结果  $q = 0.95$

#### 4. 追踪控制方案的电路仿真

现用电路仿真验证本文同步方法, 由于受运算放大器输出幅度限制, 我们将驱动整数阶 Lorenz 混

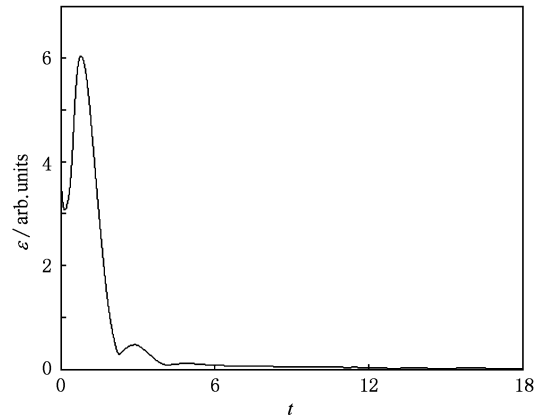


图 4 受控分数阶 Chen 混沌系统(4) 追踪 Lorenz 混沌系统(1) 状态变量组合生成函数的追踪误差仿真结果  $q = 0.95$

沌系统(1) 的状态变量压缩 10 倍, 即  $x_1 = 10z_1, x_2 = 10z_2, x_3 = 10z_3$ , 得到如下 Lorenz 混沌系统(11):

$$\begin{aligned} \frac{dz_1}{dt} &= \sigma(z_2 - z_1), \\ \frac{dz_2}{dt} &= \gamma z_1 - 10z_1 z_3 - z_2, \\ \frac{dz_3}{dt} &= 10z_1 z_2 - \beta z_3. \end{aligned} \quad (11)$$

在分数阶电路设计时, 通常只能实现  $q = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8$  和  $0.9$  时的情况<sup>[25,26]</sup>, 由于三维分数阶 Chen 混沌系统(3) 在  $q \geq 0.83$  才出现混沌, 故本文电路设计时取  $q = 0.9$ . 根据上面分析, 此时受控分数阶 Chen 混沌系统为

$$\begin{aligned} d^q y_1(t)/dt^q &= (-a + \mathbf{A}_1) \mathbf{e}_1(t) + d^q z_1(t)/dt^q, \\ \begin{pmatrix} d^q y_2(t)/dt^q \\ d^q y_3(t)/dt^q \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix} + \mathbf{A}_2 \mathbf{e}_2(t) \\ &+ \begin{pmatrix} d^q z_2(t)/dt^q \\ d^q z_3(t)/dt^q \end{pmatrix} \\ &+ \mathbf{F}_{21}(\mathbf{z}(t), \mathbf{e}_1(t), \mathbf{e}_2(t)). \end{aligned} \quad (12)$$

其中  $q = 0.9$ .

为使本文电路设计简便, 现取  $\mathbf{A}_1 = 33, \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} -38 & 0 \\ 0 & -47 \end{pmatrix}$ , 故有  $-a + \mathbf{A}_1 < 0$ , 矩阵  $\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix} + \mathbf{A}_2$  的特征值分别为  $-10$  和  $-50$ , 其幅角满足  $|\arg \lambda_{\pm}| = \pi > 0.5\pi q$ , 利用 Matlab 得到其同步仿真结果. 如图 5 所示, 此时 Lorenz 混沌系统(11) 的初始条件为  $\mathbf{z}(0) = (0, 1, 2)^T$ , 受控分数阶 Chen 混沌系统(12) 的初始条件为  $\mathbf{y}(0) = (1, 3, 5)^T$ .

