

腔外原子操作控制腔内原子的纠缠特性*

卢道明[†]

(武夷学院电子工程系, 武夷山 354300)

(2010 年 2 月 27 日收到; 2010 年 5 月 31 日收到修改稿)

考虑初始处于 W 态的三个二能级原子, 将其中两个原子同时分别注入处于真空态的两个腔中并发生共振相互作用的情况. 采用数值计算方法, 研究了对腔外原子的旋转操作和测量对腔内原子纠缠性质的影响. 研究结果表明, 通过对腔外原子的旋转操作和选择性测量可控制腔内原子的纠缠性质.

关键词: 量子光学, 旋转操作, 选择测量, 量子纠缠

PACC: 0365, 4250

1. 引 言

自从量子纠缠被 Einstein-Podolsky-Rosen^[1] 和 Schrödinger^[2] 提出以来, 它一直是物理学中一个引人注目的研究领域, 在量子信息处理的量子态隐形传输、量子编码和量子计算中具有重要的应用. 至今人们已提出许多纠缠态的制备方案, 涉及光学系统^[3]、核磁共振^[4] 和量子腔电动力学^[5] 等领域. 近年来, 纠缠态度量已成为量子光学研究的热门课题之一^[6]. 关于纠缠态度量已有一些描述纠缠的物理量, 如 Von-Neumann 熵、纠缠相对熵^[7]、密度算符之间的距离^[8]、Renyi 纠缠度^[9] 和共生纠缠度^[10] 等. 另一方面, 1997 年 Gerry 和 Ghosh^[11] 提出: 采用选择原子测量的方法可以加强光场的压缩效应. 最近, Yang 和 Guo^[12] 提出通过对腔外原子的操作可控制腔内原子的发射性质. 吴怀志等^[13] 研究了双模相干场与 Λ 型三能级原子相互作用系统中的非经典性质, 詹佑帮等^[14] 研究了 Kerr 介质 Jaynes-Cummings 模型去纠缠态的场性质. 杨雄和宋克慧^[15,16] 研究了原子的选择电离和测量对腔场压缩性质的影响. 但以往涉及采用选择原子测量的方法研究原子与光场相互作用系统中, 大多集中在对光场和原子的压缩效应等量子特性方面, 而对原子的纠缠特性方面的研究较少. 本文考虑初始处于 W 态的三个二能级原子, 将其中两个原子同时分别注

入处于真空态的两个腔中并发生共振相互作用的情况. 采用数值计算方法, 讨论了通过对腔外原子的旋转操作和测量对腔内原子纠缠特性的影响.

2. 理论模型

一个二能级原子通过单光子跃迁与单模腔场发生共振相互作用, 在旋波近似下, 相互作用表象中原子和腔场体系的哈密顿能量为

$$H_1 = g(as^+ + a^+s^-), \quad (1)$$

式中 a^+ 和 a 分别为光场的产生和湮没算符, s^+ 和 s^- 为原子的赝自旋算符, g 为原子与光场间的耦合常数. 系统的时间演化算符为

$$U(t) = \begin{bmatrix} \cos At & -iga \frac{\sin Bt}{B} \\ -iga^+ \frac{\sin At}{A} & \cos Bt \end{bmatrix}, \quad (2)$$

式中

$$A = \sqrt{aa^+}g,$$

$$B = \sqrt{a^+a}g.$$

在(1)式作用下, 系统态矢演化规律为

$$\begin{aligned} |g\rangle|0\rangle &\rightarrow |g\rangle|0\rangle, \\ |e\rangle|0\rangle &\rightarrow \cos gt |e\rangle|0\rangle - i \sin gt |g\rangle|1\rangle, \\ |g\rangle|1\rangle &\rightarrow \cos gt |g\rangle|1\rangle - i \sin gt |e\rangle|0\rangle. \end{aligned} \quad (3)$$

如图 1 所示, 考虑三个二能级原子初始处于 W 态, 将其中两个原子(原子 1 和原子 2)同时分别注

* 福建省自然科学基金(批准号: 2008J0217)资助的课题.

