

深海内波非线性薛定谔方程的研究*

宋诗艳¹⁾ 王 晶¹⁾ 孟俊敏^{2)†} 王建步²⁾ 扈培信¹⁾

1) (中国海洋大学信息科学与工程学院, 青岛 266100)

2) (国家海洋局第一海洋研究所, 青岛 266061)

(2009 年 5 月 5 日收到; 2009 年 6 月 2 日收到修改稿)

考虑以跃层为界的两层分层流体, 在弱非线性条件下, 从分层流体的动力学基本方程组出发, 应用多重尺度方法推导出描述深海内波的非线性薛定谔方程, 分析方程中频散和非线性系数, 求出非线性薛定谔方程的孤子解, 并通过数值实验验证了理论的正确性.

关键词: 深海内波, 非线性薛定谔方程, 弱非线性, 多重尺度方法

PACC: 4735, 4710, 0340G

1. 引 言

非线性薛定谔方程已用于描述表面波的传播演变. Zakharov^[1] 1968 年得到了无限深度情况下的非线性薛定谔方程, Benney 和 Roskes^[2] 1969 年从流体力学基本方程组出发, 采用多重尺度方法得到了描述表面波传播演变的非线性薛定谔方程, Hashimoto 和 Ono^[3] 1972 年对方程进行了处理, 得到了有限深度情况下标准形式的非线性薛定谔方程, Zakharov 等^[4], Scott 等^[5] 求得了非线性薛定谔方程的永形波包络解, Satsuma 和 Yajima^[6] 1975 年对无限深情况下的非线性薛定谔方程进行了数值计算. 海洋内波是当前海洋学研究的热点和难点, 特别对于深海内波, 由于观测数据的缺乏, 尚未有系统的研究. 因此, 若能建立深海内波的非线性薛定谔方程, 就能够从啁啾思想^[7,8] 深入研究频散、非线性效应对内波传播影响的机理, 对探索深海中内波的传播特性, 认清内波形成的物理机理具有重要的意义.

海洋内波是发生在密度稳定层化的海水内部的一种波动, 其最大振幅出现在海洋内部. 迄今为止, 很多学者对内波的许多方面进行了深入研究与分析, 通常的做法是把密度连续分层的流体看成两层或是三层分层的流体^[9-12]. 对于深海内波,

Benjamin^[13] 1967 年和 Ono^[14] 1975 年导出了无限深流体中界面内波的 Benjamin-Ono 方程 (BO 方程); Kubota 等^[15] 1978 年导出了中等长波方程 (intermediate long wave) (ILW 方程); Chio 和 Camassa^[16] 1999 年从描述内波运动的流体力学基本方程组出发, 采用深度平均的方法得到两层界面内波的完全非线性演化方程, 所推导的方程在弱非线性, 沿一个方向传播时可以退化为中等长波方程 (ILW 方程), 在无限水深时 ILW 方程又可以退化为 BO 方程. 虽然对于深海内波已建立了不同模型, 在应用中各有千秋, 但是至今仍没有用非线性薛定谔方程描述深海内波的工作. 本文从流体力学方程组出发, 采用不同处理方法建立了描述深海内波的非线性薛定谔方程. 首先引入速度标量势, 得出用速度标量势描述的深海两层流体的动力学方程组. 然后在弱非线性条件下, 从流体力学的基本方程组出发, 采用多重尺度法推导出了深海两层界面内波的非线性薛定谔方程. 最后讨论了非线性薛定谔方程的频散系数和非线性系数的关系, 从而确立了非线性薛定谔方程孤子解的形式, 并对一定条件下深海内波模型进行了数值计算, 同样得到了孤子的传播模态.

2. 基本方程及边界条件

对于无黏流体, 忽略科氏力的影响, 可用如下

* 国家自然科学基金 (批准号: 60702077) 和国家海洋局第一海洋研究所“基本科研业务费专项资金” (批准号: GY02-2008G42) 资助的课题.

