第 59 卷 第 3 期 2010 年 3 月
1000-3290/2010/59(03)/1487-07

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol. 59, No. 3, March, 2010

用圈量子引力解除 Schwarichild-de Sitter 黑洞的时空奇点*

刘成周[1)2)†] 余国祥[1)] 谢志堃[1)]

1)(绍兴文理学院物理与电子信息系,绍兴 312000)

2)(滨州学院理论物理研究所,滨州 256600)

(2009 年 5 月 9 日收到;2009 年 6 月 3 日收到修改稿)

通过引入圈量子引力中 holonomy 基本变量的类比变量和采用相应的量子化方法,对 Schwarichild-de Sitter 黑洞中心附近的引力场进行量子化. 分析和计算了黑洞中心附近的 $\frac{1}{r}$ 和曲率标量的谱分布,得到了它们均存在有限上界的结果. 通过求解经典时空奇点 $r = 0$ 附近的量子哈密顿约束方程,给出了黑洞波函数在黑洞中心附近的时间演化行为,得到了该波函数可以通过经典奇点进行量子演化的结果.

关键词: 时空奇点, 黑洞, 圈量子引力

PACC: 0460, 0470

1. 引 言

广义相对论中最引人注目的时空奇点是大爆炸奇点和黑洞中心奇点. 在时空奇点处,曲率标量发散,时空在有限的时间内达到其边界. 一般认为,时空奇异性的出现表明广义相对论被推到了它的适用范围之外;高曲率区域的物理应该用量子引力来描述. 人们期待着引力的量子化能够克服经典广义相对论中的时空奇异性困难.

目前,建立完备的量子引力理论仍然是理论物理最重要和困难的课题之一. 作为一种背景独立的非微扰量子引力理论,圈量子引力(LQG)[1—3]是量子引力理论的一个重要候选者. 在 LQG 中,空间是一种自旋网络系统,该自旋系统具有普朗克尺度的基本离散性;自旋网络的面积、体积和长度算符均具有普朗克尺度的最小本征值[4—6]. 这样,在普朗克尺度下,广义相对论的时空连续性将不再适用,从而可以避免时空奇异性的出现[7—13].

近几年,利用 LQG 对广义相对论奇点问题的研究有了一定的进展[7—13],得到了宇宙大爆炸奇点和史瓦西黑洞中心奇点可以解除的结果. 其基本方法是通过对称性约化构建经典奇点附近时空的量子运动学和动力学;计算表明,量子时空远比广义相对论给出的经典时空要大,时空可以不遭遇奇异性区域,实现在经典奇点附件的量子演化. 首先, LQG 与宇宙学结合而成的圈量子宇宙学(LQC)[14,15]在大爆炸奇点的解除方面获得了明显进展[9—11]. 进一步研究表明[12,13],利用 LQC 中对大爆炸奇点解除的量子化方法,可以在 LQG 框架内避免 Schwarzschild 黑洞的中心奇点. 其中,文献[10—12],通过引入 LQG 中 holonomy 变量的类比基本变量和采用相应的量子化方法,对大爆炸奇点和 Schwarzschild 黑洞中心附近的引力场进行了进一步的简单量子化. 在该量子化方法下,通过具体分析和计算,得到了大爆炸奇点和黑洞中心附近曲率标量的谱分布均存在有限上界的结论. 进一步,通过求解经典奇点附近的量子哈密顿约束方程,给出了宇宙波函数和黑洞波函数在奇点附近的时间演化行为,得到了波函数可以通过经典奇点进行量子演化的结果. 这样,

* 国家自然科学基金(批准号:10375008),浙江省自然科学基金(批准号:Y6090739),山东省自然科学基金(批准号:Y2008A33),山东省教育厅科研发展计划(批准号:J08LI51)资助的课题.

† E-maiil: czlbj20@yahoo.com.cn

就在 LQG 背景下,给出了一种对大爆炸奇点和 Schwarzschild 黑洞时空奇点进行量子化解除的较简化方案.

另外,依据 LQG 对黑洞辐射过程的分析[16,17],解除黑洞奇点后,黑洞辐射过程中可以保证量子态的幺正演变,从而通过黑洞的霍金辐射得到黑洞内部的全部信息. 而 LQG 通过给出黑洞熵的一个严格微观解释,已经在黑洞熵起源及其量子化方面获得了相当的成功[18—20]. 黑洞辐射和黑洞熵均是黑洞物理学的重要研究内容,受到了人们大量关注[21—34].

