

分数阶 FitzHugh-Nagumo 模型神经元的动力学特性及其同步^{*}

刘 勇 谢 勇[†]

(西安交通大学航天航空学院强度与振动教育部重点实验室, 西安 710049)

(2009 年 5 月 10 日收到; 2009 年 6 月 2 日收到修改稿)

通过对分数阶 FitzHugh-Nagumo 模型神经元的研究, 当外加电流强度作为分岔参数时, 发现这种模型神经元从静息态到周期放电态所经历的 Hopf 分岔点不同于相应的整数阶模型神经元的分岔点; 而且分数阶 FitzHugh-Nagumo 模型神经元呈现周期放电的外加电流强度的范围比相应的整数阶模型神经元的范围小, 然而放电频率却比相应的整数阶模型神经元的放电频率高. 同时还揭示在周期放电的情况下分数阶 FitzHugh-Nagumo 模型神经元之间的同步速率比相应的整数阶模型神经元之间的同步速率快. 在数值模拟分数阶微分方程时, 采用了精度高、速度快的 Adomian 分解算法.

关键词: 分数阶, Hopf 分岔, FitzHugh-Nagumo 模型, 同步

PACC: 8730, 0547, 8728

1. 引 言

分数阶微积分 (fractional calculus) 与整数阶微积分几乎同时产生, 作为一门重要的纯数学分支, 已经渐成体系. 由于分数阶微积分本身的复杂性, 使得对其概念的理解比较困难, 从而导致在实际应用中存在着一定的障碍^[1]; 因此在过去很长一段时间内分数阶微积分理论一直没有受到人们的重视. 然而近三十年来这一理论得到了相当的关注, 比如在黏弹性材料^[2-5]、电气化学过程^[6]、电介质极化现象^[7]、色噪声^[8]、不规则扩散、信号处理^[9]、控制理论^[10]、自然界中多孔或裂隙介质中溶质的反应和扩散^[11,12] 以及混沌^[13] 等现象的描述中得到了诸多应用^[14]. 分数阶微积分一个明显的特征是具有记忆性, 特别适合于刻画具有记忆和遗传性质的材料和过程, 然而这些性质在经典模型中通常被忽略^[15].

英国生理学家 Hodgkin 和 Huxley 上世纪 50 年代在生物神经电传导方面作了深入而富有成效的实验与理论研究, 并建立了著名的 Hodgkin-Huxley (HH) 模型^[16], 从而可以利用动力学的知识来研究神经元的放电特性及同步性质^[17-19], 而且在信号处

理中也得到了应用^[20]. 但是文献[21]给出了 HH 型神经元放电的一个独特的性质, 而这种独特的性质用传统的 HH 型模型却无法解释. 文献[22]指出, 将眼球周转率转化为眼睛位置命令的眼球运动综合器是分数阶的, 其阶数小于 1, 而周转率指令的阶数是 1 或大于 1, 因而运动神经元的净输出可以描述为眼睛位置命令的分数阶微分, 这种运动神经元的分数阶微分动力学能弥补整数阶微分动力学的不足. 文献[23]指出, 神经系统能适应外界刺激的变化, 在老鼠的锥体皮层神经中, 这种适应的时间尺度取决于外界刺激的变化尺度, 并且这种多尺度的适应与分数阶微分是一致的, 即神经的触发率是慢变刺激参数的分数阶微分. 因此分数阶微分为锥体皮层神经元对外界持续变化刺激的反应提供了一个总体的模型. 因此分数阶微积分在描述某些类型的神经元时有其自身的优势, 通常更能真实地刻画这些神经元的某些特性, 很有必要对分数阶模型神经元放电的动力学特性进行研究. 文献[24]利用分数阶的 FitzHugh-Nagumo (FHN) 模型对分数阶模型的稳定性进行了研究.

分岔是神经元放电的内在动力学机理, 根据放电频率与外加电流的依赖关系可将神经元兴奋性分

* 国家自然科学基金 (批准号: 10502039, 10602041) 资助的课题.

[†] 通讯联系人. E-mail: yxie@mail.xjtu.edu.cn

为第一类和第二类兴奋性^[25]. 通过分岔控制, 还可以把第一类兴奋性转化为第二类兴奋性^[26]. 如果神经元从静息态到周期放电态经历不变圆上鞍结分岔 (saddle-node bifurcation on invariant circle), 其兴奋性属于第一类兴奋性; 如果经历 Hopf 分岔, 则属于第二类兴奋性. 已有研究表明神经元之间的信息传递与神经元之间的同步现象密切相关^[27], 同时神经元集群中同步放电被广泛认为是疾病发作的征兆^[28], 对认识某些精神失调类疾病的起源有着重要意义. 目前神经元同步是神经动力学研究的一个中心问题. 神经元之间的耦合方式有电突触耦合和化学突触耦合两种. 以前认为化学突触耦合的作用是最主要和最重要的^[29], 现在发现电突触耦合的作用也是至关重要的^[30]. 对整数阶模型神经元的放电特性及其同步特征已经有了相当的研究^[31-33], 而对分数阶模型神经元相应的研究还鲜有报道. 本文对分数阶 FHN 模型神经元的动力学特性和电突触耦合分数阶 FHN 模型神经元之间的同步性质进行探索, 具体安排如下: 第二部分简要介绍分数阶微分的一些知识, 第三部分研究分数阶 FHN 模型神经元的分岔行为, 第四部分考察分数阶 FHN 模型神经元的放电频率, 第五部分对两个分数阶 FHN 模型神经元之间的同步速率进行分析.