† 通讯联系人. E-mail: mengjm@fio.org.cn

Navier-Stokes 方程研究内波的运动^[17,18]:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = - \nabla \left(\frac{P}{\rho} + gz \right). \quad (1)$$

对于重力波来说,流体密度随时间的变化可以忽略不计,若流体运动是无旋的,连续方程^[17]可简化为

$$\mathbf{V} = \nabla \varphi, \quad (2)$$

其中 φ 是速度标量势. 将(2)式代入(1)式并对空间积分,得到 Bernoulli 方程

$$\varphi_t + \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 + gz = - \frac{p}{\rho}. \quad (3)$$

若选择流体为两层结构,则连续方程和 Bernoulli 方程如下:对于上层流体,有

$$\varphi_{1xx} + \varphi_{1zz} = 0 \quad (\zeta \leq z \leq h_1), \quad (4)$$

$$\varphi_{1t} + \frac{1}{2} (\varphi_{1x}^2 + \varphi_{1z}^2) + g\zeta = - \frac{p_1}{\rho_1} \quad (z = \zeta); \quad (5)$$

对于下层流体,有

$$\varphi_{xx} + \varphi_{zz} = 0 \quad (-h_2 < z < \zeta), \quad (6)$$

$$\varphi_t + \frac{1}{2} (\varphi_x^2 + \varphi_z^2) = - g\zeta - \frac{p_2}{\rho_2} \quad (z = \zeta). \quad (7)$$

界面处的边界条件如下:运动学边界条件为

$$\zeta_t + \varphi_{1x}\zeta_x = \varphi_{1z} \quad (z = \zeta), \quad (8)$$

$$\zeta_t + \varphi_x\zeta_x = \varphi_z \quad (z = \zeta); \quad (9)$$

动力学边界条件为

$$p_1 = p_2 \quad (z = \zeta); \quad (10)$$

上表面边界条件为

$$\varphi_{1z} = 0 \quad (z = h_1); \quad (11)$$

底面边界条件为

$$\varphi_z = 0 \quad (z = -h_2); \quad (12)$$

其中 φ_1, φ 分别是上、下层流体的速度标量势; h_1, h_2 分别为上下层流体的深度; p_1, p_2 分别是上下层流体在界面处的压强; ρ_1, ρ_2 分别是上下层流体的密度.

3. 深海内波的弱非线性模型

对于上层流体,定义如下尺度:水平尺度为 $\frac{1}{k}$, 垂向尺度为 h_1 , 振幅尺度为 A_0 , 时间尺度为 $\frac{1}{k\sqrt{gh_1}}$, 速度的标量势为 $\frac{A_0}{kh_1} \sqrt{gh_1}$, 压强尺度为 $\rho_1 g A_0$, 其中 k 为波矢.

定义两个无量纲参数

$$\varepsilon_1 = \frac{A_0}{h_1}, \mu_1 = kh_1,$$

其中 ε_1, μ_1 都是小量,且 $O(\varepsilon_1) = O(\mu_1^2)$.

由上面的尺度定义,对于上层流体,(4),(5),(8),(11)式无量纲化后化为

$$\mu_1^2 \varphi_{1xx} + \varphi_{1zz} = 0 \quad (\varepsilon_1 \zeta \leq z \leq 1), \quad (13)$$

$$\mu_1^2 (\varphi_{1t} + \zeta) + \frac{\varepsilon_1}{2} [\mu_1^2 \varphi_{1x}^2 + \varphi_{1z}^2] = - \mu_1^2 p_1 \quad (z = \varepsilon_1 \zeta), \quad (14)$$

$$\mu_1^2 (\zeta_t + \varepsilon_1 \varphi_{1x} \zeta_x) = \varphi_{1z} \quad (z = \varepsilon_1 \zeta), \quad (15)$$

$$\varphi_{1z} = 0 \quad (z = 1). \quad (16)$$

将 φ_1 在 $z=1$ 处作泰勒展开^[19],令 $\varphi_1(x, z, t)|_{z=1} = \varphi_0(x, t)$ 并利用(13),(16)式,则 $z = \varepsilon_1 \zeta$ 时,

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, \varepsilon_1 \zeta, t) &= \varphi_0 - \mu_1^2 \frac{(\varepsilon_1 \zeta - 1)^2}{2} \varphi_{0xx} \\ &\quad + \mu_1^4 \frac{(\varepsilon_1 \zeta - 1)^4}{4!} \varphi_{0xxxx} + \dots, \\ \varphi_{1z}(x, \varepsilon_1 \zeta, t) &= - \mu_1^2 (\varepsilon_1 \zeta - 1) \varphi_{0xx} \\ &\quad + \mu_1^4 \frac{(\varepsilon_1 \zeta - 1)^3}{6} \varphi_{0xxxx} + \dots. \end{aligned}$$