[†] E-mail: daominglu79@hotmail.com

入处于真空态的两个单模腔中(腔场 1 和腔场 2)并发生共振相互作用. 整个系统的初态为

$$|\varphi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|eg\rangle_{123} + |geg\rangle_{123} + |gge\rangle_{123})|0\rangle_1|0\rangle_2. \quad (4)$$

为简单起见, 设原子 1 与腔场 1 的耦合系数等于原子 2 与腔场 2 的耦合系数, 均为 g . t 时刻整个系统态矢为

$$|\varphi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}[(\cos gt|e\rangle_1|g\rangle_2|0\rangle_1|0\rangle_2 - i \sin gt|g\rangle_1|g\rangle_2|1\rangle_1|0\rangle_2$$

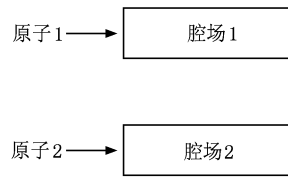
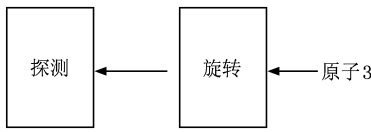


图 1 系统的框图

3. 原子间纠缠的演化

两原子间的纠缠特性可用 Negativity 熵来描述^[17], 即对于用密度矩阵 ρ 表示的两个子系统, 其纠缠可用部分转置矩阵 ρ^T 的负本征值来定义,

$$N = -2 \sum_i \lambda_i, \quad (7)$$

式中 λ_i 是部分转置矩阵 ρ^T 的负本征值. 部分转置矩阵 ρ^T 为

$$\rho^T = \begin{bmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{31} & \rho_{32} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \rho_{41} & \rho_{42} \\ \rho_{13} & \rho_{14} & \rho_{33} & \rho_{34} \\ \rho_{23} & \rho_{24} & \rho_{43} & \rho_{44} \end{bmatrix}.$$

$N = 0$ 表示两子系统是分离的; $N = 1$ 表示两子系统处于最大纠缠态; $0 < N < 1$ 表示两子系统是纠缠的. 利用(6)式可得到原子 1 和原子 2 间的纠缠量为

$$N = \frac{1}{3}(\sqrt{(2\sin^2 gt + 1)^2 + 4\cos^4 gt} - (2\sin^2 gt + 1)). \quad (8)$$

若利用场电离技术对原子 3 进行测量, 测得原子 3 处于 $|g\rangle$ 态, 那么由原子 1、原子 2、腔场 1 和腔场 2 构成的系统的态塌缩为

$$+ \cos gt|g\rangle_1|e\rangle_2|0\rangle_1|0\rangle_2 - i \sin gt|g\rangle_1|g\rangle_2|0\rangle_1|1\rangle_2)|g\rangle_3 + |g\rangle_1|g\rangle_2|e\rangle_3|0\rangle_1|0\rangle_2]. \quad (5)$$

对原子 3、腔场 1 和腔场 2 求迹, 可得到原子 1 和原子 2 的密度矩阵为

$$\rho = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2 gt & \cos^2 gt & 0 \\ 0 & \cos^2 gt & \cos^2 gt & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\sin^2 gt + 1 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

$$|\varphi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos gt|e\rangle_1|g\rangle_2|0\rangle_1|0\rangle_2 - i \sin gt|g\rangle_1|g\rangle_2|1\rangle_1|0\rangle_2 + \cos gt|g\rangle_1|e\rangle_2|0\rangle_1|0\rangle_2 - i \sin gt|g\rangle_1|g\rangle_2|0\rangle_1|1\rangle_2). \quad (9)$$