2. 分数阶微分

2.1. 分数阶微分的定义

分数阶微积分通常有两种定义, 即 Riemann-Liouville (R-L) 定义和 Caputo 定义^[10], 由于 R-L 定义在数学上是严格的, 有对经典微积分推广的完美性, 所以在有关分数阶微积分理论的研究中被广泛应用, 虽然 Caputo 定义没有这种性质, 但是它要求的初始条件有明确的物理意义, 所以在工程中广泛应用的是 Caputo 定义^[15]. 本文采用的是 Caputo 定义.

定义 1 一元函数 $f(t)$ 的 q 阶微分定义为^[34]

$${}_a D_t^q f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-q)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(x)}{(t-x)^{q+1-n}} dx, \quad (n-1 < q < n), \quad (1)$$

其中, a, t 分别为积分的下限和上限, q 为微分次数, $\Gamma(n-q)$ 为 Gamma 函数, $f^{(n)}(x)$ 是 $f(x)$ 的 n 阶导数.

2.2. 分数阶线性系统的稳定性理论

文献[35,36]给出了分数阶线性系统稳定性的充分必要条件.

引理 1 考虑线性自治系统^[34]

$$D_*^q X = AX, X(0) = X_0, \quad (2)$$

其中 $X \in R^n (n \in N), A \in R^{n \times n}$.

1) 系统(2)是渐近稳定的, 当且仅当对任意的特征值 λ , 有 $|\arg(\lambda)| > \frac{q\pi}{2}$ 都成立.

2) 系统(2)是稳定的, 当且仅当对任意的特征值 λ , 有 $|\arg(\lambda)| \geq \frac{q\pi}{2}$ 都成立.

q 阶线性系统的稳定性区域如图 1, 若系统在平衡点处 Jacobia 矩阵的所有特征值在扇形区域外部, 则此分数阶微分系统就是稳定的^[34]. 从图 1 可以看出, 分数阶线性系统的稳定域比相应的整数阶线性系统的稳定域大.

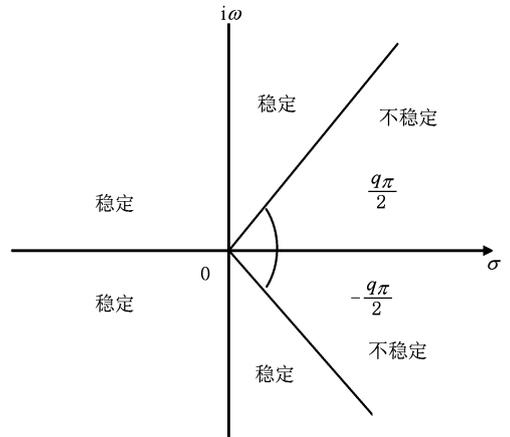


图 1 q 阶线性系统的稳定性区域

3. 分数阶 FHN 模型神经元分岔行为

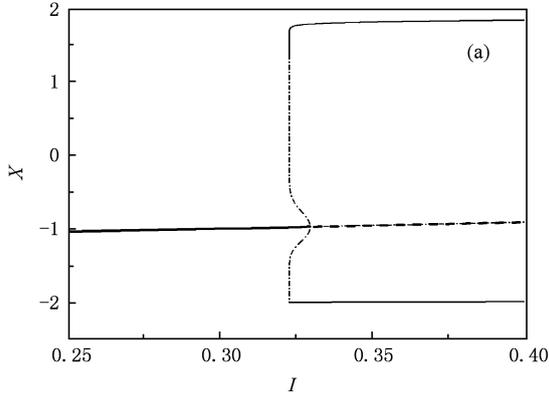
FHN 模型用一组简单的微分方程定性地描述了神经元的放电行为, 这里采用的分数阶 FHN 模型神经元具有如下形式:

$$\begin{aligned} D_*^q x &= x - \frac{x^3}{3} - y + I \\ D_*^q y &= r(x + a - by), \end{aligned} \quad (3)$$

其中, x, y 分别对应于神经元细胞的膜电位和恢复变量, D_*^q 是 Caputo 定义的微分算子, $0 < q \leq 1$ 是分数阶的阶数, a, b, r 是参数, I 是外加电流强度, 模型

中的变量是无量纲的.

当 $q=1$ 时, 模型退化为通常的整数阶 FHN 模型(以下不作特殊说明时, 整数阶模型特指阶数 $q=1$ 的情形), 对于整数阶 FHN 模型在文献[37]中已经做了详细的研究. 当取参数 $r=1/13, a=0.7, b=0.8$ 时, 神经元随着外加电流强度 I 的变化呈现出第二类兴奋性, 在 $I=0.3297$ 时发生次临界 Hopf 分



岔, 神经元由静息态进入周期放电态; 当 $I=1.4203$ 时再次发生次临界 Hopf 分岔, 神经元由周期放电态进入静息态. 整数阶 FHN 模型神经元对外加电流强度的分岔图如图 2, 图中粗实线表示稳定的平衡点, 而粗虚线表示不稳定的平衡点; 点划线表示不稳定极限环振幅的极值, 而细实线表示稳定极限环振幅的极值.