将上两式代入(14),(15)式,只保留到 $O(\varepsilon_1)$, $O(\mu_1^2)$ 项,令 $\xi_0 = x - c_0 t$ (c_0 为相速度),可得

$$-p_1 = \zeta + c_0^2 \zeta + \frac{3\varepsilon_1}{2} c_0^2 \zeta^2 - \frac{\mu_1^2}{3} c_0^2 \zeta_{xx}. \quad (17)$$

(17)式的有量纲形式为

$$- \frac{p_1}{\rho_1} = g\zeta + \frac{1}{h_1} c_0^2 \zeta + \frac{3}{2h_1^2} c_0^2 \zeta^2 - \frac{1}{3} h_1 c_0^2 \zeta_{xx}. \quad (18)$$

对于深海下层流体, $\mu = kh_2$, $O(\mu) = O(1)$, $\varepsilon = A_0/h_2 \ll 1$, $O(A_0/h_2) = O(kA_0)$, 若令 $\varphi = \varepsilon \varphi'$, $\zeta = \varepsilon \zeta'$, 则下层流体有量纲形式的方程和无量纲化后的方程形式相同. 在有量纲的情况下用多重尺度方法推导深海内波非线性薛定谔方程.

将(10),(18)式代入(7)式得

$$\begin{aligned} \varphi_t + \frac{1}{2} (\varphi_x^2 + \varphi_z^2) \\ = \frac{gh_1(\rho_1 - \rho_2) + \rho_1 c_0^2}{\rho_2 h_1} \zeta \\ + \frac{3\rho_1 c_0^2}{2\rho_2 h_1^2} \zeta^2 - \frac{\rho_1 h_1 c_0^2}{3\rho_2} \zeta_{xx}. \end{aligned} \quad (19)$$

将(19)式分别对 t, x, z 求导,并利用(9)式得

$$\begin{aligned} \varphi_{tt} - \frac{gh_1(\rho_1 - \rho_2) + \rho_1 c_0^2}{\rho_2 h_1} \varphi_z \\ = - (\varphi_x^2 + \varphi_z^2)_t - \frac{1}{2} \varphi_x (\varphi_x^2 + \varphi_z^2)_x \\ - \frac{1}{2} \varphi_z (\varphi_x^2 + \varphi_z^2)_z \end{aligned}$$

$$+ \frac{3\rho_1 c_0^2}{\rho_2 h_1^2} \zeta \varphi_z - \frac{\rho_1 h_1 c_0^2}{3\rho_2} \times (\varphi_{zzz} - \varphi_{xxx} \zeta_x - 2\varphi_{xz} \zeta_{xx}). \quad (20)$$

令

$$c_1 = -\frac{gh_1(\rho_1 - \rho_2) + \rho_1 c_0^2}{\rho_2 h_1},$$

$$c_2 = \frac{3\rho_1 c_0^2}{2h_1^2 \rho_2},$$

$$c_3 = -\frac{\rho_1 h_1 c_0^2}{3\rho_2},$$

将(19),(20)式在 $z=0$ 附近按 ζ 幂次展开,得

$$-c_1 \zeta = \varphi_t + \varphi_{zt} \zeta + \frac{1}{2} \varphi_{zzt} \zeta^2 + \frac{1}{2} (\varphi_x^2 + \varphi_z^2) + \frac{1}{2} (\varphi_x^2 + \varphi_z^2)_{,z} \zeta - c_2 \zeta^2 - c_3 \zeta_{xx} - \dots, \quad (21)$$

$$\begin{aligned} & \varphi_{tt} + c_1 \varphi_z \\ &= -[\varphi_{tt} + c_1 \varphi_z]_{,z} \zeta - \frac{1}{2} [\varphi_{tt} + c_1 \varphi_z]_{,zz} \zeta^2 \\ & - (\varphi_x^2 + \varphi_z^2)_{,t} - (\varphi_x^2 + \varphi_z^2)_{,tz} \zeta \\ & - \frac{1}{2} \varphi_x (\varphi_x^2 + \varphi_z^2)_{,x} - \frac{1}{2} \varphi_z (\varphi_x^2 + \varphi_z^2)_{,z} \\ & + 2c_2 (\zeta \varphi_z + \varphi_{zz} \zeta^2) \\ & + c_3 \left(\varphi_{zzz} + \varphi_{zzxz} \zeta + \frac{1}{2} \varphi_{zzxxx} \zeta^2 - \varphi_{xxx} \zeta_x \right. \\ & \left. - \varphi_{xxxz} \zeta \zeta_x - 2\varphi_{xx} \zeta_{xx} - 2\varphi_{xx} \zeta \zeta_{xx} \right). \quad (22) \end{aligned}$$

