

基于 Lyapunov 方程的分数阶新混沌系统的控制

许 喆[†] 刘崇新 杨 韬

(西安交通大学电气工程学院, 电力设备电气绝缘国家重点实验室, 西安 710049)

(2009 年 4 月 22 日收到; 2009 年 7 月 4 日收到修改稿)

新混沌系统是一种不同于 Lorenz 混沌系统、Chen 混沌系统以及 Liu 混沌系统的新的三阶连续自治混沌系统. 本文基于波特图的频域近似方法, 提出了一种混合型电路单元来近似实现分数阶算子, 并设计电路实现了 2.7 阶新混沌系统. 基于 Lyapunov 方程的系统稳定性判定理论, 设计了相应的控制器, 实现了对分数阶新混沌系统的控制.

关键词: 分数阶混沌系统, 电路实验, 混沌控制

PACC: 0545

1. 引 言

虽然分数阶微积分已有 300 多年的历史, 但由于长期没有实际应用背景而发展缓慢. 在近几十年来, 分数阶微积分才成为国际上的一个热点研究课题, 并在松弛, 振荡, 湍流等领域得到了有效的应用. 最近分数阶混沌系统又引起了人们的广泛关注和极大的兴趣^[1-13]. 同时将分数阶微分引入到动力学系统中, 并对分数阶动力系统的混沌特性及其控制进行研究已成为混沌学研究的一个新课题. 在 Chua's 电路^[1], Lorenz 系统^[2], Chen 系统^[3,4], Lü 系统^[5], Liu 系统^[6-8] 以及 Rössler 混沌和超混沌系统^[9] 中, 通过计算机数值仿真发现, 当系统的阶数为分数时, 系统仍然呈现混沌状态, 且更能反映系统所呈现的物理现象. 在对分数阶混沌系统进行研究的过程中, 分数阶非线性动力学系统的混沌控制是研究的重点也是难点. 无论相关文献的数量还是分数阶混沌系统的控制方法, 目前都还较少, 还处于研究的初期, 因此这一领域将会有更广阔的发展空间.

本文首先利用分数阶微积分理论, 基于波特图的频域近似方法, 提出了混合型电路单元来近似实现分数阶算子, 并设计电路实现了 2.7 阶新混沌系统. 利用数值仿真和电路实验证明了混合型电路单元实现分数阶算子的可行性. 最后, 基于 Lyapunov

方程的系统稳定性判定理论, 设计了相应的反馈控制器, 实现了对分数阶新混沌系统的控制. 数值仿真和电路实验的结果证明了该控制方法的有效性.

2. 分数阶微分及其近似

在分数阶微积分的定义中, 最为常用的是 Riemann-Liouville (RL) 定义, 其数学表达式如下:

$$\frac{d^\alpha f(t)}{dt^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau, \quad (1)$$

其中 $\Gamma(\cdot)$ 为 gamma 函数, $n-1 \leq \alpha < n$, 当考虑函数 $f(t)$ 的初始值为零时, (1) 式的 Laplace 变换可表示为

$$L\left\{\frac{d^\alpha f(t)}{dt^\alpha}\right\} = s^\alpha L\{f(t)\}. \quad (2)$$

目前, 实施分数阶微积分运算的求解方法有多种, 但工程上常用的是时域与复频域转换法. 通过求解复频域的 $\frac{1}{s^\alpha}$, 得到复频域的展开形式, 再将复频域形式转化为时域形式进行数值求解, 文献 [12] 提出了一种波特图的频域近似方法. 基于波特图的频域近似方法, 文献 [14] 推导出 α 从 0.1 到 0.9 的 $\frac{1}{s^\alpha}$ 展开式, 在此我们仅采用近似误差只有 2 dB 的 $\frac{1}{s^\alpha}$ 展开式.

[†] E-mail: seanxz@yahoo.cn

3. 分数阶新混沌系统及其电路实现

3.1. 分数阶新混沌系统

2006 年 Liu 提出了一种新的三阶连续自治混沌系统^[10]. 新混沌系统的数学模型描述如下:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a(z - x) - yz, \\ \frac{dy}{dt} &= by + xz, \\ \frac{dz}{dt} &= -cz - 4xy. \end{aligned} \quad (3)$$

当系统参数 $a = 3.8, b = 2.5, c = 7$ 时, 这个新的

三阶连续自治系统是混沌的.

对于分数阶新型混沌系统

$$\begin{aligned} \frac{d^\alpha x}{dt^\alpha} &= a(z - x) - yz, \\ \frac{d^\alpha y}{dt^\alpha} &= by + xz, \\ \frac{d^\alpha z}{dt^\alpha} &= -cz - 4xy, \end{aligned} \quad (4)$$

其中 $0 < \alpha \leq 1$ 并且 $a = 3.8, b = 2.5, c = 7$. 本文取参数 $\alpha = 0.9$ 对分数阶新混沌系统进行研究. 其最大 Lyapunov 指数为 0.3716, 其数值仿真相图如图 1 所示. 由此可知, 2.7 阶分数阶新混沌系统存在混沌吸引子.