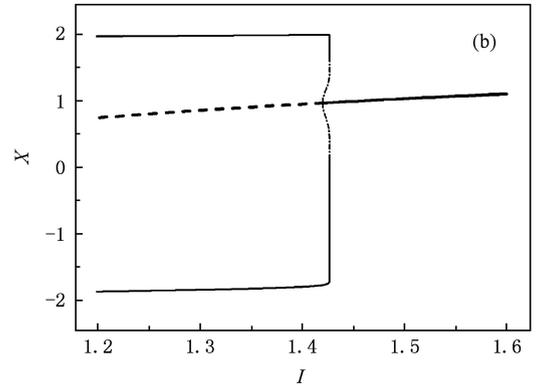


图 2 整数阶 FHN 模型神经元的膜电位随外加电流强度 I 的分岔图 (a) 左 Hopf 分岔图, 分岔点为 $I=0.3297$; (b) 右 Hopf 分岔图, 分岔点为 $I=1.4203$

下面考察分数阶 FHN 模型神经元的分岔参数. 假设(1)式的平衡点为 (x^*, y^*) , 则应满足

$$\begin{aligned} x^* - \frac{x^{*3}}{3} - y^* + I &= 0, \\ x^* + a - by^* &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

在平衡点充分小的邻域内, 系统(3)拓扑同构的线性化系统为

$$\begin{aligned} D_*^q x &= (1 - x^{*2})x - y, \\ D_*^q y &= rx - rby. \end{aligned} \quad (5)$$

因此系统(3)在平衡点处的 Jacobia 矩阵为

$$J = \begin{pmatrix} 1 - x^{*2} & -1 \\ r & -br \end{pmatrix}, \quad (6)$$

特征值为

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 - x^{*2} - br \pm \sqrt{(x^{*2} + br - 1)^2 - 4r[1 - b(1 - x^{*2})]}}{2}. \quad (7)$$

由文献引理 1 所给的分数阶线性系统平衡点的稳定条件可得

1) 当 $|\arg(\lambda)| > \frac{q\pi}{2}$ 时, 平衡点 (x^*, y^*) 是稳定的.

2) 当 $|\arg(\lambda)| < \frac{q\pi}{2}$ 时, 平衡点 (x^*, y^*) 是不稳定的.

取定参数 $r=1/13, a=0.7, b=0.8, I=0.37$, 由(4)式得系统的平衡点为 $(-0.9339, -0.2924)$, 由(7)式求得特征值为 $\lambda_{1,2} = 0.0331 \pm 0.2607i$, 可得 $|\arg(\lambda_{1,2})| = 1.4445$. 令

$$|\arg(\lambda_{1,2})| = \frac{q_{cr}\pi}{2}, \quad (8)$$

可得 $q_{cr} = 0.9196$, 这是 FHN 模型神经元发生周期放电的临界阶数, 即当阶数 $q > q_{cr}$ 时, 神经元发生周期放电; 当阶数 $q < q_{cr}$ 时, 平衡点 $(-0.9339, -0.2924)$ 是稳定的, 神经元处于静息态. 下面分别考察阶数为 1, 0.9, 0.5 时的情形.

当 $q=1$ 时, $|\arg(\lambda_{1,2})| = 1.4445 < 1 \times \frac{\pi}{2} = 1.5708$, 则平衡点 $(-0.9339, -0.2924)$ 是不稳定的, 神经元处于周期放电态.

当 $q=0.9$ 时, $|\arg(\lambda_{1,2})| = 1.4445 > 0.9 \times \frac{\pi}{2} = 1.4137$, 则平衡点 $(-0.9339, -0.2924)$ 是稳定的, 神经元处于静息态.

当 $q = 0.5$ 时, $|\arg(\lambda_{1,2})| = 1.4445 > 0.5 \times \frac{\pi}{2} = 0.7854$. 则平衡点 $(-0.9339, -0.2924)$ 是稳定的, 神经元处于静息态.

由以上可知, 当 $I = 0.37$ 时, 整数阶 FHN 模型神经元处于周期放电状态, 而阶数为 0.9 和 0.5 的神经元处于静息态, 所以此时分数阶 FHN 神经元比相应的整数阶模型神经元发生 Hopf 分岔的外加电流强度大. 用 Adomian 分解算法模拟分数阶微分方程, 图 3(a) 给出了整数阶 FHN 模型神经元放电的相轨迹图, 可以看到, 在相轨迹图中存一个稳定的极限环, 平衡点 $(-0.9339, -0.2924)$ 是不稳定的. 当 $q = 0.5$ 时, 神经元放电的相轨迹图如图 3(b), 此时不存在稳定的极限环, 平衡点 $(-0.0995, -0.2924)$ 是稳定的.

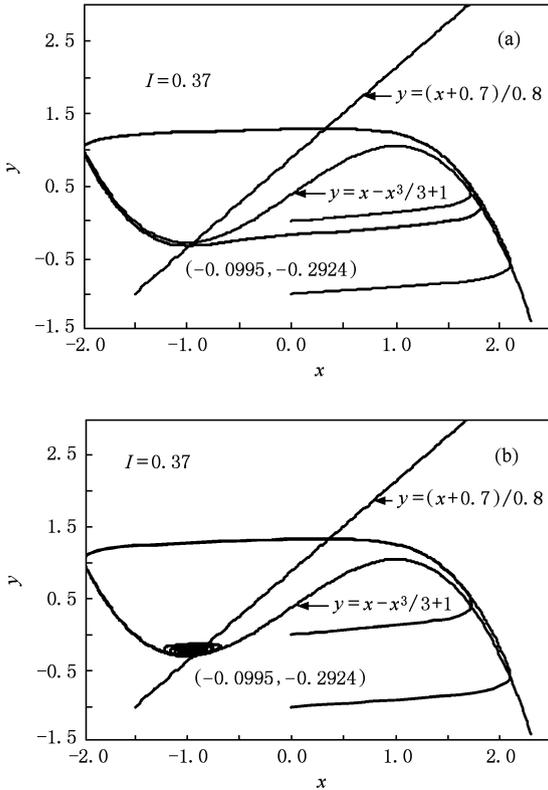


图3 FHN 模型神经元放电的相轨迹图(图中曲线 $y = x - \frac{x^3}{3} + 1$ 和 $y = \frac{x+0.7}{0.8}$ 分别是两条零等倾线, 两条曲线的交点为系统的平衡点) (a) 整数阶 FHN 模型神经元放电的相轨迹图; (b) 阶数为 $q = 0.5$ 的 FHN 模型神经元放电的相轨迹图