对原子 3、腔场 1 和腔场 2 求迹, 可得到原子 1 和原子 2 的密度矩阵为

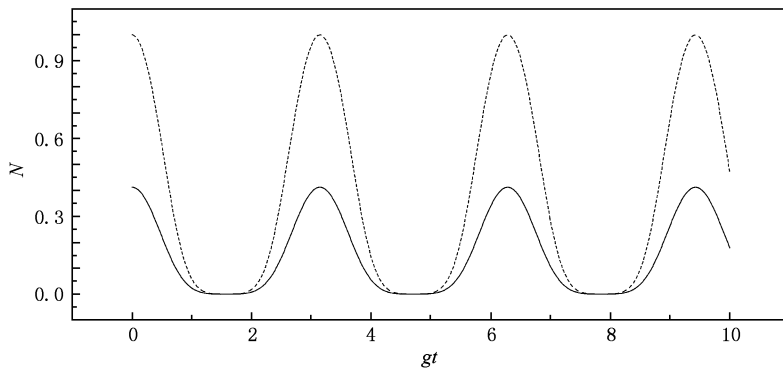
$$\rho = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2 gt & \cos^2 gt & 0 \\ 0 & \cos^2 gt & \cos^2 gt & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\sin^2 gt \end{bmatrix}. \quad (10)$$

利用(10)式可得到原子 1 和原子 2 间的纠缠量为

$$N = \sqrt{\sin^4 gt + \cos^4 gt} - \sin^2 gt. \quad (11)$$

利用(8)和(11)式, 通过数值计算可得出原子 1 和原子 2 间的纠缠量 N 随时间的演化, 结果如图 2 所示, 图中实线表示未对原子 3 进行选择性的测量的结果, 虚线表示通过对原子 3 进行选择性的测量的结果. 从图 2 可以看出, 无论是否对原子 3 进行选择性的测量, 腔内两原子间纠缠量均作周期性演化, 演化周期均为 π . 另外, 比较图 2 中的实线和虚线可知, 通过对原子 3 进行选择性的测量, 若测得原子 3 处于 $|g\rangle$ 态, 则可增强原子 1 和原子 2 间的纠缠.

另一方面, 在对原子 3 进行探测之前先对原子 3 进行旋转操作, 经操作后原子 3 的状态演化为

图2 原子3处于 $|g\rangle$ 态时两原子纠缠量 N 随时间的演化

$$\begin{aligned} |g\rangle_3 &\rightarrow \cos\theta |g\rangle_3 + \sin\theta |e\rangle_3, \\ |e\rangle_3 &\rightarrow \cos\theta |e\rangle_3 - \sin\theta |g\rangle_3, \end{aligned} \quad (12)$$

式中 θ 为旋转角. 经旋转操作后整个系统态矢演化为

$$\begin{aligned} |\varphi(t)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} [(\cos gt |e\rangle_1 |g\rangle_2 |0\rangle_1 |0\rangle_2 \\ &\quad - i \sin gt |g\rangle_1 |g\rangle_2 |1\rangle_1 |0\rangle_2 \\ &\quad + \cos gt |g\rangle_1 |e\rangle_2 |0\rangle_1 |0\rangle_2 \\ &\quad - i \sin gt |g\rangle_1 |g\rangle_2 |0\rangle_1 |1\rangle_2) \\ &\quad \times (\cos\theta |g\rangle_3 + \sin\theta |e\rangle_3) \\ &\quad + |g\rangle_1 |g\rangle_2 |0\rangle_1 |0\rangle_2 (\cos\theta |e\rangle_3 \end{aligned}$$

$$- \sin\theta |g\rangle_3)]. \quad (13)$$

若利用场电离技术对原子3进行测量, 测得原子3处于 $|g\rangle$ 态, 那么由原子1、原子2、腔场1和腔场2构成的系统的态塌缩为

$$\begin{aligned} |\varphi(t)\rangle &= C [(\cos gt |e\rangle_1 |g\rangle_2 |0\rangle_1 |0\rangle_2 \\ &\quad - i \sin gt |g\rangle_1 |g\rangle_2 |1\rangle_1 |0\rangle_2 \\ &\quad + \cos gt |g\rangle_1 |e\rangle_2 |0\rangle_1 |0\rangle_2 \\ &\quad - i \sin gt |g\rangle_1 |g\rangle_2 |0\rangle_1 |1\rangle_2) \cos\theta \\ &\quad - \sin\theta |g\rangle_1 |g\rangle_2 |0\rangle_1 |0\rangle_2], \quad (14) \end{aligned}$$