引入多重尺度变量^[19-21]: $x_0, x_1 = \varepsilon x, x_2 = \varepsilon^2 x, \dots$, 和 $t_0, t_1 = \varepsilon t, t_2 = \varepsilon^2 t, \dots$, 令 $\varphi = \sum_{n=1} \varepsilon^n \varphi_n, \zeta =$

$\sum_{n=1} \varepsilon^n \zeta_n$, 得到

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial t_2} + \dots.$$

将上两式代入(6),(21),(22)式整理后,由(6)式得

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \varphi_n = F_n \quad (-h_2 \leq z \leq \zeta), \quad (23)$$

由(21)式得

$$\left(c_1 \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial^2}{\partial t_0^2} \right) \varphi_n = G_n \quad (z = \zeta), \quad (24)$$

由(22)式得

$$-c_1 \zeta_n = H_n \quad (z = \zeta), \quad (25)$$

其中 F_n, G_n, H_n 是除了方程左边的项之外,所有其他项的和.

令 $\varphi_n = \sum_{m=1}^n \varphi_{nm} e^{im\psi} + \text{c. c.}$, 其中 $\psi = kx_0 - \omega t_0$,

将 φ_n 代入(23)-(25)及(12)式,并比较 $e^{im\psi}$ 的系数,得

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - m^2 k^2 \right) \varphi_{nm} = F_{nm} \quad (-h_2 < z \leq \zeta), \quad (26)$$

$$\left(c_1 \frac{\partial}{\partial z} - m^2 \omega^2 \right) \varphi_{nm} = G_{nm} \quad (z = \zeta), \quad (27)$$

$$\zeta_{nm} = -\frac{1}{c_1} H_{nm} \quad (z = \zeta), \quad (28)$$

$$(\varphi_{nm})_z = 0 \quad (z = -h_2). \quad (29)$$

当 $n=1$ 时,令 $\zeta_1 = \frac{1}{2}(Ae^{i\psi} + \text{c. c.})$, 解(26)-(29)

式得

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_{10} - \frac{(c_1 + c_3 k^2)}{2\omega \text{ch}(kh_2)} \text{ch}[k(z + h_2)] \\ & \times (iAe^{i\psi} + \text{c. c.}), \quad (30) \end{aligned}$$

$$\omega^2 = (c_1 + c_3 k^2) k \text{th}(kh_2), \quad (31)$$

其中 φ_{10}, A 与 z 无关,只是 t_1, t_2, x_1, x_2 等慢变量的待定函数.

(31)式表示频散关系,由此式可求得群速度 c_g ,

$$\begin{aligned} c_g &= \frac{d\omega}{dk} \\ &= \frac{\omega}{2k} \left[1 + \frac{2kh_2}{\text{sh}(2kh_2)} \right] + \frac{c_3 k^2 \text{th}(kh_2)}{\omega}. \quad (32) \end{aligned}$$

当 $n=2$ 时,解(26)-(29)式得到, φ_{20} 与 z 无关,只是 t_1, t_2, x_1, x_2 等慢变量的待定函数,

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= \varphi_{20} - \frac{\omega(z + h_2)}{2k \text{sh}(kh_2)} \\ & \times \text{sh}[k(z + h_2)] (A_{x_1} e^{i\psi} + \text{c. c.}) \\ & + f_0 \text{ch}[2k(z + h_2)] (iA^2 e^{2i\psi} + \text{c. c.}), \quad (33) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \zeta_2 &= -\frac{1}{c_1} \varphi_{10r_1} - \frac{(c_1 + c_3 k^2)k}{2c_1 \text{sh}(2kh_2)} |A|^2 \\ & + \frac{1}{2\omega} (iA_{x_1} e^{i\psi} + \text{c. c.}) \\ & - \left(\frac{h_2}{2} - \frac{c_3 k^2}{\omega^2} \right) \text{th}(kh_2) (iA_{x_1} e^{i\psi} + \text{c. c.}) \\ & + f_1 (A^2 e^{2i\psi} + \text{c. c.}), \quad (34) \end{aligned}$$

$$A_{t_1} + c_g A_{x_1} = 0, \quad (35)$$

其中

$$f_0 = \frac{6\omega^3 + 3\omega c_3 k^3 \text{sh}(2kh_2) - 4\omega c_2 \text{sh}^2(kh_2)}{16\text{sh}^2(kh_2) [-2\omega^2 \text{sh}^2(kh_2) + 3k^3 c_3 \text{sh}(2kh_2)]}, \quad (36)$$

$$f_1 = -\frac{1}{c_1 + 4k^2 c_3} \left\{ 2\omega f_0 \text{ch}(2kh_2) + \frac{\omega^2 [1 - 3\text{th}^2(kh_2)]}{8\text{th}^2(kh_2)} - \frac{1}{4} c_2 \right\}. \quad (37)$$

