

# 如何实现宏观量子单摆\*

宁博元<sup>1)</sup> 马军山<sup>1)</sup> 庄 军<sup>2)</sup> 宁西京<sup>3)4)†</sup>

1)(上海理工大学光电信息与计算机工程学院, 上海 200093)

2)(复旦大学光科学与工程系, 上海 200433)

3)(复旦大学现代物理研究所, 上海 200433)

4)(教育部应用离子束物理重点实验室)

(2009 年 5 月 26 日收到; 2009 年 7 月 7 日收到修改稿)

利用等效质心方法描写单摆运动, 经典力学通过牛顿方程得到摆球在空间做周期振动, 而量子力学却给出完全不同的结论: 摆球做无“周期”的随机运动. 本文分析了量子力学等效质心模型成立的条件, 在此基础上计算了经典单摆过渡至量子单摆的实验条件, 表明在目前的实验水平上观察宏观摆球(微米量级)的空间量子跃迁行为是简便易行的.

**关键词:** 宏观量子单摆, 空间量子跃迁, 波函数统计诠释

**PACC:** 0365, 3640, 6146

## 1. 引 言

在经典力学中, 质量为  $m$  的单摆小球因受到简谐势  $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$  作用而做周期振动, 而按照通常的量子力学处理方法, 这一小球的运动状态对应于哈密顿量  $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$  的某一本征态  $\psi_n(x)$ . 虽然随着量子数  $n$  的增大, 摆球在空间的概率分布  $|\psi_n(x)|^2$  不断趋近于经典力学给出的概率分布<sup>[1]</sup>, 但是按照量子力学预测, 摆球只能在空间随机地“跳来跳去”, 仅当把无数次这样的随机“跳动”结果做系综平均后才能与  $|\psi_n(x)|^2$  分布相符合. 毫无疑问, 自从伽利略教堂观吊灯以来的四百年中, 所有的单摆实验都否定量子力学的这一结果. 那么, 是什么原因导致了这一错误? 量子力学预言的随机跳动的单摆——量子单摆能否在宏观尺度上实现?

如果能够在宏观水平上实现量子单摆将具有重要的科学意义. 按照量子力学, 处于能量本征态  $\psi_n(x)$  的摆球, 其空间位置不可能保持不变, 但量子力学却没有给出摆球空间坐标  $r$  随时间的变化规

律. 用奥本海默的话说: “如果有人问你电子的位置是否保持不变, 你必须回答‘不’; 如果再问你它的位置是否随时间变化, 你还必须回答‘不’<sup>[2]</sup>.” 也就是说, 粒子空间位置的改变是一量子跃迁过程, 即没有时间间隔的瞬态过程. 如果所涉及的粒子是电子, 这种“超时”量子跃迁是司空见惯的, 例如, 原子分子中电子的跃迁, 金属表面的光电子发射等. 不幸的是, 电子线径太小, 无法直接观测, 因此人们不能直接“体验”空间量子跃迁. 如果量子单摆中的摆球具有大到亚微米的线径, 其空间跳跃范围也达到数百微米, 则利用目前的微探针技术就可直接观测空间量子跃迁.

近年来, 有关介观粒子空间运动量子效应的工作已有一些报道<sup>[3-11]</sup>, 但都尚未涉及量子单摆效应. 本文分析了在等效质心近似下量子力学不能描述宏观单摆周期运动的原因, 找到了服从量子力学运动规律的单摆条件, 具体计算表明当轻质摆长具有微米量级, 线径在 20 nm 以下的摆球便不再做周期振动而表现出随机的空间量子跃迁行为. 由于摆球运动被限制于有限范围, 故可被重复观测. 又因为摆球的经典速度很低 ( $\sim$  m/s), 一旦空间量子跃迁出现便会表现出与经典单摆十分不同的行为, 这

\* 国家自然科学基金(批准号:10574030)资助的课题.

† 通讯联系人. E-mail: xjning@fudan.edu.cn

将使人们直接检验波函数的统计诠释.

## 2. 质心运动问题

在经典力学中,可将一刚性球的运动处理为其质心运动. 因此质量为  $m$ 、半径为  $r$  的单摆小球运动可被描写为其质心的一维(沿  $x$  轴)运动,即

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -m\omega^2 x, \quad (1)$$

由此得出的运动为周期运动,并与实验观测完全符合.