式中 C 为归一化常数, $C^{-2} = 1 + \cos^2\theta$. 利用(14)式可得到原子1和原子2的密度矩阵为

$$\rho = C^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2 gt \cos^2\theta & \cos^2 gt \cos^2\theta & -\frac{1}{2} \cos gt \sin 2\theta \\ 0 & \cos^2 gt \cos^2\theta & \cos^2 gt \cos^2\theta & -\frac{1}{2} \cos gt \sin 2\theta \\ 0 & -\frac{1}{2} \cos gt \sin 2\theta & -\frac{1}{2} \cos gt \sin 2\theta & 2 \sin^2 gt \cos^2\theta + \sin^2\theta \end{bmatrix}. \quad (15)$$

部分转置矩阵为

$$\rho^T = C^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cos^2 gt \cos^2\theta \\ 0 & \cos^2 gt \cos^2\theta & 0 & -\frac{1}{2} \cos gt \sin 2\theta \\ 0 & 0 & \cos^2 gt \cos^2\theta & -\frac{1}{2} \cos gt \sin 2\theta \\ \cos^2 gt \cos^2\theta & -\frac{1}{2} \cos gt \sin 2\theta & -\frac{1}{2} \cos gt \sin 2\theta & 2 \sin^2 gt \cos^2\theta + \sin^2\theta \end{bmatrix}. \quad (16)$$

其本征值 $\lambda_1 = C^2 \cos^2 gt \cos^2\theta$, 另外三个本征值满足下列方程:

$$\lambda^3 + p\lambda^2 + q\lambda + r = 0,$$

$$p = -C^2(1 + \sin^2 gt \cos^2\theta),$$

$$q = C^4 \left(\frac{1}{2} \sin^2 2gt \cos^4\theta - \frac{1}{4} \cos^2 gt \sin^2 2\theta \right)$$

$$r = C^6 \cos^6 gt \cos^6 \theta \left(-\cos^4 gt \cos^4 \theta \right), \quad (17)$$

采用数值计算方法,利用(7)和(17)式可计算出对原子3进行旋转操作和选择性测量后原子1和原子2间的纠缠量 N 随时间的演化,结果如图3所示,图中实线表示未对原子3进行旋转操作和测量