目前,LQG 对时空奇异性问题的研究是在高度对称性约化情况下进行的;对时空奇点的去除方案是简化的半经典模型. 要将该方法向前推进,还有很多问题需要研究. 比如,在进一步考虑时空的真实因素的情况下,该简化分析是否还可以进行,结果是否还可以成立.

宇宙常数的存在有许多理论解释和观察实验的支持[35]. 一个带有宇宙常数的黑洞应更具有理论和实际意义,特别是在考虑暗能量问题的情况下. Schwarichild – de Sitter 黑洞时空是带有正宇宙常数的最简单和基本的黑洞. 本文利用文献[10—12]给出的解除大爆炸奇点和 Schwarzschild 黑洞中心奇点的方法,研究在 LQG 框架下消除 Schwarichild – de Sitter 黑洞的时空奇点. 首先,在运动学方面,对于 $r = 0$ 附近一小邻域内的引力场,通过引入 LQG 中 holonomy 变量的类比基本变量进行 LQG 背景下的量子化,并用该基本量展开 $\frac{1}{r}$,得到 $\frac{1}{r}$ 和曲率标量在 $r = 0$ 附近存在上界的非发散性. 然后,从动力学方面,计算黑洞中心附近引力场的作用量和哈密顿,并用上述量子化方法得到哈密顿算符;再通过求解哈密顿约束方程得到物理态系数演化的量子差分方程,并得到黑洞波函数可以通过 $r = 0$ 进行动力学演化的结论. 计算中采用了 $c = \hbar = G = k = 1$ 的自然单位制.

2. 时空奇点的运动学解除

Schwarichild-de Sitter 黑洞的时空度规为[36]

$$\mathrm{d}s^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{\lambda}{3}r^2\right)\mathrm{d}t^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{\lambda}{3}r^2\right)^{-1}\mathrm{d}r^2 + r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2), \tag{1}$$

其中 λ 为宇宙常数. 黑洞视界位置 r_+ 可据方程

$$1 - \frac{2M}{r} - \frac{\lambda}{3}r^2 = 0 \tag{2}$$

得到.

当 $r < r_+$ 时, $1 - \frac{2M}{r} - \frac{\lambda}{3}r^2 < 0$,此时(1)式中的 t 为空间轴, r 为时间轴. 这样,在黑洞内部,可将(1)式写为

$$\mathrm{d}s^2 = -\left(\frac{2M}{r} + \frac{\lambda}{3}r^2 - 1\right)^{-1}\mathrm{d}r^2 + \left(\frac{2M}{r} + \frac{\lambda}{3}r^2 - 1\right)\mathrm{d}t^2 + r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2). \tag{3}$$

显然,该时空互换下的度规是动态的,且可进一步写成

$$\mathrm{d}s^2 = -a^{-1}(t)\mathrm{d}t^2 + a(t)\mathrm{d}r^2 + b(t)(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2). \tag{4}$$

(4)式中 t 为时间轴, r 为空间轴,且有

$$a(t) = \frac{2M}{\sqrt{b}} + \frac{\lambda}{3}b - 1, b(t) = t^2. \tag{5}$$

可以看出,(4)式具有类似于 Robertson-Walker 度规的形式,且其对应的空间度规和空间度规行列式分别为

$$h_{ij} = \begin{pmatrix} a(t) & 0 & 0 \\ 0 & b(t) & 0 \\ 0 & 0 & b(t)\sin^2\theta \end{pmatrix}, \tag{6}$$

$$h = ab^2(t)\sin^2\theta. \tag{7}$$

这样可得,Schwarichild-de Sitter 黑洞中心附近一小邻域的体积为

$$\begin{aligned} V &= \int \sqrt{h}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi \\ &= 4\pi r_0\sqrt{a}b \\ &= 4\pi r_0 b^{\frac{1}{2}}\sqrt{2M}\sqrt{1 - \frac{\sqrt{b}}{2M} + \frac{\lambda}{6M}b^{\frac{3}{2}}}, \end{aligned} \tag{8}$$

其中 r_0 为一径向截断小量.