当 $n=3$ 时, 令 $\xi = x_1 - c_g t_1$, 解 (26) — (29) 式得

$$\varphi_{30} = -\frac{1}{2} \varphi_{10x_1x_1} (z^2 + 2h_2 z), \quad (38)$$

$$\varphi_{10\xi} = f_2 |A|^2 + s(\tau), \quad (39)$$

其中, $s(\tau)$ 为积分常数,

$$f_2 = \frac{\left[\omega^4 \text{cth}(kh_2) + c_3^2 k^6 + \frac{1}{2} k^3 \omega^2 c_3 \right] \text{sh}(2kh_2) + \left[\omega^3 + 6c_2 \omega \text{sh}^2(kh_2) - \frac{1}{2} k^3 c_3 \omega \text{sh}(2kh_2) \right] k c_g}{4k\omega \text{sh}^2(kh_2) (c_g^2 - c_1 h_2)}.$$

$$\varphi_{31} = \frac{\omega}{4k \text{sh}(kh_2)} \{ z(z + 2h_2) \text{ch}[k(z + h_2)] iA_{x_1x_1} - 2(z + h_2) \text{sh}[k(z + h_2)] A_{x_2} \}, \quad (40)$$

$$iA_{i_2} + i c_g A_{x_2} + \left[\frac{\omega h_2}{2k \text{th}(kh_2)} + \frac{3c_3 k \text{th}(kh_2)}{2\omega} + \frac{c_3 k^2 h_2}{\omega} - \frac{c_g^2}{2\omega} - c_g h_2 \text{th}(kh_2) \right] A_{\xi\xi} + \left[f_4 - \frac{k \text{th}(kh_2)}{\omega^2} f_3 \right] |A|^2 A + \gamma A = 0, \quad (41)$$

其中, γ 正比于 $s(\tau)$,

$$f_3 = f_0 \left[\frac{-4k\omega^2 \text{ch}^3(kh_2)}{\text{sh}(kh_2)} + 2kc_2 \text{sh}(2kh_2) \right] + f_1 \left[c_2 \omega - \frac{\omega^3}{2\text{sh}^2(kh_2)} - \frac{3c_3 k^3 \omega}{\text{th}(kh_2)} \right] + \left[\frac{c_2 \omega^3}{4c_1 \text{sh}^2(kh_2)} + \frac{3c_3 k^4 \omega}{8} - \frac{\omega^5}{8c_1 \text{sh}^4(kh_2)} - \frac{c_2 k \omega}{4\text{th}(kh_2)} \right] + \frac{k\omega^3 \text{ch}(kh_2)}{16\text{sh}^5(kh_2)} \times [\text{ch}(4kh_2) + 21 - 10\text{ch}^2(kh_2)],$$

$$f_4 = f_2 \left[\frac{c_g k \text{th}(kh_2)}{\omega^2} \left(\frac{c_2 \omega}{c_1} - \frac{\omega^3}{2c_1 \text{sh}^2(kh_2)} \right) - k \right].$$

令

$$\alpha = \frac{c_g^2}{2\omega} + c_g h_2 \text{th}(kh_2) - \frac{\omega h_2}{2k \text{th}(kh_2)} - \frac{3c_3 k \text{th}(kh_2)}{2\omega} - \frac{c_3 k^2 h_2}{\omega}, \quad (42)$$

$$\beta = \frac{k \text{th}(kh_2)}{\omega^2} f_3 - f_4, \quad (43)$$

则 (41) 式化为

$$-i(A_{i_2} + c_g A_{x_2}) + \alpha A_{\xi\xi} + \beta |A|^2 A + \gamma A = 0. \quad (44)$$

令 $\xi_2 = x_2 - c_g t_2, t_2 = \tau$, 并利用 (35), (44) 式化为

$$-iA_\tau + \alpha A_{\xi\xi} + \beta |A|^2 A + \gamma A = 0. \quad (45)$$

(45) 式即为深海两层流体界面内波满足的非线性薛定谔方程.