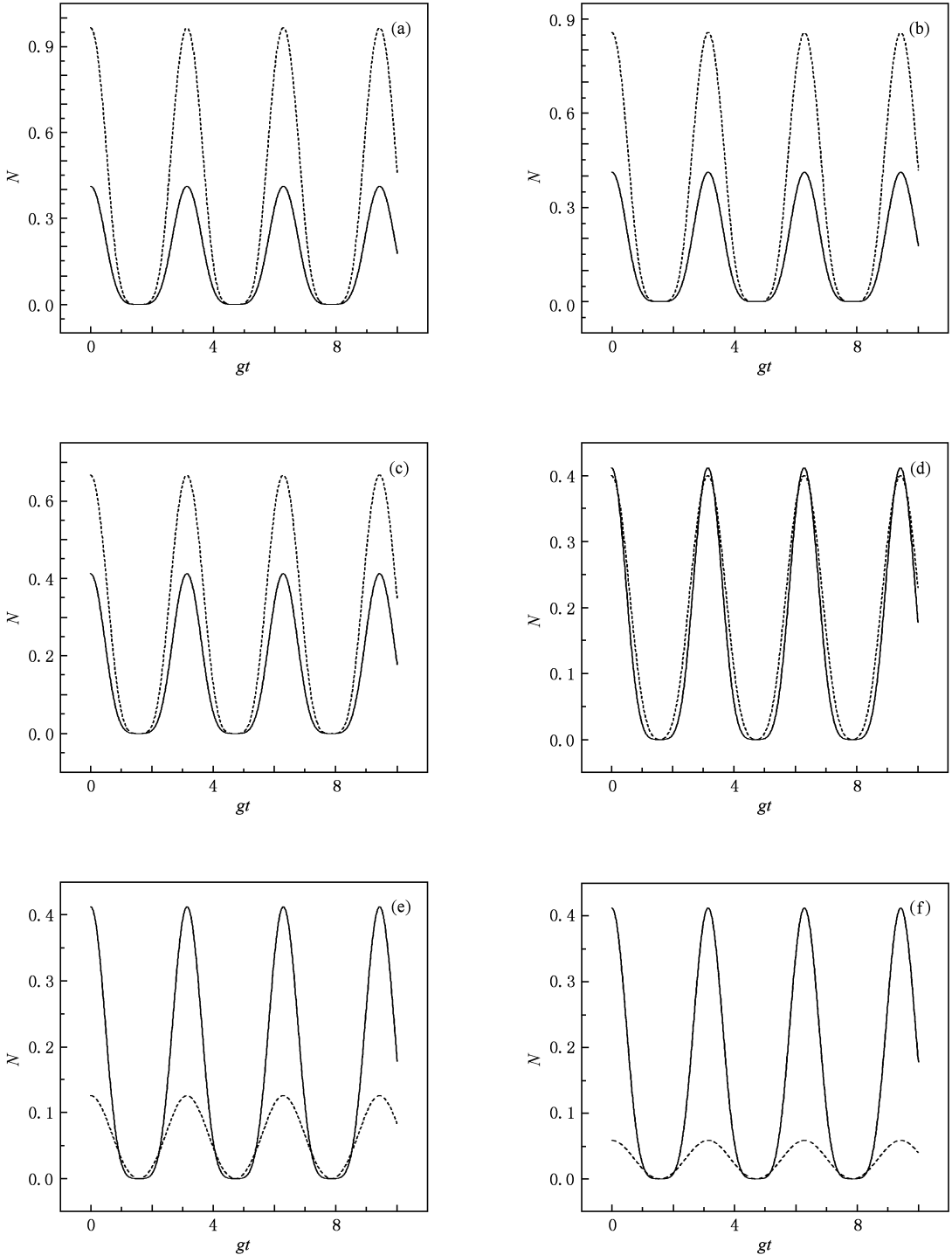


图3 原子3经旋转操作后处于 $|g\rangle$ 态时两原子纠缠量 N 随时间的演化 (a) $\theta = \frac{\pi}{12}$, (b) $\theta = \frac{\pi}{6}$, (c) $\theta = \frac{\pi}{4}$, (d) $\theta = \frac{\pi}{3}$, (e) $\theta = \frac{5\pi}{12}$, (f) $\theta = \frac{8\pi}{9}$

的结果,虚线表示对原子 3 进行旋转操作和测量的结果.图 3(a),(b),(c),(d),(e)和(f)分别与旋转角 θ 取 $\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{12}$ 和 $\frac{4\pi}{9}$ 相对应,由于篇幅限制,没有给出旋转角 θ 在第二象限内变化时的计算结果.数值计算结果表明,旋转角 θ 在 $[0, \pi]$ 区间变化时,纠缠量 N 的时间演化曲线随 θ 变化具有对称性,其对称轴为 $\theta = \frac{\pi}{2}$,如 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 与 $\theta = \frac{5\pi}{6}, \theta = \frac{2\pi}{6}$ 与 $\theta = \frac{4\pi}{6}, \theta = \frac{\pi}{4}$ 与 $\theta = \frac{3\pi}{4}$ 有相同的演化规律.从图 3 可以看出,原子 1 和原子 2 间的纠缠量 N 受旋转角 θ 的控制.通过对原子 3 的旋转操作和选择性测量,当 θ 较小时可使原子 1 和原子 2 间的纠缠增强,并且随 θ 增大原子 1 和原子 2 间的纠缠减弱.当 θ 大于一定值时,原子 1 和原子 2 间的纠缠量小于未对原子 3 进行旋转操作和选择性测量的结果.进一步研究表

明,若测得原子 3 处于 $|e\rangle$ 态,原子 1 和原子 2 间的纠缠量演化与原子 3 处于 $|g\rangle$ 态的结果一致.