考虑到 λ 为小量,由(2)式知,黑洞半径 $r_+ \approx 2M$. 这样,在黑洞中心附近可采用近似[12]

$$1 - \frac{\sqrt{b}}{2M} + \frac{\lambda}{6M}b^{\frac{3}{2}} \approx 1, \tag{9}$$

从而有

$$V = 4\pi r_0 b^{\frac{1}{2}}\sqrt{2M} \equiv l_0 b^{\frac{1}{2}}, \tag{10}$$

其中

$$l_0 = 4\pi r_0\sqrt{2M}, \tag{11}$$

定义为系统的特征长度.

选择正则对 $x \equiv b$ 和 p，相应泊松括号为 $\{x,p\} = 1$．这里 x 为位形变量，p 为对应的动量，而经典奇点就位于 $x \equiv b = 0$ 处. 模仿 LQG 的方法[7,8]，这里用 x 和 $U_\gamma(p)$ 作为基本变量，并用它们来表示有关物理量，其中 $U_\gamma(p)$ 为 LQG 中 holonomy 基本变量[1-3]的类比动量，定义为[11]

$$U_\gamma(p) = \exp\left(\frac{8\pi\gamma}{L}\mathrm{i}p\right), \tag{12}$$

其中 γ 为一称为 Barbero－Immirzi 参数的实数，L 为长度单位. 参数 γ 起到分离相空间这里动量点的作用，且 p 与 $p + n\dfrac{L}{4\gamma}$ 对应相同的 $U_\gamma(p)$．此时有泊松括号

$$\{x,\ U_\gamma(p)\} = 8\pi\frac{\mathrm{i}\gamma}{L}U_\gamma(p), \tag{13}$$

$$U_\gamma^{-1}\{V^n\ ,U_\gamma\} = l_0^n U_\gamma^{-1}\{|x|^{\frac{n}{2}},U_\gamma\}$$

$$= \mathrm{i}8\pi l_0^n\frac{\gamma}{L}\frac{n}{2}\mathrm{sgn}(x)|x|^{(\frac{n}{2})-1}. \tag{14}$$

这样，用(14)式就可以通过 LQG 里的方法来定义尺度的倒数[37]. 而考虑到(10)式表明(14)式中的体积算符有 0 本征值存在，因而需要有 $n \geqslant 0$；同时，要在(14)式中出现 $|x|$ 的负次幂则需要 $n \leqslant 2$．这里，我们选择

$$n = 1, \tag{15}$$

可以看出，这是一个简单的选择，其他的选择会使计算复杂化. 这样，从(14)式就可得到

$$\frac{1}{|x|^{1/2}} = -\frac{L\mathrm{i}}{4\pi l_0\gamma}\mathrm{sgn}(x)U_\gamma^{-1}\{V\ ,U_\gamma\}. \tag{16}$$

在经典理论中，奇点出现在 Schwarichild－de Sitter 黑洞中心 $x \equiv b = 0$ 处，此时 $\dfrac{1}{|x|}$ 发散，进而出现发散的曲率标量

$$\Omega = R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} \approx \frac{48M^2}{r^6}$$

$$= \frac{48M^2}{b^3(t)} = \frac{48M^2}{|x|^3}. \tag{17}$$

下面，在上述类比动量 $U_\gamma(p)$ 基础上，采用类似于 LQG 中非 Schrodinger 量子化的方法[35]，对 $x \equiv b = 0$ 附近的引力场进行量子化，以考察 Schwarichild-de Sitter 黑洞中心附近 $\dfrac{1}{|x|}$ 和有关曲率标量的量子行为.

首先选择由经典函数[11]

$$W(\lambda) = \exp\left(\frac{\mathrm{i}\lambda x}{L}\right) \tag{18}$$

生成的代数. 这里 λ 为实数，该代数由函数

$$f(x) = \sum_{j=i}^{n} C_j \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\lambda jx}{L}}, \tag{19}$$

组成，其中 C_i 为复数而且其极限遵守上确界规范. 这是一个建立在实数域上的几乎周期函数的代数.