(45) 式作代换 $A = A' e^{-i\int \gamma(\tau) d\tau}$, 然后略去上标, 得

$$-iA_\tau + \alpha A_{\xi\xi} + \beta |A|^2 A = 0. \quad (46)$$

(46) 式为孤立波标准形式的非线性薛定谔方程. 其中 α, β 分别为频散系数和非线性系数. 它们均与上、下层流体的密度及深度有关.

当 $h_2 \rightarrow \infty$ 时, 有

$$\omega_{h_2 \rightarrow \infty}^2 = (c_1 + c_3 k^2) k, \quad \alpha_{h_2 \rightarrow \infty} = \frac{\omega}{8k^2} + \frac{c_3^2 k^4}{2\omega^2} - \frac{c_3 k}{\omega}, \quad (47)$$

$$\beta_{h_2 \rightarrow \infty} = \frac{\omega k^2}{2} - \frac{c_2 k^2}{4\omega} + \frac{3c_3 k^5}{8\omega} + \frac{k}{4\omega} \frac{(c_2 + \omega^2)(c_2 - 3c_3 k^3)}{c_1 + 4k^2 c_3} - \frac{k\omega(c_2 - 3c_3 k^3)(3c_3 k^3 - 2c_2)}{4(c_1 + 4k^2 c_3)(3k^3 c_3 - \omega^2)} + \frac{k^2(c_2 - \omega^2)(3c_3 k^3 - 2c_2)}{4\omega(3c_3 k^3 - \omega^2)}. \quad (48)$$

图 1 和图 2 为 $h_1 = 200 \text{ m}$ 时频散系数及非线性系数随下层水深的变化图, 由图 1 和图 2 可知, α, β

随着下层水深的增大而变大,且对任意水深 $\alpha > 0, \beta > 0$, 即二者始终保持同号. 随着下层水深的增大, α 与 $\alpha_{h_2 \rightarrow \infty}, \beta$ 与 $\beta_{h_2 \rightarrow \infty}$ 越来越接近. 当 $h_2 \geq 7000$ m 时, $\alpha \approx \alpha_{h_2 \rightarrow \infty}$, 可以看作是无限水深时的频散系数. 当 $h_2 \geq 4000$ m 时, $\beta \approx \beta_{h_2 \rightarrow \infty}$, 可以看作是无限水深时的非线性系数. 由此可知, 当 $h_2 \geq 7000$ m 时, (46) 式可以完全退化为无限水深时的情况, 这时可以用无限水深模型近似.

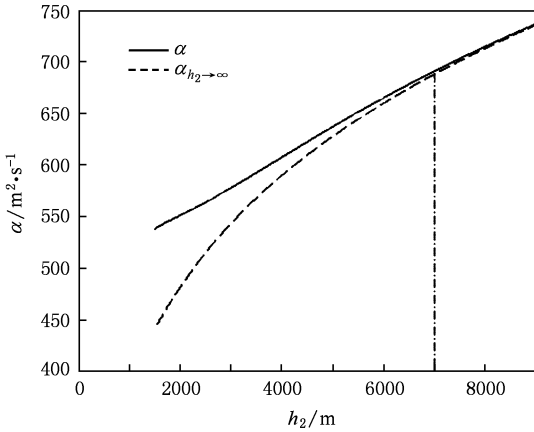


图 1 频散系数随下层水深的变化 $h_1 = 200$ m

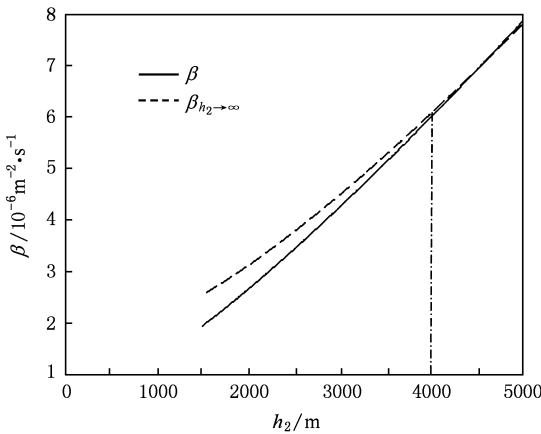


图 2 非线性系数随下层水深的变化 $h_1 = 200$ m

4. 非线性薛定谔方程的孤子解

因为在 h_2 为任意值时, $\alpha\beta > 0$, 令

$$A = B \exp[i\gamma(\xi - V\tau)], \quad (49)$$

其中 $B = B(\xi - c\tau)$, γ 为任选常数, 代入(46)式得

$$\begin{aligned} \alpha B_{\xi\xi} + i(c + 2\alpha\gamma)B_{\xi} \\ - (\gamma V + \alpha\gamma^2)B + \beta B^3 = 0. \end{aligned} \quad (50)$$