取定参数 $a = 0.7, b = 0.8, r = \frac{1}{13}, I = 1.41$, 由 (4) 式得系统的平衡点为 $(0.9601, 2.0751)$, 由 (7)

式求得特征值为 $\lambda_{1,2} = 0.0084 \pm 0.2684i$, 得: $|\arg(\lambda_{1,2})| = 1.5395$. 令

$$|\arg(\lambda_{1,2})| = \frac{q_{cr}\pi}{2}, \quad (9)$$

可得 $q_{cr} = 0.9801$, 这是 FHN 模型神经元发生周期放电的临界阶数, 即当阶数 $q > q_{cr}$ 时, 神经元发生周期放电, 当阶数 $q < q_{cr}$ 时, 平衡点 $(0.9601, 2.0751)$ 是稳定的, 神经元处于静息态. 下面分别考察阶数为 $1, 0.9, 0.5$ 时的情形.

当 $q = 1$ 时, $|\arg(\lambda_{1,2})| = 1.5395 < 1 \times \frac{\pi}{2} = 1.5708$, 此时平衡点 $(0.9601, 2.0751)$ 是不稳定的, 神经元处于周期放电态.

当 $q = 0.9$ 时, $|\arg(\lambda_{1,2})| = 1.5395 > 0.9 \times \frac{\pi}{2} = 1.4137$, 此时平衡点 $(0.9601, 2.0751)$ 是稳定的, 神经元处于静息态.

当 $q = 0.5$ 时, $|\arg(\lambda_{1,2})| = 1.5395 > 0.5 \times \frac{\pi}{2} = 0.7854$, 此时平衡点 $(0.9601, 2.0751)$ 是稳定的, 神经元处于静息态.

同样, 当 $I = 1.41$ 时, 整数阶 FHN 模型神经元仍处于周期放电状态, 而阶数为 0.9 和 0.5 的神经元已经处于静息态, 所以此时分数阶 FHN 神经元比相应的整数阶模型神经元发生 Hopf 分岔的外加电流强度小. 整数阶 FHN 模型神经元放电的相轨迹图如图 4(a), 可以看到, 在相图中存一个稳定的极限环, 平衡点 $(0.9601, 2.0751)$ 是不稳定的. 当 $q = 0.5$ 时, 神经元放电的相轨迹图如图 4(b), 此时不存在稳定的极限环, 平衡点 $(0.9601, 2.0751)$ 是稳定的.

FHN 模型神经元的放电模式取决于平衡点的稳定性, 若平衡点是稳定的, 神经元处于静息态; 若平衡点是不稳定的, 神经元处于周期放电态. 由引理 1 可得, 分数阶线性系统平衡点的稳定域比整数阶线性系统平衡点的稳定域大, 相应的不稳定域变小, 从而使得分数阶模型神经元呈现周期放电的外加电流强度的范围比相应的整数阶模型神经元的范围小. 由以上分析还可以进一步看到, 分数阶 FHN 模型与整数阶 FHN 模型相比, 进入周期放电时发生 Hopf 分岔的外加电流强度大, 而结束周期放电时发生 Hopf 分岔的外加电流强度小, 因而分数阶模型神经元呈现放电的外加电流强度的范围包含在整数阶模型相应的电流强度的范围内. 用 x_{max} 表示神经元放电时膜电位的最大值, x_{min} 表示膜电位的最小值,

图 5 给出了整数阶 FHN 神经元和 $q = 0.5$ 的分数阶 FHN 神经元放电时 $x_{\max} - x_{\min}$ 随外加电流强度 I 变化的曲线.

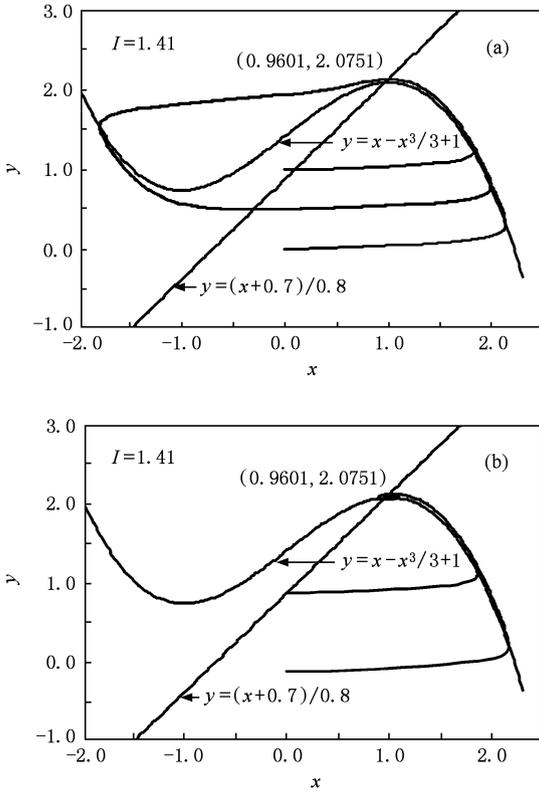


图 4 FHN 模型神经元放电的相轨迹图(图中曲线 $y = x - \frac{x^3}{3} + I$ 和 $y = \frac{x+0.7}{0.8}$ 分别是两条零等倾线,两条曲线的交点为系统的平衡点) (a)整数阶 FHN 模型神经元放电的相轨迹图;(b)阶数为 $q=0.5$ 的 FHN 模型神经元放电的相轨迹图