上述代数与建立在 Bohr 紧致化实数域 $\bar{R}_{\mathrm{Bohr}}$ 上的连续函数的代数同构，而 $\bar{R}_{\mathrm{Bohr}}$ 可以看成离散拓扑实现的对偶群. 因此，采用平方可积函数 $L^2(\bar{R}_{\mathrm{Bohr}},\mathrm{d}\mu_0)$ 为量子理论的希尔伯特空间，这里 $\mathrm{d}\mu_0$ 为 Haar 测度. 该希尔伯特空间的基矢及其内积为

$$|\lambda\rangle \equiv |\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x/L}\rangle, \langle\mu|\lambda\rangle = \delta_{\mu,\lambda}. \tag{20}$$

这是一个与传统的薛定谔希尔伯特空间 $L^2(R,\mathrm{d}x)$ 有明显不同的希尔伯特空间，从而导致了相应不同的量子化方法[38].

位形算符 $\hat{W}(\lambda)$ 对基矢的作用定义为[11,12]

$$\hat{W}(\lambda)|\mu\rangle = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\lambda\hat{x}}{L}}|\mu\rangle = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda\mu}|\mu\rangle, \tag{21}$$

这表明 $\hat{W}(\lambda)$ 是关于 λ 弱连续的，而且存在自伴算符 $\hat{x}$，其对基矢的作用为

$$\hat{x}|\mu\rangle = L\mu|\mu\rangle. \tag{22}$$

对于动量 $U_\gamma(p)$，按照（14)式建议的 $\hat{U}_\gamma$ 与 $\hat{x}$ 的对易关系以及(22)式，可得 $\hat{U}_\gamma$ 对基矢的作用为

$$\hat{U}_\gamma|\mu\rangle = |\mu-\gamma\rangle, \tag{23}$$

而相应的对易子为

$$[\hat{x},\hat{U}_\gamma] = -\gamma L\hat{U}_\gamma. \tag{24}$$

按标准的量子化方式 $[\ ,\ ] \to \mathrm{i}\{\ ,\ \}$，结合(13)式与(23)式，可得

$$-\gamma L\hat{U}_\gamma = -8\pi\frac{\gamma}{L}\hat{U}_\gamma, L = \sqrt{8\pi}. \tag{25}$$

这样就完成了 Schwarichild-de Sitter 黑洞中心附近引力场的量子化.

依据(22)式和(25)式可以看出，在普朗克尺度附近，$\hat{x}$ 的本征值是离散化的. 而接下来，我们分析长度倒数算符的本征谱.

在上述非薛定谔量子化中，据(10)式可得 Schwarichild-de Sitter 黑洞中心附近的体积算符为

$$\hat{V}|\mu\rangle = l_0|\hat{x}|^{\frac{1}{2}}|\mu\rangle = l_0|Lu|^{\frac{1}{2}}|\mu\rangle. \tag{26}$$

这样，在经典奇点处 $x = b(t) = 0$，依据(22)式可以得到 $\mu = 0$，此时黑洞处于量子态 $|0\rangle$．进而由(26)式可以得到，经典奇点处

$$\hat{V}|0\rangle = 0|\mu\rangle. \tag{27}$$

显然,这是与经典理论一致的结论.而对于在经典理论中发散的 $1/|x|$,在当前的量子化方法下,依据(16)式,定义[11]

$$\widehat{\frac{1}{|x|}} = \frac{1}{2\pi l_0^2\gamma^2}(U_\gamma^{-1}[\hat{V},\hat{U}_\gamma])^2, \tag{28}$$

可得

$$\begin{aligned}\widehat{\frac{1}{|x|}}|\mu\rangle &= \frac{1}{2\pi l_0^2\gamma^2}[U_\gamma^{-1}(\hat{V}\hat{U}_\gamma - \hat{U}_\gamma\hat{V})]^2|\mu\rangle \\ &= \frac{1}{2\pi l_0^2\gamma^2}(\hat{U}_\gamma^{-1}\hat{V}^2\hat{U}_\gamma - \hat{U}_\gamma^{-1}\hat{V}\hat{U}_\gamma\hat{V} - \hat{V}\hat{U}_\gamma^{-1}\hat{V}\hat{U}_\gamma + \hat{V}^2)|\mu\rangle \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\gamma^2}(|\mu|^{1/2} - |\mu-\gamma|^{1/2})^2|\mu\rangle. \end{aligned}\tag{29}$$