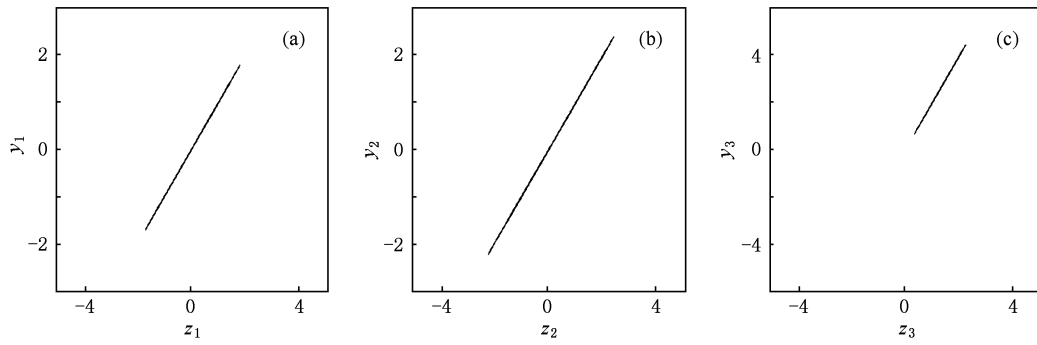


图 5 受控分数阶 Chen 混沌系统(12)与 Lorenz 混沌系统(11)的同步结果  $q=0.9$  (a)  $y_1-z_1$ , (b)  $y_2-z_2$ , (c)  $y_3-z_3$

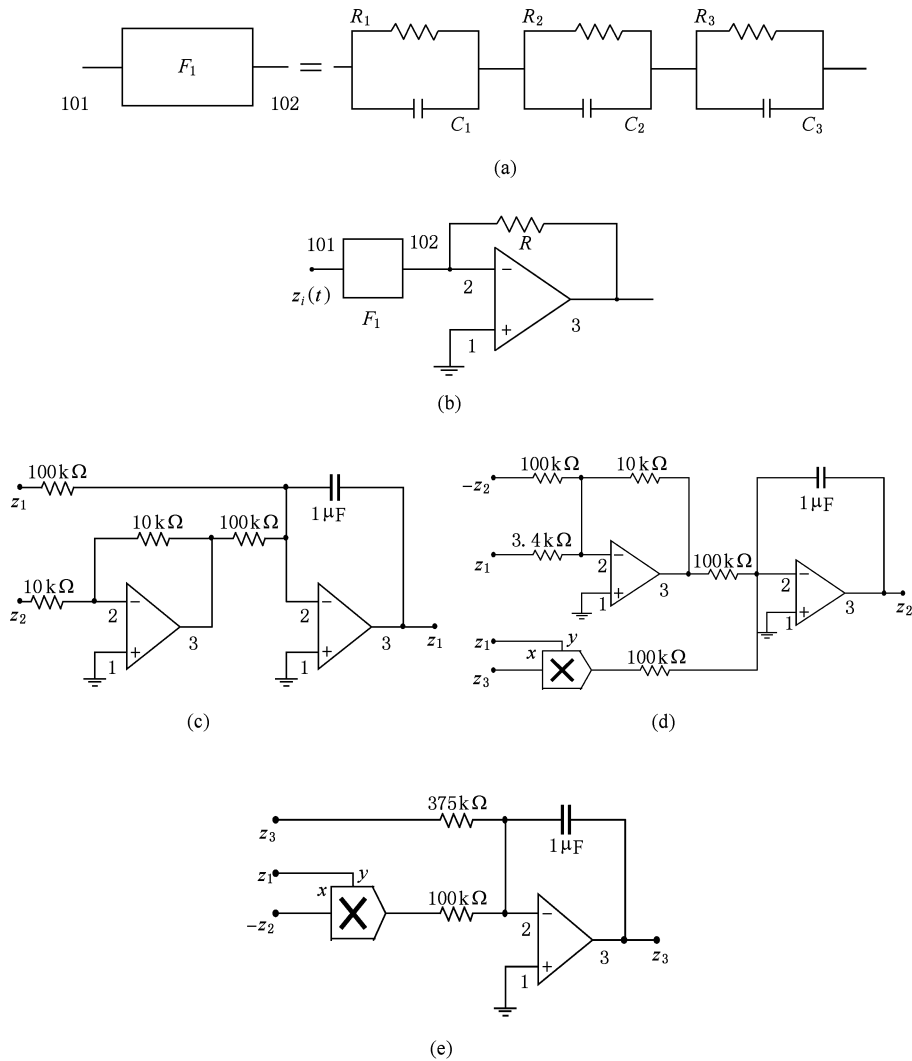


图 6  $1/s^{0.9}$  单元电路、 $d^{0.9}z_i(t)/dt^{0.9}$  电路单元和整数阶 Lorenz 混沌系统(11)的电路原理图 (a)  $1/s^{0.9}$  单元电路, (b)  $d^{0.9}z_i(t)/dt^{0.9}$  电路单元, (c) Lorenz 混沌系统(11)中第一个方程的电路, (d) 第二个方程的电路, (e) 第三个方程的电路