在量子力学中如果采用类似的等效质心方法,则因为 Hamiltonian 算符  $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$  不含时,摆球的运动便归结为定态问题,由此得出对应于本征能量  $E_n = (\frac{1}{2} + n)\hbar\omega$  的本征态为

$$\psi_n(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} (2^n n!)^{-1/2} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right),$$

$$n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots \quad (2)$$

其中,  $H_n(\xi)$  为 Hermite 多项式. 摆球质心的空间分布概率为

$$P_n(x) = |\psi_n(x)|^2. \quad (3)$$

虽然随着量子数  $n$  的增大,由(3)式所给出的概率分布曲线逐渐接近于(1)式所确定的概率分布曲线(图 1),但无论如何摆球都不可能表现出周期振荡行为;不仅如此,按照量子力学的基本诠释,摆球可以从  $x_1$  点突然“跃迁”至  $x_2$  点而无需时间(图 2). 显然,这一量子力学预言与经典力学结果是完全不相容的.

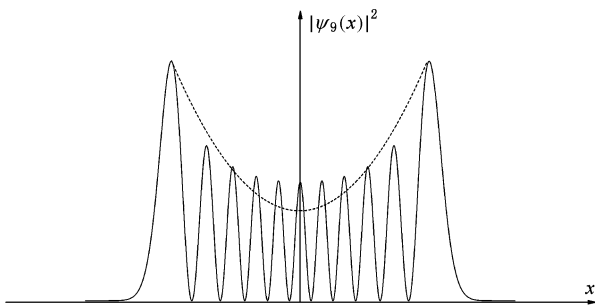


图 1 摆球第九激发态的波函数概率分布曲线与经典力学摆球空间概率分布曲线的比较(图中实线为  $P_9(x)$  曲线,虚线为经典力学计算曲线)

如果摆球的确是一个有质量而无体积的质点,我们当然更相信量子力学的预言. 然而,实际的摆

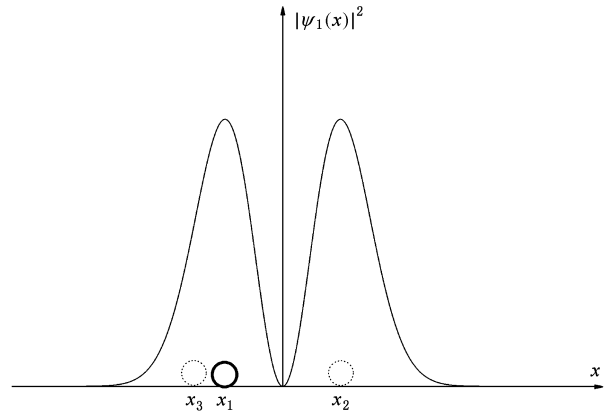


图 2 按照量子力学基本诠释,处于  $x_1$  点的摆球在下一时刻可能出现在  $x_2$  或  $x_3$  处,而这一空间“跃迁”无需时间

球并非是理想质点. 对于半径为  $r$  的摆球,它是由若干质点(电子与原子核)组成的体系,其量子力学时间演化由下式的 Hamiltonian 算符确定:

$$\hat{H} = \sum_i \left( \frac{\hat{p}_i^2}{2m_i} + \frac{1}{2}m_i\omega^2 x_i^2 \right) + \sum_{ij} \hat{H}_{ij}(r_i, r_j, t) + \dots \quad (4)$$

显然,由于(4)式的复杂性,我们无法由此得到等效质心运动对应的 Hamiltonian 算符,也就是说严格来讲,摆球运动不处于(2)式所示的量子定态.

从另一观点来看,虽然 Schrödinger 方程和 Dirac 方程的描写对象均为质点,但并非不能将复合粒子等效为质点进行描写. 例如,由于中子和质子都具有内部结构,但在处理其干涉衍射行为时,却可以将它们视为质点而应用量子波动方程(Schrödinger 或 Dirac 方程)得出正确的结果;同样,在利用上述波动方程处理很多问题中,普遍将电子处理为理想质点,但到目前为止人们尚未证实电子的确是理想质点,只是在实验上确定其线径不大于  $10^{-17}$  m. 由此可见,量子力学体系中应存在一定的条件,满足此条件的非质点系统可以被质点方程描写.