从上式可以看出,$\widehat{\frac{1}{|x|}}$ 的本征值是有界的,即在这里的量子理论中没有发散现象出现.而 $\widehat{\frac{1}{|x|}}$ 本征值的最大值出现在量子态 $|0\rangle$ 中,正好对应经典奇点 $x = b(t) = 0$,且定量有

$$\widehat{\frac{1}{|x|}}|0\rangle = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\gamma}|0\rangle. \tag{30}$$

而对于(17)式的曲率标量,其在 Schwarichild-de Sitter 黑洞中心处的量子表述为

$$\hat{\Omega}|0\rangle \approx 48M^2\widehat{\frac{1}{r^6}}|0\rangle = \frac{96\sqrt{2}M^2}{\pi^{\frac{3}{2}}}|0\rangle. \tag{31}$$

显然,此时 $\hat{\Omega}$ 的本征值是有限的,没有发散现象出现.这样,在 LQG 的量子化方法中,Schwarichild-de Sitter 黑洞中心处 $\frac{1}{|x|}$ 和曲率标量均是有限的,时空奇点可以从运动学方面避免.

3. 时空奇点的动力学解除

下面,通过解哈密顿约束来分析 Schwarichild-de Sitter 时空中黑洞中心附近的动力学演化.首先计算该中心 $r=0$ 附近一小邻域内的引力作用量.含宇宙项的引力作用量为[39]

$$S = \frac{1}{16\pi}\int\sqrt{-g}(R-2\lambda)\mathrm{d}^4x, \tag{32}$$

对(32)式进行 3+1 分解,此时引力作用量为

$$\begin{aligned}S = \frac{1}{16\pi}\int N\sqrt{h}(K_{ij}K^{ij} - K^2 + R^{(3)} \\ - 2\lambda)\mathrm{d}t\mathrm{d}^3x.\end{aligned}\tag{33}$$

而依据外曲率公式 $K_{ij} = -\frac{1}{2}\frac{\partial h_{ij}}{\partial t}$,从(6)式可得

$$K_{ij} = \begin{pmatrix} -\dot{a} & 0 & 0 \\ 0 & -\dot{b}\sin^2\theta & 0 \\ 0 & 0 & -\dot{b}\end{pmatrix}, \tag{34}$$

且空间截面的里奇曲率为 $R^{(3)} = \frac{2}{b}$,而时移函数 $N = \sqrt{-g_{tt}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$,这样就有

$$\begin{aligned}S &= -\frac{1}{16\pi}\int\mathrm{d}t\int_0^r\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^\pi\mathrm{d}\theta b^2 \\ &\quad\times\sin\theta\left(2\frac{\dot{b}^2}{b^2} + 4\frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} - \frac{2}{b^2} + 2\lambda\right) \\ &= -\frac{R}{2}\int\mathrm{d}t\left(\frac{\dot{b}^2}{2b} + \frac{1}{a}\dot{a}\dot{b} - 2 + 2\lambda b\right),\end{aligned}\tag{35}$$

将(5)式代入(35)式,进一步得到

$$\begin{aligned}S &= \frac{R}{2}\int\mathrm{d}t\left[\left(\frac{2M}{b} - 1 + \frac{\lambda b^2}{3}\right)^{-1}\right. \\ &\quad\left.\times(1-\lambda b^2)\dot{b}^2 + (1+\lambda b^2)\right] \\ &\equiv\int L\mathrm{d}t,\end{aligned}\tag{36}$$

这里 L 为拉氏量.与 b 对应的动量为

$$p = \frac{\partial L}{\partial\dot{b}} = R\left(\frac{2M}{b} - 1 + \frac{\lambda b^2}{3}\right)^{-1}(1-\lambda b^2)\dot{b}, \tag{37}$$

而哈密顿量为

$$\begin{aligned}H &= p\dot{b} - L = \frac{R}{2}\left(\frac{2M}{b} - 1 + \frac{\lambda b^2}{3}\right) \\ &\quad\times(1-\lambda b^2)\dot{b}^2 - \frac{R}{2}(1+\lambda b^2) \\ &= \frac{1}{2R}\left(\frac{2M}{b} - 1 + \frac{\lambda b^2}{3}\right) \\ &\quad\times(1-\lambda b^2)^{-1}p^2 - \frac{R}{2}(1+\lambda b^2).\end{aligned}\tag{38}$$