现对 Lorenz 混沌系统(11)和受控分数阶 Chen 混沌系统(12) ( $q=0.9$ ) 的同步进行电路实现, 响应

系统(12)在  $A_1 = 33, A_2 = \begin{pmatrix} -38 & 0 \\ 0 & -47 \end{pmatrix}$  时变为系

统(13),

$$\begin{aligned}
 d^q y_1(t)/dt^q &= -2(y_1(t) - z_1(t)) + d^q z_1(t)/dt^q, \\
 \begin{pmatrix} d^q y_2(t)/dt^q \\ d^q y_3(t)/dt^q \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -50 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_2(t) - z_2(t) \\ y_3(t) - z_3(t) \end{pmatrix} \\
 &+ \begin{pmatrix} d^q z_2(t)/dt^q \\ d^q z_3(t)/dt^q \end{pmatrix} \\
 &+ \begin{pmatrix} -(7 + y_3(t))(y_1(t) - z_1(t)) \\ y_2(t)(y_1(t) - z_1(t)) \end{pmatrix}.
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

首先,分析补偿器  $u(x(t))$  的电路实现. 由于补偿器  $u(x(t))$  中的关键是对驱动信号分数阶导数的电路实现,为此研究响应系统(13)式中对驱动信号  $z_i(t) (i=1,2,3)$  的分数阶导数  $d^{0.9} z_i(t)/dt^{0.9}$  的电路实现. 由电路实现  $q=0.9$  分数阶混沌系统<sup>[25,26]</sup>,可得到电路实现  $1/s^{0.9}$  的单元电路如图6(a),其中  $R_1 = 62.84 \text{ M}\Omega, R_2 = 0.25 \text{ M}\Omega, R_3 =$

$0.0025 \text{ M}\Omega, C_1 = 1.232 \text{ }\mu\text{F}, C_2 = 1.835 \text{ }\mu\text{F}, C_3 = 1.1 \text{ }\mu\text{F}$ . 根据一阶微分电路单元的设计,只需将一阶微分电路单元中的电容器换为实现  $1/s^{0.9}$  的单元电路即可,故得到对驱动信号  $z_i(t) (i=1,2,3)$  的分数阶导数  $d^{0.9} z_i(t)/dt^{0.9}$  的电路实现如图6(b)所示的电路单元.

其次,依据上面分析和分数阶混沌系统的电路设计<sup>[25,26]</sup>,容易得到驱动整数阶 Lorenz 混沌系统(11)和受控分数阶 Chen 混沌系统(13)的电路原理图,如图6和7所示.

图6和7电路中乘法器采用AD633,运算放大器使用LF353N,电源  $\pm 15 \text{ V}$ .

用Multisim2001电路仿真软件对图6和7的同步电路进行仿真,示波器上的同步结果如图8.

图5的Matlab同步仿真结果和图8的Multisim电路同步仿真结果符合较好,这表明电路仿真结果与理论分析结果符合.