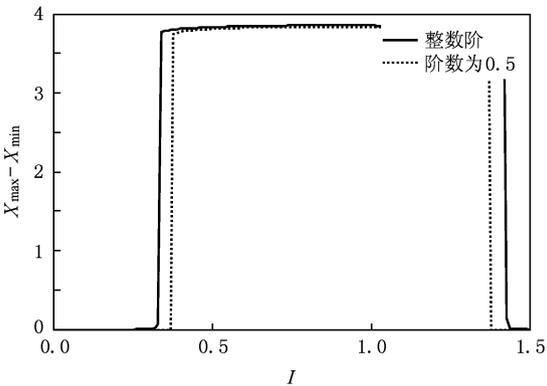


图 5 FHN 模型神经元放电的峰-峰值随电流变化的曲线

4. 分数阶 FHN 模型神经元的放电频率

由以上可知,分数阶 FHN 模型神经元呈现周期

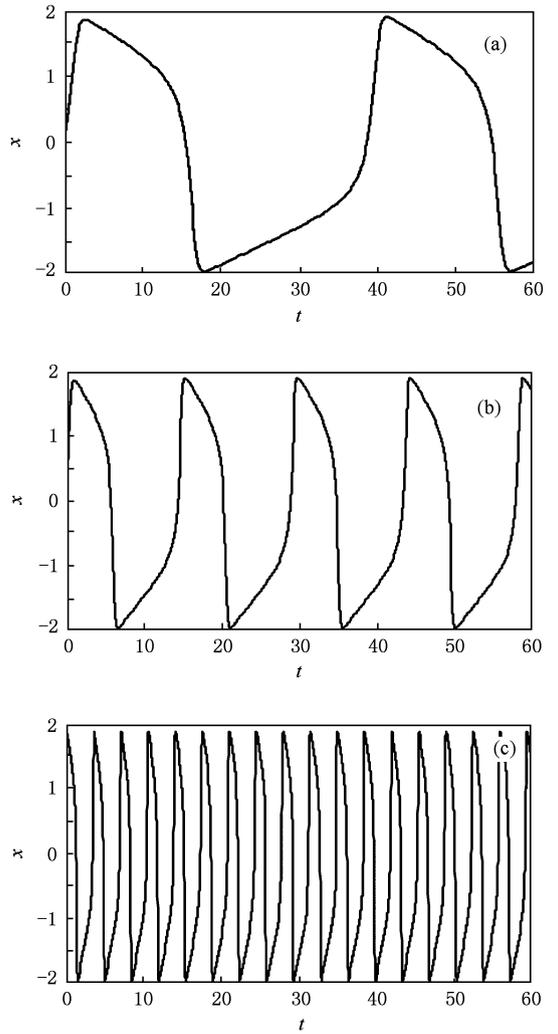


图 6 FHN 模型神经元膜电位的时程曲线图 (a)整数阶 FHN 模型神经元膜电位的时程曲线图;(b) $q=0.8$ 的 FHN 模型神经元膜电位的时程曲线图;(c) $q=0.5$ 的 FHN 模型神经元膜电位的时程曲线图

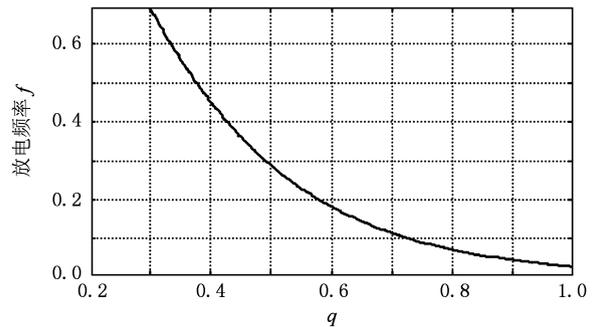


图 7 FHN 模型神经元放电频率随阶数 q 变化的曲线

放电的外加电流强度的范围比整数阶相应的外加电流的范围小,但是在模拟神经元放电的过程中发现,

在相同的参数条件下,分数阶 FHN 模型神经元放电的频率要比相应的整数阶模型神经元的放电频率高. 取定参数 $r = 1/13, a = 0.7, b = 0.8, I = 0.6$, 阶数分别为 1, 0.8, 0.5 时, FHN 模型神经元膜电位的时程曲线图分别为图 6(a), (b), (c).

由图 6 可以看出,随着阶数的降低,神经元周期放电的频率明显增大,即放电的周期变小,图 7 则给出了 FHN 模型神经元的放电频率随阶数 q 变化的曲线,从图中可以很明显的看出这一特征.

5. 分数阶模型神经元的同步

考察以电突触耦合方式连接的两个分数阶 FHN 模型神经元的同步. 如果忽略耦合的时间延迟,则两个分数阶 FHN 神经元组成的系统为

$$D_*^q x_1 = \left(x_1 - \frac{x_1^3}{3} - y_1 + I_1 \right) + r_1(x_2 - x_1),$$

$$D_*^q y_1 = r(x_1 - by_1 + a); \tag{10}$$

$$D_*^q x_2 = \left(x_2 - \frac{x_2^3}{3} - y_2 + I_2 \right) + r_2(x_1 - x_2),$$

$$D_*^q y_2 = r(x_2 - by_2 + a). \tag{11}$$

其中, a, b, r 是参数, I_1, I_2 是外加电流强度, r_1, r_2 是耦合强度, $0 < q \leq 1$ 是分数阶的阶数.