根据量子力学关于测量的不确定性关系可知,测量空间位置的不确定范围  $\Delta x \geq \frac{\hbar}{p}$  (DeBroglie 波长  $\lambda$ ),对于动量  $p$  很大的宏观粒子,  $\Delta x$  趋于零,故可用经典力学描写其运动,但随着粒子的动量不断减小,位置测量的不确定范围越来越大,我们便不得不应用量子力学描写其运动. 显然 DeBroglie 波长是一个简单的判据. 由于摆球动量  $p$  是  $x$  的函数,故我们研究摆球位于势能最低点( $x = 0$ )时,最大动

量值  $p_{\max}$  所对应的 DeBroglie 波长. 根据

$$\frac{p_{\max}^2}{2m} = \left( n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega, \quad (5)$$

可得

$$\lambda = \sqrt{\frac{\hbar}{(2n + 1)m}} \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (6)$$

对于摆长  $l$  约为 1 m 的摆球, 取  $n = 5$ , 若摆球为电子 (质点), 则 DeBroglie 波长约为 1 mm, 这远大于电子线径 ( $< 10^{-17}$  m), 表明必须应用量子力学来处理此时电子的运动问题; 若摆球是以 Ag 为材质的宏观小球 (线径  $d$  约  $10^{-8}$  m), 质量约为  $10^{-20}$  kg, 由 (6) 式可得其 DeBroglie 波长约为 10 nm, 与其线径为同一数量级, 则这时摆球的运动不能用量子力学波动方程在等效质心近似下来处理. 如果这时的摆长  $l = 1$  m, 摆球 DeBroglie 波长  $\lambda$  及线径  $d$  随摆球质量变化的趋势如图 3 所示. 由此图可见, 只有当摆球的质量  $m \leq 3 \times 10^{-21}$  kg 时, 利用等效质心法的量子力学波动方程才能正确地描述摆球的空间运动.

根据上述理论分析, 若将单原子碳链悬挂起来作为复摆, 其下端原子链的线径远小于相应的 DeBroglie 波长, 因此整个单碳链只能做随机的量子运动, 而无任何周期可言. 巧合的是, 这一推论与乌克兰科学家最近的实验观测相符合. 虽然乌克兰科学家并未做相关的理论分析, 但他们利用场离子显微镜的确观测到了单碳链的空间概率分布行为<sup>[4]</sup>.

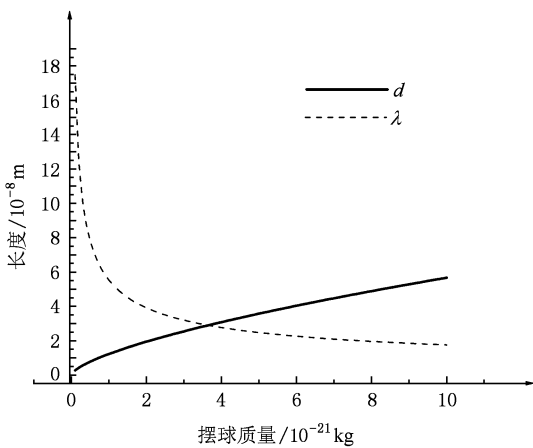


图 3 当摆长为 1 m 时, 摆球的 DeBroglie 波长  $\lambda$  及线径  $d$  随着摆球质量增加的变化趋势

由 (2) 式得出的摆球概率幅由一系列线径不同的“波包”组成 (图 4), 其宽度  $d_{wp}$  对应着摆球的 DeBroglie 波长. 显然只要  $d_{wp}$  远大于摆球线径  $d_{obj}$ , 使得“波包”能够充分“包住”摆球 (图 5), 即满足

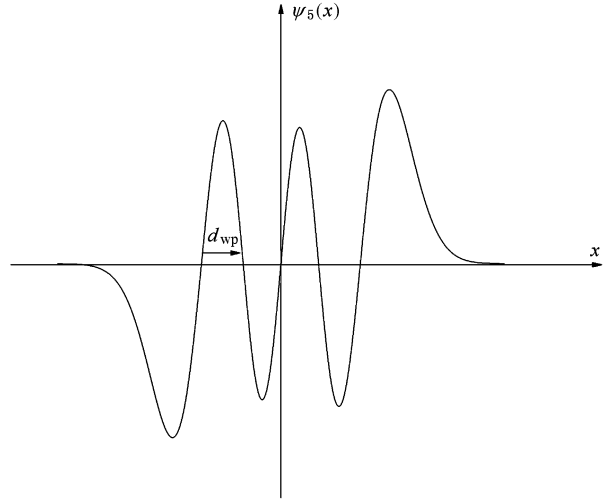


图 4 单摆小球第五能级波函数概率幅. 摆球的概率幅即为摆球的 DeBroglie 波长, 它由一系列线径不同的“波包”组成, 摆球的 DeBroglie 波长  $\lambda$  为其概率幅的最小“波包”线宽  $d_{wp}$