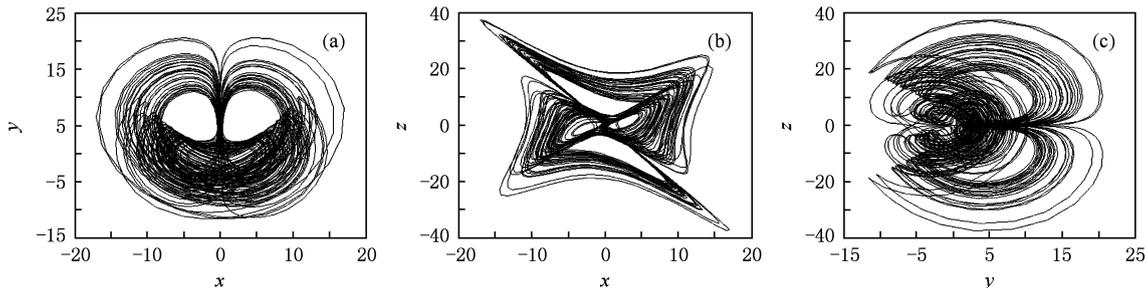


图 1 2.7 阶新混沌系统的数值仿真相图 (a) x-y ;(b) x-z ;(c) y-z

3.2. 电路实现

根据电路理论可知, 在复频域中, 图 2 中 A 和 B 之间的等效电路可以实现文献[14]中 α 从 0.1 到 0.9 的 $\frac{1}{s^\alpha}$ 近似式, 为了方便, 我们称其为混合型电路单元.

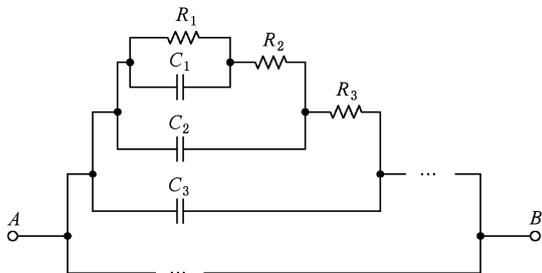


图 2 分数阶 $1/s^\alpha$ 的混合型电路单元

下面选取 $\alpha = 0.9$ 为例来说明混合型电路单元的设计过程, 由文献[14]可知 $\frac{1}{s^\alpha}$ 的近似式为 (近似误差 2 dB)

$$\frac{1}{s^{0.9}} \approx \frac{2.2675(s + 1.292)(s + 215.4)}{(s + 0.01292)(s + 2.154)(s + 359.4)}. \quad (5)$$

当 $\alpha = 0.9$ 时, 混合型电路单元如图 3 所示.

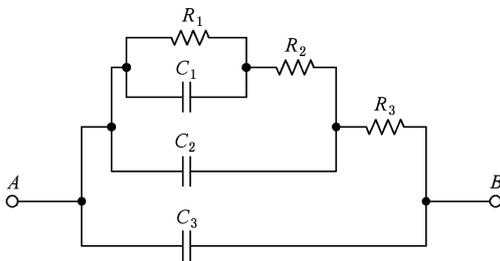


图 3 分数阶 $1/s^{0.9}$ 的混合型电路单元

图 3 中 A 和 B 之间的传递函数 $H(s)$ 为

$$H(s) = \frac{\frac{1}{C_3}s^2 + \left(\frac{R_1 + R_2}{R_1R_2C_1C_3} + \frac{R_2 + R_3}{R_2R_3C_2C_3}\right)s + \frac{R_1 + R_2 + R_3}{R_1R_2R_3C_1C_2C_3}}{s^3 + \left(\frac{R_1 + R_2}{R_1R_2C_1} + \frac{R_2 + R_3}{R_2R_3C_2} + \frac{1}{R_3C_3}\right)s^2 + \frac{(C_1 + C_2 + C_3)R_1 + (C_2 + C_3)R_2 + C_3R_3}{R_1R_2R_3C_1C_2C_3}s + \frac{1}{R_1R_2R_3C_1C_2C_3}} \quad (6)$$

将 $10^{-6}H(s)$ 与 (4) 式进行比较, 可得到图 3 所示的混合型电路单元的电阻电容值为 $R_1 = 61.5233 \text{ M}\Omega, R_2 = 1.55226 \text{ M}\Omega, R_3 = 0.0156514 \text{ M}\Omega, C_1 = 0.50619 \text{ }\mu\text{F}, C_2 = 0.299629 \text{ }\mu\text{F}, C_3 = 0.441014 \text{ }\mu\text{F}$.