设 $e_1 = x_1 - x_2, e_2 = y_1 - y_2$, 若 $t \rightarrow +\infty$ 时, 有 $e = \|e_1\| + \|e_2\| \rightarrow 0$, 则两个耦合的神经元达到完全同步. 若 $I_1 = I_2, r_1 = r_2$, 当初始值不同时, 可以通过调整耦合强度使两个神经元达到完全同步. 取定参数 $a = 0.7, b = 0.8, I_1 = I_2 = 0.4, r_1 = r_2 = 0.1$, 阶数为 $q = 1$, 初始值为 $x_1(0) = 0, y_1(0) = 0, x_2(0) = 1, y_2(0) = 1$ 时, 误差 e 随时间变化的曲线如图 8 所示, 可见, 此时两个神经元可以达到完全同步.

下面研究在两个神经元同步的情况下, 不同阶

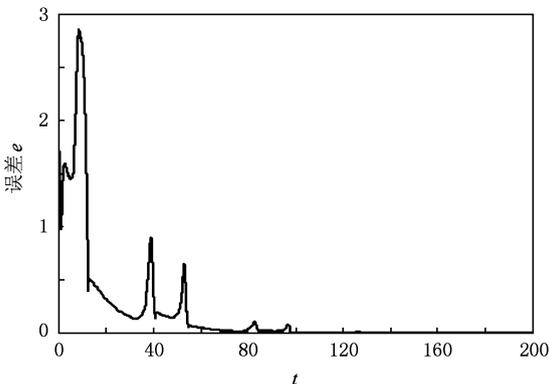


图 8 整数阶 FHN 模型的同步误差 e 随时间变化的曲线

模型神经元同步速率的大小. 为了研究两个神经元的同步程度, 引入一个统计量, 相似函数如下:

$$S(\tau) = \left\{ \frac{\langle (V_1(t) - V_2(t - \tau))^2 \rangle}{(\langle V_1^2(t) \rangle \langle V_2^2(t) \rangle)^{1/2}} \right\}^{1/2}. \tag{12}$$

这里 $\langle \cdot \rangle$ 表示对时间的平均, τ 是时间延迟, 这个函数度量了两个信号 $V_1(t)$ 和 $V_2(t)$ 的时间相关性. 如果两个信号是独立的, 则对所有的 τ , 有 $S(\tau) \neq 0$; 如果对于某个 τ , 使得 $S(\tau) \approx 0$, 那么在两个信号之间存在一个时间滞后; 特别地, 当耦合系统是完全同步的状态时, 那么在 $\tau = 0$ 处, $S(\tau) = 0$. 事实上, $S(\tau)$ 越小, 两个信号有越大的相关性, 从同步的观点讲, 就是两个耦合系统的同步程度增加^[38]. 本文研究的是完全同步, 因此时间延迟 $\tau = 0$. 图 9 给出了阶数分别为 0.5, 0.6, 0.8, 1 的神经元同步的相似函数随时间变化的曲线.

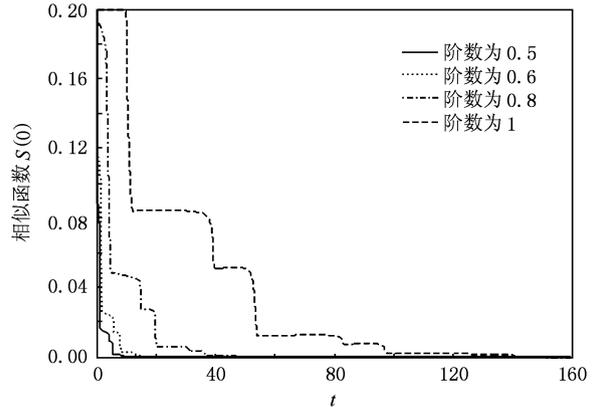


图 9 各阶模型神经元同步的相似函数 $S(0)$ 随着时间的变化曲线

由图 9 可以看出, 当阶数 $q = 1$ 时, 只有时间在 140 以后, 才有 $S(\tau) \approx 0$, 即两个神经元达到完全同步, 而当阶数为 $q = 0.5$ 时, 时间在 10 以后, 就有 $S(\tau) \approx 0$, 两个神经元达到了完全同步, 而且神经元达到完全同步的速率随着模型阶数的降低而逐渐加快. 在第三部分中, 得到神经元放电频率随着模型阶数的降低而逐渐增大, 因此可能是这种放电频率的增大使得神经元完全同步的速率随着模型阶数的降低而逐渐增大. 图 10(a), (b), (c) 分别给出了当阶数为 1, 0.8, 0.5 时两个神经元的同步图.