类似于(9)式,在 Schwarichild-de Sitter 黑洞中心附近采用近似

$$\begin{aligned}&\frac{2M}{b} - 1 + \frac{\lambda b^2}{3} \approx \frac{2M}{b}, \\ &\frac{1}{1-\lambda b^2} \approx 1 + \lambda b^2 \approx 1,\end{aligned}\tag{39}$$

这样,(38)式可简化为

$$H = \frac{M}{Rb}p^2 - \frac{R}{2}. \tag{40}$$

将(12)式展开可得

$$p^2 = \left(\frac{L}{8\pi}\right)^2\lim_{\gamma\to0}\left(\frac{2 - U_\gamma - U_\gamma^{-1}}{\gamma^2}\right). \tag{41}$$

令[11]

$$\gamma = \frac{l_f}{L_{phys}}, \tag{42}$$

其中 l_f 表示基本长度单位，L_{phys} 表示系统的特征长度. 取 l_f 为普朗克长度，这样(41)式就对应经典极限 $L_{phys} \gg l_f$ 下的连续几何情况.

而对于量子几何情形，$L_{phys} \approx l_f$，从而据(40)式可写出哈密顿算符

$$\hat{H} = \frac{M}{R}\left(\frac{L}{8\pi}\right)^2 \frac{1}{\gamma^2}(2 - \hat{U}_\gamma - \hat{U}_\gamma)\hat{\frac{1}{x}} - \frac{R}{2}, \tag{43}$$

其中 $A = \frac{\sqrt{2\pi}M}{24\pi R\gamma^2}$. 该算符对基矢 $|\mu\rangle$ 的作用为

$$\hat{H}|\mu\rangle = A\chi(\mu)(2|\mu\rangle - |\mu-\gamma\rangle - |\mu+\gamma\rangle) - \frac{R}{2G}|\mu\rangle, \tag{44}$$

且有

$$\chi(\mu) = |\mu| - 2|\mu|^{1/2}|\mu-\gamma|^{1/2} + |\mu-\gamma|. \tag{45}$$

可以看出

$$\begin{aligned}\hat{H}|0\rangle &= A|\gamma|(2|0\rangle - |-\gamma\rangle - |\gamma\rangle) - \frac{R}{2}|0\rangle \\ &= \left(A|\gamma| - \frac{R}{2}\right)|0\rangle \\ &\quad - A|\gamma|(|\gamma\rangle + |-\gamma\rangle),\end{aligned} \tag{46}$$

这表明对于量子态 $|0\rangle$，哈密顿算符有确切意义的解存在. 而要进一步分析 $r=0$ 附近量子态的时间演化，需要对哈密顿约束方程进行具体计算.

由于在约束系统量子理论中，归一化的解位于动力学空间的稠密子空间的对偶空间内，而这一空间的生成元为[11]

$$\langle\psi| = \sum_\mu \psi(\mu)|\mu\rangle, \tag{47}$$

从而哈密顿约束方程 $\hat{H}|\psi\rangle = 0$ 就转化为这一对偶空间内的约束方程 $\langle\psi|\hat{H}' = 0$. 这样，依据(42)式就可以得到量子态系数 $\psi(\mu)$ 满足的方程为

$$\begin{aligned}&\chi(\mu+\gamma)\psi(\mu+\gamma) \\ &+ \chi(\mu-\gamma)\psi(\mu-\gamma) \\ &- 2\chi(\mu)\psi(\mu) + B\psi(\mu) = 0,\end{aligned} \tag{48}$$

其中 $B = R/2A$. 解该式就可以得到对应物理态的系数.