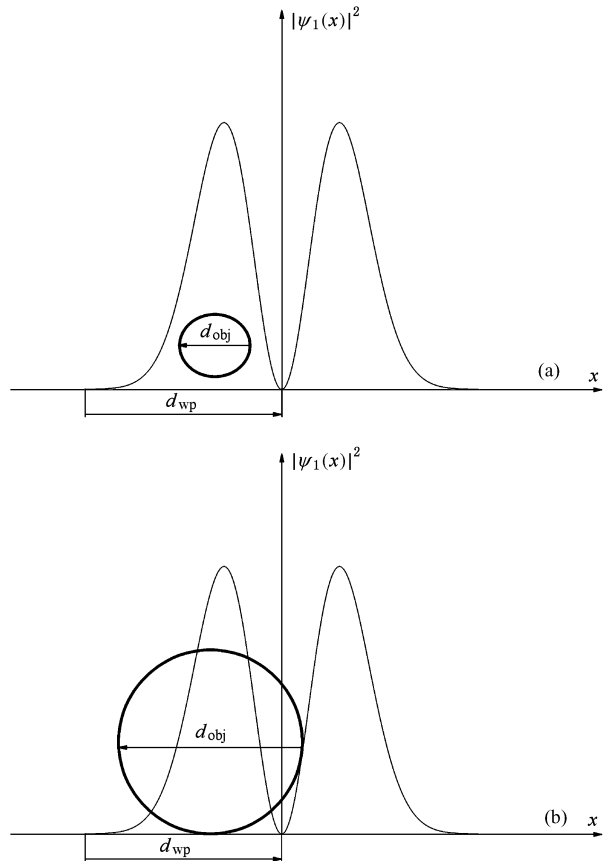


图 5 (a) 当质心波函数概率分布曲线“包住”宏观体积物体时, 量子力学可利用等效质心方法描述宏观物体的空间运动; (b) 当概率分布曲线不能“包住”物体时, 利用等效质心近似的量子力学波动方程不能正确描述宏观物体的空间运动

条件

$$d_{wp} \gg d_{obj}, \quad (7)$$

摆球便应表现出随机的量子跃迁行为,而无任何周期可言。

### 3. 量子单摆的实现

根据上一节的理论分析,我们考察了在真空系统中实现纳米至微米尺度上量子单摆的实验条件.由(6)式及图3可得出,在摆长 $l$ 一定的情况下,只要摆球的质量小于一个临界值,它便做无周期的量

子跃迁而似乎与摆长再无关系.但为了能够在实验中观察到经典单摆向量子单摆的过渡,摆线的总质量应远小于摆球的质量;由于近来已经从理论和实验上证明单原子碳链能够稳定存在<sup>[12]</sup>,因此我们选择单原子碳链作为单摆的摆线.由(2)式可知,随着量子数 $n$ 的增大,摆球波函数概率曲线的“波包”线径逐渐减小,故摆球线径也应随之减小才能保证出现量子效应,所以不能期望在 $n$ 趋于无限大的量子态观察到量子效应.在我们的设计中选取了 $n = 5$ 的量子态概率分布曲线,表1是当摆球以C作为材质时,满足量子效应的摆球临界尺寸.

表1 以C为材质的摆球能够出现量子效应的临界半径.实验中摆球半径大于临界半径值时,摆球做经典周期运动;  
当摆球半径远小于临界半径值时,摆球做“无周期”的“超时”量子空间运动