4. 结 论

本文利用 Negativity 熵描述了原子间的纠缠.考虑初始处于 W 态的三个二能级原子,将其中两个原子同时分别注入处于真空态的两个腔中并发生共振相互作用,而另一原子处于腔外的情况.采用数值计算方法,研究了对腔外原子的旋转操作和测量对腔内原子纠缠性质的影响.研究结果表明:一方面,通过对腔外原子的选择性测量,若测得原子处于 $|g\rangle$ 态,可使腔内原子纠缠性质增强;另一方面,通过对腔外原子的旋转操作和选择性测量,调节旋转角大小也可控制腔内原子纠缠性质.

-
- [1] Einstein A, Podolsky B, Rosen N 1935 *Phys. Rev.* **47** 777
- [2] Schrödinger E 1935 *Naturwissenschaften* **23** 807
- [3] Weinfurter H, Zukowski M 2001 *Phys. Rev. A* **64** R010102
- [4] Turchette Q A 1998 *Phys. Rev. Lett.* **81** 1525
- [5] Song K H, Guo G C 1999 *Chin. Phys. Lett.* **16** 161
- [6] Guo L, Liang X T 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 50 (in Chinese) [郭亮、梁先庭 2009 物理学报 **58** 50]
- [7] Zheng S B, Guo G C 2000 *Phys. Rev. Lett.* **85** 2392
- [8] Zheng S B 2001 *Phys. Rev. Lett.* **87** 230404
- [9] Vedral V, Plenio M B, Rippin M A, Knight P L 1997 *Phys. Rev. Lett.* **78** 2275
- [10] Wootters W K 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 2245
- [11] Gerry C C, Ghosh H 1997 *Phys. Lett. A* **229** 17
- [12] Yang C P, Guo G C 1999 *Phys. Lett. A* **255** 129
- [13] Wu H Z, Su W J 2007 *Chin. Phys.* **16** 106
- [14] Zhan Y B, Zhou P 1999 *Chin. J. Quantum Electron.* **16** 398 (in Chinese) [詹佑邦、周平 1999 量子电子学报 **16** 398]
- [15] Song K H 1999 *Acta Opt. Sin.* **19** 1599 (in Chinese) [宋克慧 1999 光学学报 **19** 1599]
- [16] Yang X, Song K H 2006 *J. At. Mol. Phys.* **23** 143 (in Chinese) [杨雄、宋克慧 2006 原子与分子物理学报 **23** 143]
- [17] Zou Y 2009 *Chin. J. Quantum Electron.* **26** 69 (in Chinese) [邹艳 2009 量子电子学报 **26** 69]

Entanglement properties of two-atom inside cavities controlled by manipulating the atom outside the cavity^{*}

Lu Dao-Ming[†]

(*Department of Electronic Engineering, Wuyi University, Wuyishan 354300, China*)

(Received 27 February 2010; revised manuscript received 31 May 2010)

Abstract

Considering three two-level atoms initially in the W state, then two of them are placed into two initially empty cavities respectively and made resonantly interacted. The two-atom entanglement evolution inside cavities is investigated. The effects of rotational manipulation and state-selective measurement of the atoms outside the cavities on the two-atom entanglement evolution inside cavities are discussed. The results obtained using the numerical method show that the two-atom entanglement inside cavities is controlled by manipulating the atom outside the cavity.

Keywords: quantum optics, rotation operation, state-selective measurement, quantum entanglement

PACC: 0365, 4250

^{*} Project supported by the Natural Science Foundation of Fujian Province, China (Grant No. 2008J0217).

[†] E-mail: daominglu79@hotmail.com