在经典理论中，哈密顿约束方程描述经典时空，而这里的物理态可解释为对经典奇点附近量子时空的描述[11]. 通过(48)式可得到需要的物理态，且该物理态是有限分量

$$\psi(\mu + n\gamma)|\mu + n\gamma\rangle \tag{49}$$

的线性组合，其中任一分量对应一个特殊的体积值，且可以解释为黑洞处于演化时刻 $\mu+\gamma$. 这样，$\psi(\mu+\gamma)$ 就是描述时刻 $\mu+\gamma$ 黑洞中心附近的波函数，而一个哈密顿约束方程就给出一个许多特定体积值的黑洞量子态的线性组合. 这里特定的体积也等价地对应特定的时间，这就给出了黑洞的离散时间演化描述，而且其基本步长是 γ. 对于包含对应经典奇点量子态 $|0\rangle$ 的黑洞量子态，波函数 $\psi(0)$ 可以从 $\psi(\gamma)$ 和 $\psi(-\gamma)$ 的组合得到，从而黑洞可以从其中心合理演化. 而对于其他不包含对应经典奇点波函数 $\psi(0)$ 的黑洞量子态，可以解释为黑洞在离散的时间演化中越过中心(这也可以解释为从黑洞到白洞的演化). 总之，在当前的量子化方法中，Schwarichild-de Sitter 黑洞的经典时空奇点可以从动力学方面解除.

4. 结果与讨论

将 LQG 中对大爆炸奇点和 Schwarichild 黑洞中心奇点解除的量子化方法[10—12]应用倒 Schwarichild-de Sitter 黑洞时空. 通过引入 LQG 中 holonomy 变量的类比基本变量和采用相应的量子化方法，对 Schwarichild-de Sitter 黑洞中心的引力场进行量子化. 分析和计算了黑洞中心 $\frac{1}{r}$ 和曲率标量的行为，得倒 $\frac{1}{r}$ 存在上界和曲率标量有限的结果，从而在 LQG 量子化方法中从运动学方面解除了 Schwarichild-de Sitter 黑洞的中心奇点；从 Schwarichild-de Sitter 时空中的引力作用量出发，在上述量子化方法下，给出了经典奇点附近引力场的哈密顿算符，通过求解量子哈密顿约束方程，给出了黑洞波函数在黑洞中心附近的时间演化行为，得到了黑洞波函数可以从经典奇点进行量子演化的结果，实现了 Schwarichild-de Sitter 黑洞中心奇点的量子动力学解除. 以上结果支持了 LQG 中对时空奇点的研究方法和结果[10—12].

这里，在时空奇点的运动学解除过程中，避免了文献[12]中在 Schwarichild 黑洞中的特定坐标变换，从而可使相应计算较为直接，且增加了计算方法的适用性和推广性. 在奇点的动力学解除过程中，使用了与文[12]不同的哈密顿形式，并得到了相应的哈密顿算符和物理态系数的差分方程. 另外，本文的分析表明，宇宙常数项不影响 LQG 框架

下黑洞中心奇点的运动学和动力学解除.这表示LQG给出的时空奇点解除方法和结果[10—12]与宇宙常数的大尺度性质是一致的.

借用LQG的研究方法对黑洞经典时空奇点附近的时空进行分析,有助于推进广义相对论奇异性问题的研究.本文是我们在这方面的一个初步尝试.另外,黑洞奇点问题与黑洞演化及黑洞信息获得等问题密切相关.解除黑洞奇点后,在LQG框架内可以给出通过霍金辐射得到黑洞内部信息的方法[16,17].我们希望可以在LQG框架内,在较复杂的黑洞奇点解除以及黑洞信息获得方面做出进一步的工作.

感谢朱建阳教授的指导和帮助.

[1] Smolin L 2004 arXiv:hep – th/0408048

[2] Ashtekar A, Lewandomski J 2004 *Class,Quant. Grav.* **21** R53

[3] Thiemann T 2001 arXiv: gr – qc/0110034

[4] Rovelli C, Smolin L 1995 *Nucl. Phys.* B **442** 593

[5] Brunnemann J, Thiemann T 2006 *Class. Quant. Grav.* **23** 1289

[6] Bianchi E 2008 arXiv: gr – qc/0806.4710.

[7] Brunnemann J, Thiemann T 2006 *Class. Quant. Grav.* **23** 1395

[8] Modesto L 2005 arXiv:gr – qc/0504043

[9] Ashtekar A 2008 arXiv:gr – qc:0812.4703

[10] Bojowald M 2001 *Phys. Rev. Lett.* **86** 5227

[11] Viqar H, Oliver W 2004 *Phys. Rev.* D **69** 084016

[12] Modesto L 2004 *Phys. Rev.* D **70** 124009

[13] Abhay Ashtekar, Martin Bojowald 2006 *Class. Quant. Grav.* 23 391

[14] Bojowald. M 2001 *Phys. Rev.* D **64** 084018

[15] Ashtekar A, Bojowald M, Lewandomski J 2003 *Adv. Theor. Math. Phys.* 7 233

[16] Ashtekar A, Bojowald M 2005 *Class. Quant. Grav.* **22** 3349

[17] Ashtekar A, Taveras V, Varadarajan M 2008 arXiv: gr – qc/0801.1811

[18] Rovelli C 1996 *Phys. Rev. Lett.* 77 3288

[19] Ashtekar A *et al* 1998 *Phys. Rev. Lett.* **90** 904

[20] Corichi A, Diaz-Polo Z, Fernandez – Borija E 2007 *Phys. Rev. Lett.* **98** 131801