摆线长/ $\text{\AA}$	摆线质量/ $10^{-21} \text{ kg}$	最小波包半宽/ $\text{\AA}$	摆幅/ $\text{\AA}$	摆球质量/ $10^{-21} \text{ kg}$	临界摆球半径/ $\text{\AA}$	周期/s	摆角/ $(^\circ)$
$5 \times 10^8$	3533	144	1237	8.18	142	0.44	$1.42 \times 10^{-4}$
$1 \times 10^8$	706	122	1059	5.06	121	0.20	$6.07 \times 10^{-4}$
$5 \times 10^7$	353	114	990	4.13	113	0.14	$1.13 \times 10^{-3}$
$1 \times 10^7$	70.7	97	851	2.53	96	$6.34 \times 10^{-2}$	$4.91 \times 10^{-3}$
$5 \times 10^6$	35.3	91	791	2.08	90	$4.48 \times 10^{-2}$	$9.06 \times 10^{-3}$
$1 \times 10^6$	7.06	78	686	1.25	76	$2.00 \times 10^{-2}$	$3.93 \times 10^{-2}$
$5 \times 10^5$	3.53	72	641	1.02	71	$1.41 \times 10^{-2}$	$7.43 \times 10^{-2}$
$1 \times 10^5$	$7.06 \times 10^{-1}$	62	542	$6.49 \times 10^{-1}$	61	$6.34 \times 10^{-3}$	0.31
$5 \times 10^4$	$3.53 \times 10^{-1}$	58	519	$5.02 \times 10^{-1}$	56	$4.48 \times 10^{-3}$	0.59
$1 \times 10^4$	$7.06 \times 10^{-2}$	49	440	$3.16 \times 10^{-1}$	48	$2.00 \times 10^{-3}$	2.52
$5 \times 10^3$	$3.53 \times 10^{-2}$	46	409	$2.06 \times 10^{-1}$	45	$1.41 \times 10^{-3}$	4.68
$1 \times 10^3$	$7.06 \times 10^{-3}$	39	355	$1.56 \times 10^{-1}$	38	$6.34 \times 10^{-4}$	20.34

从表1的计算结果可以看出,在实验中直接观测单摆从经典到量子的过渡是相当困难的.为了能够实现经典周期单摆,摆线不能过长,否则摆线质量将大于摆球质量.例如表1中当摆线长为 $10 \mu\text{m}$ — $5 \text{ cm}$ 时,摆线的质量都不小于C球质量,则不符合经典单摆的条件;同样,摆线长度不能过短,否则摆角会大于 $5^\circ$ ,例如表1中当摆长处于 $10^3$ — $5 \times 10^3 \text{\AA}$ 的范围内时,摆角均大于 $5^\circ$ .

表1的结果还说明,在目前的实验水平上,如果

仅仅以观测空间量子跃迁为目标而不顾及是否满足经典单摆条件,那么相应的实验观测就容易多了.表1中第一行的数据表明,当摆长(单原子碳链)为 $5 \text{ cm}$ 时,线径为 $10 \text{ nm}$ 的碳球便应表现出空间量子跃迁行为.这时,我们可以利用微探针技术直接观测摆球的运动是否符合量子力学所预言的无“周期”的“超时”效应.如果选用密度更大的材料为摆球,则更容易观察到它的量子行为.在表2中我们分别给出了Ag和Pt球出现量子效应的临界值.

表2 (a)(b)分别以Ag和Pt为材质的摆球介于经典效应和量子效应的临界线径值.在相同摆长情况下,摆球线径大于临界值时单摆空间运动为经典“周期”振动;摆球线径小于临界值时,将会出现量子单摆无“周期”的“超时”空间运动

(a)

摆线长度/ $\text{\AA}$	摆球质量/ $10^{-21} \text{ kg}$	摆球临界半径/ $\text{\AA}$	摆幅/ $\text{\AA}$	周期/ $10^{-3} \text{ s}$	摆角/ $(^\circ)$
$1 \times 10^5$	1.18	45	417	6.34	0.24
$7 \times 10^4$	$9.75 \times 10^{-1}$	43	409	5.31	0.33
$5 \times 10^4$	$9.09 \times 10^{-1}$	42	390	4.48	0.45

(b)

摆线长度/ $\text{\AA}$	摆球质量/ $10^{-21}\text{ kg}$	摆球临界半径/ $\text{\AA}$	摆幅/ $\text{\AA}$	周期/ $10^{-3}\text{ s}$	摆角/ $(^\circ)$
$1 \times 10^5$	1.21	44	401	6.34	0.23
$7 \times 10^4$	1.05	42	393	5.31	0.32
$5 \times 10^4$	$9.14 \times 10^{-1}$	40	389	4.48	0.45

从表 2 的数据中我们看出,若单碳链摆长为  $10^5 \text{\AA}$  时,Ag 摆球半径大于  $45 \text{\AA}$ ,则摆球将表现为经典“周期”振动,其周期为  $6.34 \text{ ms}$ ;而当 Ag 摆球半径小于  $45 \text{\AA}$  时,单摆表现出量子力学预言的无“周期”的“超时”运动。