令(50)式中虚部为零, 有

$$\gamma = -\frac{c}{2\alpha}. \quad (51)$$

于是

$$\alpha B_{\xi\xi} + \beta B^3 + \frac{c}{2\alpha} \left(V - \frac{c}{2} \right) B = 0. \quad (52)$$

(52) 式乘以 B_{ξ} , 并积分, 再乘以 $E = B^2$, 整理后得

$$(E_{\xi})^2 = \frac{2\beta}{\alpha} E^2 (E_{\max} - E), \quad (53)$$

其中

$$E_{\max} = \frac{c(c - 2V)}{2\alpha\beta}. \quad (54)$$

对(54)式积分, 可得

$$E = E_{\max} \operatorname{sech}^2 \sqrt{\frac{\beta E_{\max}}{2\alpha}} (\xi - c\tau). \quad (55)$$

令 $E_{\max} = A_0^2$, 由(49)式并利用(51), (54)式, 可得此情况下的非线性薛定谔方程的孤子解

$$\begin{aligned} A = A_0 \operatorname{sech} \left[\sqrt{\frac{\beta}{2\alpha}} A_0 (\xi - c\tau) \right] \\ \times \exp \left\{ -i \left[\frac{c}{2\alpha} \xi - \left(\frac{c^2}{4\alpha} - \frac{\beta A_0^2}{2} \right) \tau \right] \right\}. \end{aligned} \quad (56)$$

在影响内波传播的因素中, 非线性和频散性最为重要. 非线性使波在其演化过程中变得越来越陡, 而频散恰恰相反, 使波面坡度变平. 在非线性薛定谔方程(46)式中, 无论 h_2 多大, α, β 都同号, 能够得到孤子解. 因此, 当频散和非线性平衡时, 可以保持孤子长距离传播.

5. 深海内孤立波传播的数值模拟

采用本文建立的非线性薛定谔方程及推导出的孤子解, 模拟了深海内孤立波的传播.

初始条件为

$$A = A_0 \operatorname{sech} \left(\sqrt{\frac{\beta}{2\alpha}} A_0 \xi \right),$$

各参数取值如下: $A_0 = 30$ m, $h_1 = 200$ m, $h_2 = 2400$ m, $\rho_1 = 1020.0$ kg/m³, $\rho_2 = 1023.6$ kg/m³.

由图 3 可以看出, 内孤立波保持形状传播一段距离后, 由于频散和非线性的作用, 有波幅减小, 波面坡度变平的趋势, 表明频散效应起主要作用.

6. 结 论

本文考虑深海无旋、无黏、不可压缩两层流体中

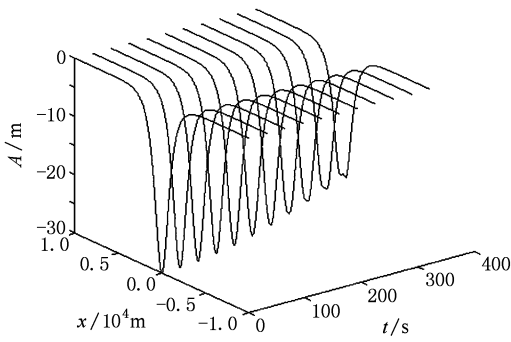


图3 深海中内孤立波的传播

的界面内波,得出以下结论:

1) 引入速度标量势后,用速度标量势表示两层流体界面内波的流体力学基本方程组.在此基础上,在深海弱非线性条件下,采用多重尺度法推导

出了非线性薛定谔方程.

2) 讨论了非线性薛定谔方程的系数,频散系数和非线性系数随着水深的增大而增大,且始终保持同号.当 $h_2 \rightarrow \infty$ 时,对 α, β 进行了化简,得出无限深海情况下的非线性薛定谔方程,并作图得出下层水深 $h_2 \geq 7000$ m 时可近似为无限水深时的情况.

3) 由于频散系数和非线性系数同号,非线性薛定谔方程存在孤子解,且模拟了深海内孤立波传播,若频散和非线性平衡,则内孤立波可以保持原有形状长距离传播.

总之,本文建立了描述深海内波传播的非线性薛定谔方程,可用于研究深海内波的现象,探索深海内波传播特性及其形成机理,从而揭示深海内波的奥秘,为掌握深海内波的特性提供了理论依据.