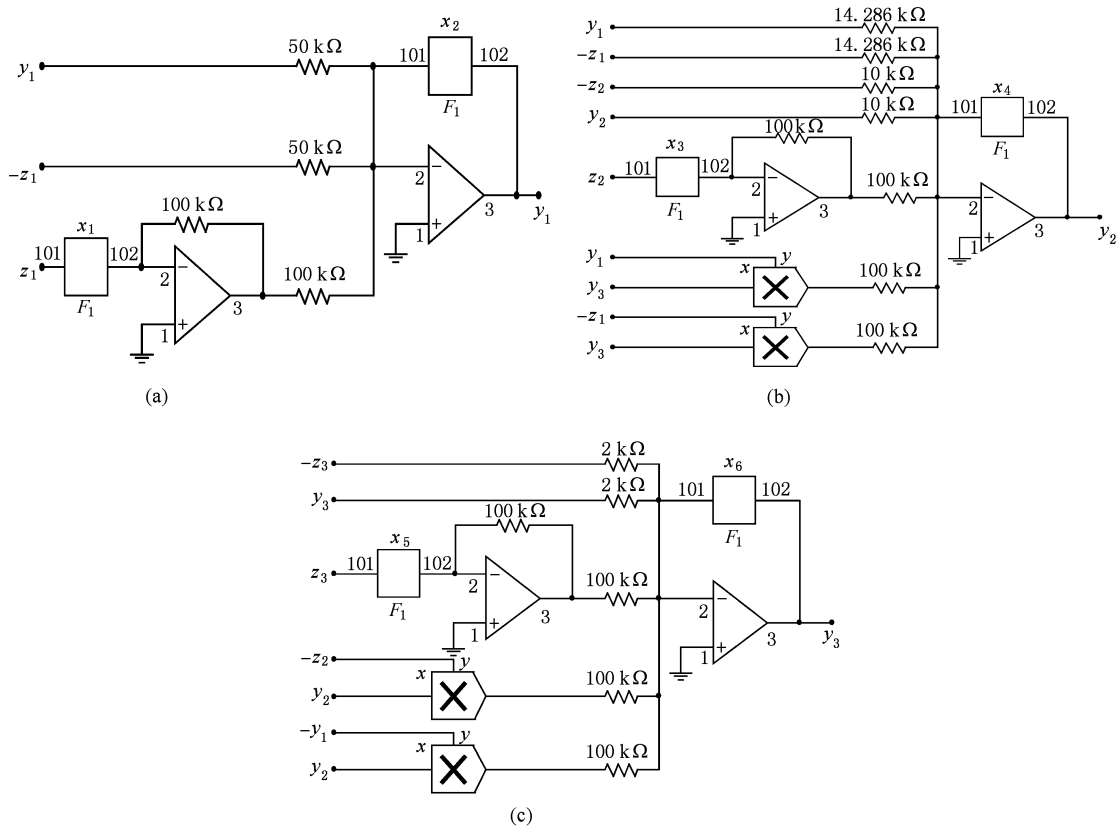


图7 受控分数阶 Chen 混沌系统(13)的电路原理图 (a)第一个方程的电路,(b)第二个方程的电路,(c)第三个方程的电路

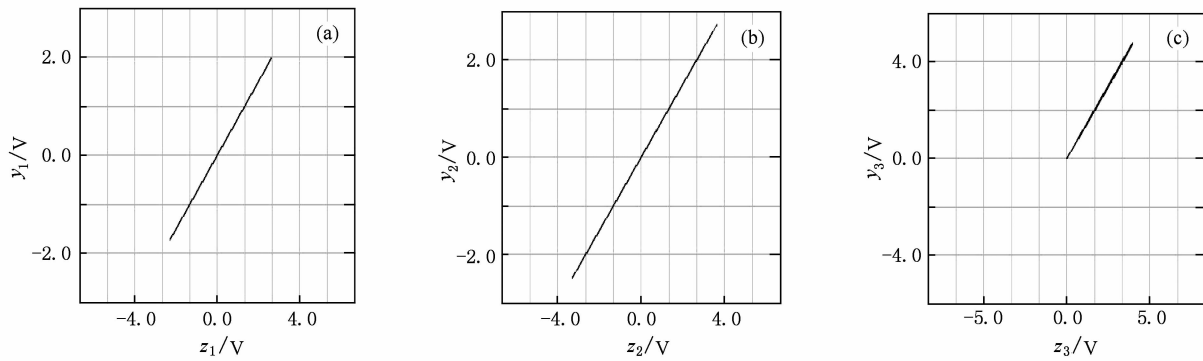


图 8 受控分数阶 Chen 混沌系统(13)与 Lorenz 混沌系统(11)的电路同步仿真结果  $q=0.9$  (a)  $z_1-y_1$ , (b)  $z_2-y_2$ , (c)  $z_3-y_3$

## 5. 结 论

利用追踪控制思想和分数阶线性系统稳定性理论实现了分数阶 Chen 混沌系统与整数阶 Lorenz 混沌系统之间的混沌同步. 理论分析和数值仿真结果表明,该方法不仅可以实现分数阶混沌系统与整数阶混沌系统之间的同步,还可以实现分数阶混沌系统对整

数阶混沌系统状态变量组合生成函数的追踪. 同时给出了实现分数阶 Chen 混沌系统与整数阶 Lorenz 混沌系统之间的混沌同步电路原理图和电路仿真结果,电路仿真结果与理论分析、Matlab 同步仿真结果符合较好. 本方法可以进一步推广到高维分数阶混沌系统与高维整数阶、高维分数阶混沌系统与高维分数阶混沌系统之间的同步,甚至在维数不相等、分数阶值  $q$  不相等的情况下,也能实现混沌同步.