[21] Bekenstein J D 1973 *Phys. Rev.* D **7** 2333

[22] Hawking S W 1975 *Commun. Math. Phys.* **43** 199

[23] Wald R M 2006 *The Thermodynamics of Black Holes* (US: Springer US)

[24] Jing J L 1998 *Int. J. Theor. Phys.* **37** 1441

[25] Shen Y G 2002 *Phys. Lett.* B **537** 187

[26] Zhao R, Zhang L C, Li H F 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 7463 (in Chinese) [赵 仁、张丽春、李怀繁 2008 物理学报 **57** 7463]

[27] Zhang J Y, Zhao Z 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3796 (in Chinese) [张靖仪、赵 峥 2006 物理学报 **55** 3796]

[28] Meng Q M, jiang J J, Liu J L, Zheng D L 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 78 (in Chinese) [孟庆苗、蒋继建、刘景伦、郑德力 2009 物理学报 **58** 78]

[29] Liu C Z, Zhao Z 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 1607 (in Chinese) [刘成周、赵 峥 2006 物理学报 **55** 1607]

[30] Liu W B 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 6164 (in Chinese) [刘文彪 2007 物理学报 **56** 6164]

[31] Jiang Q Q, Wu S Q, Cai M 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3083 (in Chinese) [蒋青权、吴双清、蔡 瑁 2007 物理学报 **56** 3083]

[32] He T M, Fan J H, Wang Y J 2008 *Chin. Phys.* B **17** 2321

[33] Mi L Q, Li Z H 2006 *Chin. Phys.* **15** 1184

[34] Wang B B2008 *Chin. Phys.* B **17** 467

[35] Norbert Straumann 2002 arXiv:astro – ph/0203330

[36] Kotter F 1918 *Ann. Phys.* **56** 401

[37] Thiemann T 1998 *Class. Quant. Grav.* **15** 839

[38] Halvorson H 2004 *Studies in History and Philosophy of Modern Physics* **35** 45

[39] Liu L, Zhao Z 2004 *General Theory of Relativity* (Second Edition) (Beijing: Higher Education Press) (in Chinese) [刘辽、赵 峥 2004 广义相对论(第二版)(北京:高等教育出版社)]

The spacetime singularity resolution of Schwarichild-de Sitter black hole in loop quantum gravity*

Liu Cheng-Zhou[1)2)†] Yu Guo-Xiang[1)] Xie Zhi-Kun[1)]

1)(*Department of Physics and Electronic Information*, *Shaoxing University*, *Shaoxing* 312000, *China*)

2)(*Institute of Theoretical Physics*, *Binzhou College*, *Binzhou* 256600, *China*)

(Received 9 May 2009; revised manuscript received 3 June 2009)

Abstract

By using the analog variable of the holonomy variable of loop quantum gravity and the corresponding quantization method, the gravity field near the center of the Schwarichild－de Sitter black hole is processed though quantization. The spectrums of $\frac{1}{r}$ and the curvature invariant are computed near the black hole center and the result that the both spectrums is bounded from above are obtained. Following the above quantization method and by computing the quantum Hamiltonian constraint equation of the gravity field near the classical singularity $r = 0$, the evolution formula of the black hole wave function is obtained and the result that the wave function can evolve though the classical singularity is obtained.

Keywords: spacetime singularity, black hole, loop quantum gravity

PACC: 0460, 0470

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10375008), the Natural Science Foundation of Zhejiang Province, China (Grant No. Y6090739), the Natural Science Foundation of Shandong Province, China (Grant No. Y2008A33) and the Research and Development Projects of Education Bureau of Shandong Province, China (Grant No. J08L151).

† E-mail: czlbj20@yahoo.com.cn