- [1] Zakharov V E 1968 *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* **2** 190
- [2] Benney D J, Roskes G J 1969 *Studies Appl. Math.* **48** 377
- [3] Hashimoto H, Ono H 1972 *J. Phys. Soc. Jpn.* **33** 805
- [4] Zakharov V E, Shabat A B 1972 *Sov. Phys. JETP* **34** 62
- [5] Scott A C, Chu F Y F, Melaughli D W 1973 *Proc. IEEE* **61** 1443
- [6] Satsuma J, Yajima N 1974 *Suppl. Prog. Theor. Phys.* **55** 284
- [7] Wang J, Shi Y M 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 2820 (in Chinese) [王晶、时延梅 2006 物理学报 **55** 2820]
- [8] Tan Z W, Ning T G, Liu Y, Chen Y, Cao J H, Dong X W, Ma L N, Jian S S 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 2799 (in Chinese) [谭中伟、宁提纲、刘艳、陈勇、曹继红、董小伟、马丽娜、简水生 2006 物理学报 **55** 2799]
- [9] Song J B 2006 *Chin. Phys.* **15** 2796
- [10] Yang H L, Song J B, Yang L G, Liu Y J 2007 *Chin. Phys.* **16** 3589
- [11] Pang J, Chen X G, Song J B 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 4733 (in Chinese) [庞晶、陈小刚、宋金宝 2007 物理学报 **56** 4733]
- [12] Chen X G, Guo Z P, Song J B, He X D, Gao J M, Bao S H, Cui W 2009 *Chin. Phys. B* **18** 1906
- [13] Benjamin T B 1967 *J. Fluid Mech.* **29** 559
- [14] Ono H 1975 *J. Phys. Soc. Jpn.* **39** 1082
- [15] Kubota T, Ko D R S, Dobbs L D 1978 *AIAA Journal of Hydraulics* **12** 157
- [16] Choi W, Camassa R 1999 *J. Fluid Mech.* **396** 1
- [17] Zhang Y J 1991 *Encyclopedia of Fluid Mechanics* (Beijing: University of Aeronautics and Astronautics Press) p21 (in Chinese) [张远君 1991 流体力学大全 (北京:航空航天大学出版社) 第21页]
- [18] Fang X H, Du T 2005 *Fundamentals of Oceanic Internal Waves and Internal Waves in the China Seas* (Qingdao: Ocean University of China Press) p11 (in Chinese) [方欣华、杜涛 2005 海洋内波基础和中国海内波 (青岛:中国海洋大学出版社) 第11页]
- [19] Mei Q Z 1984 *Water Wave Dynamics* (Beijing: Science Press) p331 (in Chinese) [梅强中 1984 水波动力学 (北京:科学出版社) 第331页]
- [20] Ni W S, Wei R J 1997 *Solitary Wave in Water Trough* (Shanghai: Scientific and Technological Education Press) p1 (in Chinese) [倪皖荪、魏荣爵 1997 水槽中的孤波 (上海:科技教育出版社) 第1页]
- [21] Boyd J P 1983 *J. Phys. Oceanogr.* **13** 428

Nonlinear Schrödinger equation for internal waves in deep sea^{*}

Song Shi-Yan¹⁾ Wang Jing¹⁾ Meng Jun-Min^{2)†} Wang Jian-Bu²⁾ Hu Pei-Xin¹⁾

1) (*College of Information Science and Engineering, Ocean University of China, Qingdao 266100, China*)

2) (*First Institute of Oceanography, State Oceanic Administration, Qingdao 266061, China*)

(Received 5 May 2009; revised manuscript received 2 June 2009)

Abstract

Considering two-layer fluid bounded by the thermocline, under the condition of weak nonlinearity, based on the dynamic equations of two-layer fluid, the nonlinear Schrödinger equation for internal waves in deep sea is obtained by adopting hierarchical method. The coefficients of dispersion and nonlinearity are analysed, the soliton solution of the nonlinear Schrödinger equation is obtained, and the exactitude of the theory is demonstrated by a numerical experiment.

Keywords: internal waves in deep sea, nonlinear Schrödinger equation, weak nonlinearity, hierarchical method

PACC: 4735, 4710, 0340G

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 60702077) and the Special Fundamental Scientific Research Funds of Operating Expenses of the First Institute of Oceanography, State Oceanic Administration, China (Grant No. GY02-2008G42).

[†] Corresponding author. E-mail: mengjm@fio.org.cn