- [1] Pecora L M, Carroll T L 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 821
- [2] Li Z G, Xu D L 2001 *Phys. Lett. A* **282** 175
- [3] Lu J Q, Xi Y G 2003 *Chaos Soliton Fract.* **17** 825
- [4] Zou Y L, Zhu J 2006 *Chin. Phys.* **15** 1965
- [5] Lü L, Luan L, Guo Z A 2007 *Chin. Phys.* **16** 346
- [6] Liu Y Z, Jiang C S, Lin C S 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 707 (in Chinese) [刘扬正、姜长圣、林长圣 2007 物理学报 **56** 707]
- [7] Wang X Y, Meng J 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 726 (in Chinese) [王兴元、孟 娟 2008 物理学报 **57** 726]
- [8] Gao X, Yu J B 2005 *Chin. Phys.* **14** 908
- [9] Grigorenko I, Grigorenko E 2003 *Phys. Rev. Lett.* **91** 034101
- [10] Li C G, Chen G 2004 *Physica A* **341** 55
- [11] Ahmad W M, Sprott J C 2003 *Chaos Soliton Fract.* **16** 339
- [12] Li C G, Liao X F, Yu J B 2003 *Phys. Rev. E* **68** 067203
- [13] Zhou P 2007 *Chin. Phys.* **16** 1263
- [14] Peng G J, Jiang Y L 2008 *Phys. Lett. A* 372 3963
- [15] Chen X R, Liu C X, Li Y X 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** (in Chinese) 1453 [陈向荣、刘崇新、李永勋 2008 物理学报 **57** 1453]
- [16] Peng G J, Jiang Y L, Chen F 2008 *Physica A* **387** 3738
- [17] Shao S Q 2009 *Chaos Soliton. Fract.* **39** 1572
- [18] Zhou P, Wei L J, Cheng X F 2009 *Chin. Phys. B* **18** 2674
- [19] Lorenz E N 1963 *J. Atmos. Sci.* **20** 130
- [20] Chen G, Ueta T 1999 *Int. J. Bifur. Chaos* **9** 1465
- [21] Mohammad S T, Mohammad H 2007 *Phys. Lett. A* **367** 102
- [22] Wang X Y, Shi Q J 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 5591 (in Chinese) [王兴元、石其江 2005 物理学报 **54** 5591]
- [23] Min F H, Wang Z Q 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 31 (in Chinese) [闵富红、王执铨 2008 物理学报 **57** 31]
- [24] Li C L, Luo X S 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 3759 (in Chinese) [李春来、罗晓曙 2009 物理学报 **58** 3759]
- [25] Liu J J, Liu C X 2007 *Chin. Phys.* **16** 1586
- [26] Wang F Q, Liu C X 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3922 (in Chinese) [王发强、刘崇新 2006 物理学报 **55** 3922]

# Synchronization between fractional-order chaotic system and chaotic system of integer orders

Zhou Ping<sup>†</sup> Kuang Fei

(*Institute of Applied Physics, Chongqing University of Posts and Telecommunications, Chongqing 400065, China*)

(Received 12 December 2009; revised manuscript received 27 January 2010)

## Abstract

Based on the idea of tracking control and the stability theory of linear fractional-order system, chaotic synchronization between fractional-order chaotic system and chaotic system of integer orders is proposed. A compensation controller and a feedback controller are given. Synchronization between the fractional-order Chen chaotic system and the Loren chaotic system of integer orders is used to illustrate the effectiveness of the proposed synchronization approach. Numerical and circuit simulations coincide with the theoretical analysis.

**Keywords:** fractional-order chaotic system, chaotic system of integer orders, chaotic synchronization, tracking control

**PACC:** 0545

---

<sup>†</sup> E-mail: zhouping@cqupt.edu.cn