6. 结 论

分数阶微积分作为整数阶微积分的推广, 为科学研究提供了一种更加强有力的数学工具, 有很多

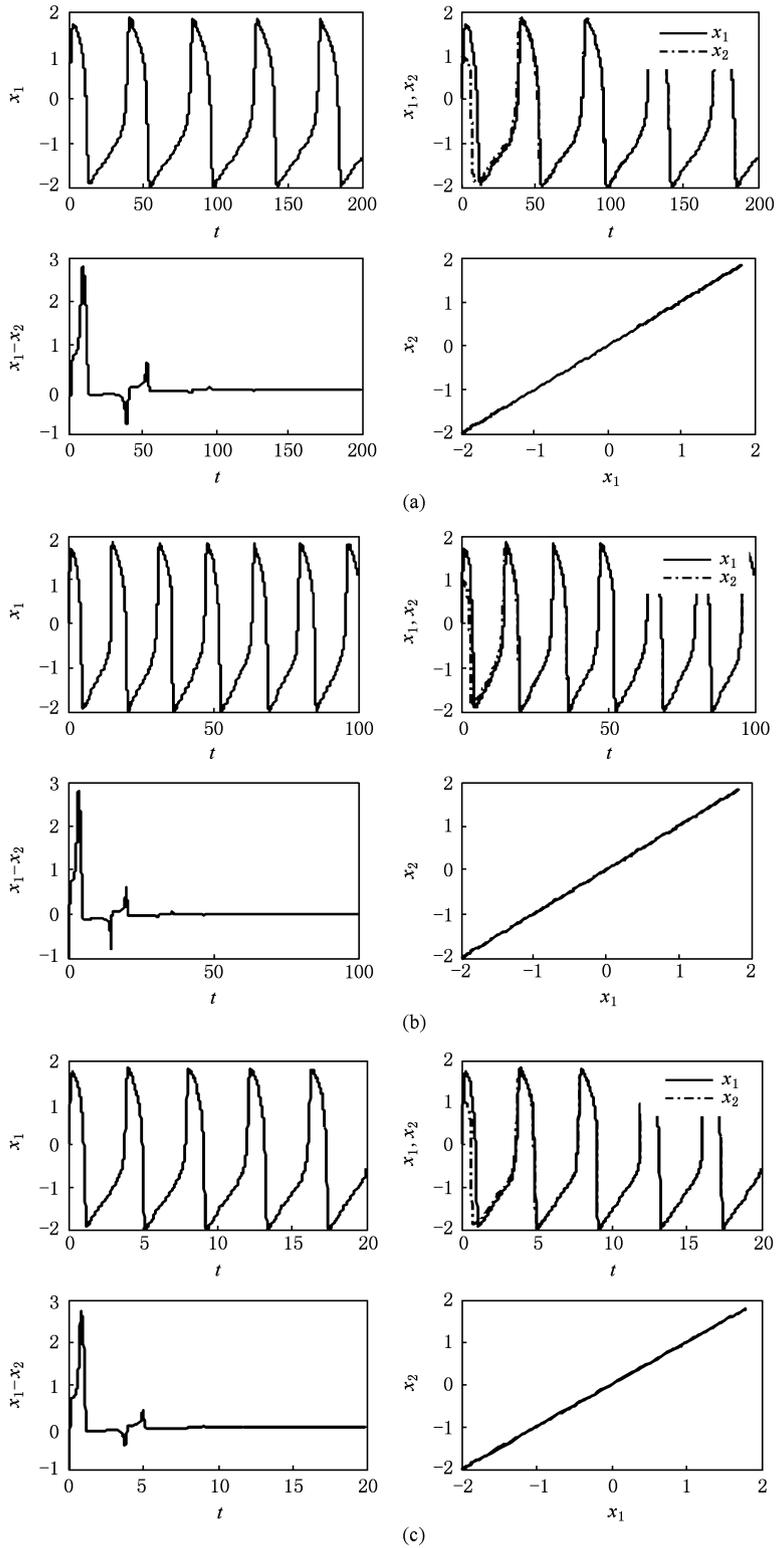


图 10 FHN 模型神经元对初值的同步 (a) 阶数为 $q=1$ 时, 两个神经元对初值的同步; (b) 阶数为 $q=0.8$ 时, 两个神经元对初值的同步; (c) 阶数为 $q=0.5$ 时, 两个神经元对初值的同步

规律和过程用分数阶的微积分描述比用整数阶微积分更加精确. 本文首先对分数阶 FHN 模型神经元的

分岔行为进行了研究, 发现分数阶模型神经元呈现周期放电的外加电流强度的范围比整数阶模型相应

的外加电流的范围小,但放电频率比整数阶模型神经元的放电频率高. 然后对周期放电的两个分数阶 FHN 模型神经元的同步速率进行了研究,发现两个分数阶 FHN 模型神经元同步速率比相应的整数阶模型神经元之间的同步速率快. Adomian 分

解算法是一种模拟分数阶微积分方程很好的方法,此种方法收敛速度快、时间复杂度小,最后利用 Adomian 分解算法模拟分数阶的 FHN 模型,充分展示了分数阶 FHN 模型神经元的动力特性和同步性质.