同理, 当 $\alpha = 0.1-0.8$ (步长为 0.1) 时, 可以得到分数阶 $\frac{1}{s^\alpha}$ 混合型电路单元的电阻电容值分别如表 1、表 2 所示.

表 1 分数阶 $\frac{1}{s^\alpha}$ 混合型电路单元的电阻值 (2 dB)

α	$R_1/\text{M}\Omega$	$R_2/\text{M}\Omega$	$R_3/\text{M}\Omega$	$R_4/\text{M}\Omega$	$R_5/\text{M}\Omega$	$R_6/\text{M}\Omega$
0.1	0.6286	0.3845	0.5718			
0.2	0.9931	0.6624	0.3881	0.4685		
0.3	1.5210	1.1580	0.6317	0.3475	0.3246	
0.4	2.4000	1.9940	1.0210	0.4855	0.2400	0.1696
0.5	4.0450	3.3690	1.5450	0.6346	0.2669	0.1398
0.6	7.4190	5.4540	2.0210	0.6582	0.2163	0.07983
0.7	14.810	7.8440	1.9390	0.4253	0.09333	0.02149
0.8	31.100	7.7630	0.8377	0.08447	0.008578	
0.9	61.520	1.5520	0.01565			

表 2 分数阶 $\frac{1}{s^\alpha}$ 混合型电路单元的电容值 (2dB)

α	$C_1/\mu\text{F}$	$C_2/\mu\text{F}$	$C_3/\mu\text{F}$	$C_4/\mu\text{F}$	$C_5/\mu\text{F}$	$C_6/\mu\text{F}$
0.1	15.750	0.1569	0.000631			
0.2	28.680	2.6770	0.2736	0.01259		
0.3	24.100	4.3490	0.9258	0.2109	0.02512	
0.4	16.370	3.8810	1.1800	0.3760	0.1304	0.02818
0.5	9.7780	2.6940	1.0150	0.4088	0.1836	0.06310
0.6	5.2080	1.6310	0.7165	0.3366	0.1793	0.09261
0.7	2.4880	0.9160	0.4571	0.2392	0.1408	0.1068
0.8	1.0970	0.5073	0.2833	0.1722	0.1884	
0.9	0.5062	0.2996	0.4410			

根据混合型电路单元, 可以设计电路来实现 2.7 阶新混沌系统. 由于 2.7 阶新混沌系统的状态变量超出了一般运算放大器和乘法器的电源供应范围, 在电路设计之前, 先要做一个简单的线性变换, 为方便电路设计, 可以将 2.7 阶新混沌系统的方程写为

$$\frac{d^{0.9}x}{dt^{0.9}} = a(z - x) - 4yz,$$

$$\begin{aligned} \frac{d^{0.9}y}{dt^{0.9}} &= by + 4xz, \\ \frac{d^{0.9}z}{dt^{0.9}} &= -cz - 16xy, \end{aligned} \quad (7)$$

其中 $a = 3.8, b = 2.5, c = 7$.

根据电路理论, 可设计出图 4 所示的电路是实现 (7) 式, 图中乘法器为 AD633 (输出系数 0.1), 运算放大器 LM741.