#### 4. 总 结

在利用量子力学波动方程(Schrödinger 方程或 Dirac 方程)描述宏观单摆问题时,体系 Hamiltonian 在原则上应为物体各个粒子(电子、原子核等)

Hamiltonian 之和,即  $\hat{H} = \sum_i \left( \frac{\hat{p}_i^2}{2m_i} + \frac{1}{2}m_i\omega^2 x_i^2 \right) +$

$\sum_{ij} \hat{H}_{ij}(r_i, r_j, t) + \dots$ . 由于该算符太复杂,人们通常用摆球质心 Hamiltonian 做近似处理. 然而这种方法成立的条件是摆球的 DeBroglie 波长远大于摆球线径. 对于单摆运动,该条件相当于概率幅的“波包”线径大于摆球的线径. 以此为条件,我们的计算表明以轻质链(如单原子碳链)悬挂的 C, Ag 或 Pt 纳米摆球能够表现出无“周期”的“超时”量子跃迁效应.

作者衷心感谢李郁芬、王炎森、承焕生、赵利教授,在最困难的时候,他们最有力地支持鼓励本工作.

- [1] Zhang Y D 2002 *Quantum Mechanics* (Beijing: Science Press) p65—69 (in Chinese) [张永德 2002 量子力学(北京:科学出版社)第 65—69 页]
- [2] Art Hobson 2001 *Physics: Concepts And Connections* (Shanghai Scientific and Technical Publishers) p372 (in Chinese) [阿特·霍布森(秦克诚、刘培森、周国荣译) 2001 物理学基本概念及其与方方面面的联系(上海科学技术出版社)第 372 页]
- [3] Olaf N, Markus A, Anton Z 2003 *Am. J. Phys.* **71** 319
- [4] Tatjana I M, Igor M M, Vjacheslav A K, Evgenij V S 2009 *Nano. Lett.* **9** 774
- [5] Zhong W D, Cheng H Y, Liu Z X, Wu J H, Li G Z 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 204 (in Chinese) [钟文定、陈海英、刘尊孝、吴

建华、李国忠 1999 物理学报 **48** 204]

- [6] Bendkowsky V, Butscher B, Nipper J, Shaffer J, Low J 2009 *Nature* **458** 1005
- [7] Mu A X, Zhou X Y, Xue J K 2008 *Chin. Phys. B* **17** 764
- [8] Xiong B, Liu X X 2007 *Chin. Phys.* **16** 2578
- [9] Ota K, Hamada K, Takemura R, Ohmaki M, Machi T 2009 *Phys. Rev. B* **79** 134505
- [10] Ovchinnikov Y N, Barone A, Varlamov A A 2007 *Phys. Rev. Lett.* **99** 037004
- [11] Brezinski M E, Liu B 2008 *Phys. Rev. A* **78** 063824
- [12] Wang Y, Ning X J, Lin Z Z, Li P, Zhuang J 2007 *Phys. Rev. B* **76** 165423

# Realization of quantum single pendulum on macroscopic level<sup>\*</sup>

Ning Bo-Yuan<sup>1)</sup> Ma Jun-Shan<sup>1)</sup> Zhuang Jun<sup>2)</sup> Ning Xi-Jing<sup>3)4)†</sup>

1) (*School of Optical-Electronic Information and Computer Engineering, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China*)

2) (*Department of Optical Science and Engineering, Fudan University, Shanghai 200433, China*)

3) (*Institute of Modern Physics, Fudan University, Shanghai 200433, China*)

4) (*Applied Ion Beam Physics Laboratory, Key Laboratory of the Ministry of Education, China*)

(Received 26 May 2009; revised manuscript received 7 July 2009)

## Abstract

Dealing with the motion of single pendulum, classical mechanics shows, by the effective center of mass method, that the pendulum ball performs periodical spatial movement. However, using the same method, quantum mechanics presents a totally different answer: the pendulum ball moves randomly in space without a definite period. We provide the criteria conditions for the two different predictions, and propose the experimental conditions for the ball to obey quantum mechanics. Our results show that it is quite easy with current experimental apparatus to observe the spatial quantum transition of a macroscopic objects of the micrometer-seale.

**Keywords:** macroscopic quantum single pendulum, spatial quantum transition, statistical explanation of wave function

**PACC:** 0365, 3640, 6146

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10574030).

† Corresponding author; E-mail: xjning@fudan.edu.cn