- [1] Zhu C X, ZOU Y 2009 *Control and Decision* **24** 161 (in Chinese) [朱呈祥、邹云 2009 控制与决策 **24** 161]
- [2] Bagley R L, Calico R A 1999 *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* **14** 304
- [3] Koeller R C 1984 *Acta Mechanica* **58** 299
- [4] Koeller R C 1984 *Journal of Applied Mechanics* **51** 299
- [5] Skaar S B, Michel A N, Miller R K 1988 *IEEE Transactionson on Automatic Control* **3**(4) 348
- [6] Ichise M, Nagayanay Y, Kojima T 1971 *Journal of Electroanalytical Chemistry Interfacial Electrochemistry* **33** 253
- [7] Sun H H, Onaral B, Tsao Y Y 1984 *IEEE Transactions on Ciomedical Engineering* **31** 664
- [8] Sun H H, Abdelwahed A A, Onaral B 1984 *IEEE Tranactions on Automatic Control* **29** 441
- [9] Mark R J, Hall M W 1981 *IEEE Trans. Acoust, Speech Signal Processing* **29** 872
- [10] Podlubny I 1999 *Fractional Differential Equations* (San Diego, CA: Academic Press)
- [11] Wheatcraft S W, Benson D A, Meerschaert M M 2000 *Water Resour. Res.* **36** 1403
- [12] Wheatcraft S W, Benson D A, Meerschaert M M 2000 *Water Resour. Res.* **36** 1413
- [13] Mandelbrot B 1967 *IEEE Transactions on Information Theory* **13** 289
- [14] Lin R 2007 *Ph. D. Dissertation* (Xiamen Univ.) (in Chinese) [林然 2007 博士学位论文(厦门大学)]
- [15] Deng W H 2007 *Ph. D. Dissertation* (Shanghai Univ.) (in Chinese) [邓伟华 2007 博士学位论文(上海大学)]
- [16] Che Y Q 2005 *Thesis for the Master's Degree* (Tianjin Univ.) (in Chinese) [车艳秋 2005 硕士学位论文(天津大学)]
- [17] Xie Y, Xu J X, Kang Y M, Hu S J, Duan Y B 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1112 (in Chinese) [谢勇、徐建学、康艳梅、胡三觉、段玉斌 2003 物理学报 **52** 1112]
- [18] Lu Q S, Liu S Q, Liu F, Wang Q Y, Hou Z H, Zheng Y H 2008 *Advances in Mechanics* **38** 766 (in Chinese) [陆启韶、刘深泉、刘峰、王青云、侯中怀、郑艳红 2008 力学进展 **38** 766]
- [19] Yu H J, Tong W J 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 2977 (in Chinese) [于洪洁、童伟君 2009 物理学报 **58** 2977]
- [20] Zhang H, Fang L P, Tong Q Y 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 7339 (in Chinese) [张宏、方路平、童勤业 2007 物理学报 **56** 7339]
- [21] Naundorf B, Wolf F, Volgushev M 2006 *Nature* **440** 1060
- [22] Auastasio T J 1994 *Biol. Cybern.* **72** 69
- [23] Lundstrom B N, Higgs M H, Spain W J, Fairhall A L 2008 *Nature Neuroscience* **11** 1335
- [24] Malek M H, Hashemi S R *IFMBE Proceedings* **21** 825
- [25] Xie Y, Chen L, Kang Y M, Aihara K 2008 *Phys. Rev. E* **77** 061921
- [26] Xie Y, Aihara K, Kang Y M 2008 *Phys. Rev. E* **77** 021917
- [27] Wang Q Y, Shi X, Lu Q S 2008 *Synchronization dynamics in the coupled system of neurons* (Beijing: Science Press) p4 (in Chinese) [王青云、石霞、陆启韶 2008 神经元耦合系统的同步动力学(北京:科学出版社)第4页]
- [28] Wen T, Tan X K, Yin S J 2003 *Acta Physiologica Sinica* **55** 663 (in Chinese) [文挺、覃星奎、尹世金、韩丹 2003 生理学报 **55** 663]
- [29] Wang Q Y, Lu S Q 2008 *Journal of Dynamics and Control* **6** 35 (in Chinese) [王青云、陆启韶 2008 动力学与控制学报 **6** 35]
- [30] Li H Q, Xu W, Wang C Q, Liu X D 2008 *Acta Biophysica Sinica* **24** 29 (in Chinese) [李海泉、徐伟、王朝庆、刘小丹 2008 生物物理学报 **24** 29]
- [31] Wang H X, Lu Q S 2006 *Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics* **32** 320 (in Chinese) [王海霞、陆启韶 2006 北京航空航天大学学报 **32** 320]
- [32] Wu Y, Xu J X, Jin W Y 2005 *Journal of Xi'an Jiaotong University* **39** 544 (in Chinese) [吴莹、徐建学、靳伍银 2005 西安交通大学学报 **39** 544]
- [33] Wu Y, Xu J X, He D H, Jin W Y 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 3457 (in Chinese) [吴莹、徐建学、何岱海、靳伍银 2005 物理学报 **54** 3457]
- [34] Zhao P D, Zhang X D 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 2791 (in Chinese) [赵品栋、张晓丹 2008 物理学报 **57** 2791]
- [35] Matignon D 1996 *IMACS, IEEE-SMC*, Lille, France 963
- [36] Ahmed E, El2Sayed A M A, Elsaka H A A 2007 *J. Math. Anal. Appl.* **325** 542
- [37] Zhang G J, Xu J X 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 0557 (in Chinese) [张广军、徐建学 2005 物理学报 **54** 0557]
- [38] Zhang Y J 2009 *Journal of Dynamics and Control* **7** 19 (in Chinese) [张艳娇、李美生、陆启韶 2009 动力学与控制报 **7** 19]

Dynamical characteristics of the fractional-order FitzHugh-Nagumo model neuron and its synchronization^{*}

Liu Yong Xie Yong[†]

(MOE Key Laboratory for Strength and Vibration, School of Aerospace, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

(Received 10 May 2009; revised manuscript received 2 June 2009)

Abstract

Through the research on the fractional-order FitzHugh-Nagumo model neuron, it is found that the Hopf bifurcation point of the fractional-order model, where the state of the model neuron changes from quiescence to periodic spiking, is different from that of the corresponding integer-order model when the externally applied current is considered as the bifurcation parameter. We further demonstrate that the range of the strength of the externally applied current in the fractional-order model neuron, which can make the model neuron exhibit periodic spiking, is smaller than that in the corresponding integer-order model neuron. However, the firing frequency of the fractional-order model neuron is higher than that of the integer-order counterpart. Meanwhile, we show that the synchronization rate of two electrically coupled fractional-order FitzHugh-Nagumo model neurons is greater than that of the integer-order counterpart. The Adomian decomposition method is employed to calculate fractional-order differential equations numerically because of its rapid convergence and high accuracy.

Keywords: fractional-order, Hopf bifurcation, FitzHugh-Nagumo model, synchronization

PACC: 8730, 0547, 8728

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10502039 and 10602041).

[†] Corresponding author. E-mail: yxie@mail.xjtu.edu.cn