在复频域中,图 4 可以表示为

$$\frac{X(s)}{H(s)} = \frac{R_3}{R_2 R_5 C_0} Z(s)$$

$$- \frac{R_7 R_3}{R_5 R_6 R_4 C_0} X(s)$$

$$- \frac{R_{19} R_3}{10 R_5 R_{18} R_1 C_0} L[y(t)z(t)],$$

$$\frac{Y(s)}{H(s)} = \frac{R_9}{R_{11} R_{10} C_0} Y(s)$$

$$+ \frac{R_9}{10 R_{11} R_8 C_0} L[x(t)z(t)],$$

$$\frac{Z(s)}{H(s)} = - \frac{R_{14} R_{17}}{R_{13} R_{15} R_{16} C_0} Z(s)$$

$$- \frac{R_4 R_{19}}{10 R_{15} R_{18} R_{12} C_0} L[x(t)y(t)], \quad (8)$$

式中 $H(s) = \frac{1}{s^{0.9}}$. (7) 式与 (8) 式相比较,取 $C_0 = 1$

μF , 可得

$$R_1, R_7, R_8, R_{12}, R_6 = 1 \text{ k}\Omega,$$

$$R_2 = R_4 = 10 \text{ k}\Omega,$$

$$R_{10} = 16 \text{ k}\Omega,$$

$$R_3, R_{16}, R_{18} = 3.8 \text{ k}\Omega,$$

$$R_5, R_{11}, R_{15} = 100 \text{ k}\Omega,$$

$$R_9, R_{19} = 4 \text{ k}\Omega,$$

$$R_{13} = 40 \text{ k}\Omega,$$

$$R_{14} = 15.2 \text{ k}\Omega,$$

$$R_{17} = 7 \text{ k}\Omega.$$

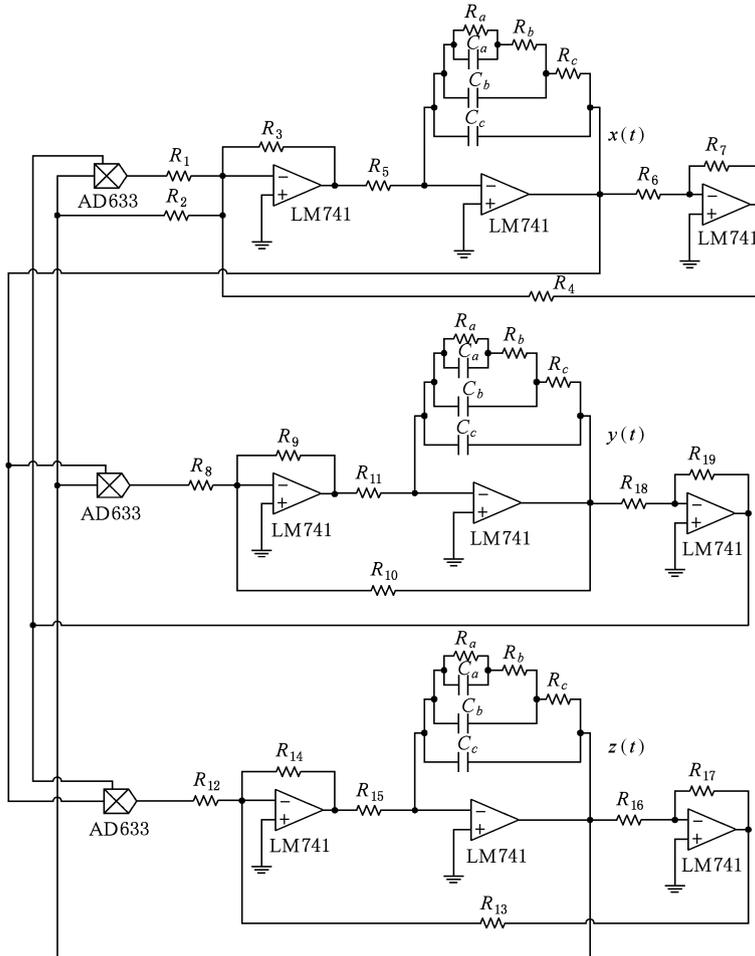


图 4 2.7 阶新混沌系统电路原理图

考虑到电路实验中电阻电容的精度,选取 $R_a = 61.5 \text{ M}\Omega, R_b = 1.55 \text{ M}\Omega, R_c = 15.7 \text{ k}\Omega, C_a = 0.5 \mu\text{F}, C_b = 0.3 \mu\text{F}, C_c = 0.44 \mu\text{F}$ 来实现图 3 所示电

路. 利用示波器观察到的混沌吸引子相图如图 5 所示, 由于电子元器件固有的非理想因素, 图 1 和图 5 存在一定的差异.

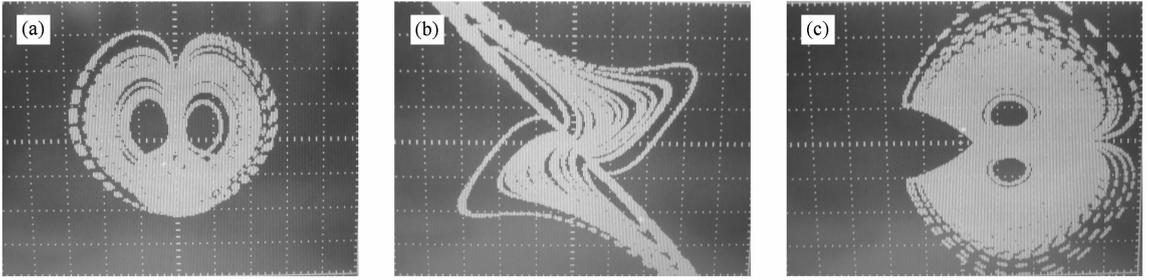


图5 2.7阶新混沌系统的电路实验相图 (a) x-y ;(b) x-z ;(c) y-z

4. 基于 Lyapunov 方程的反馈控制

4.1. 基于 Lyapunov 方程判定分数阶混沌系统稳定的理论

分数阶线性系统稳定性已经得到了充分的研究,并且得到了分数阶线性稳定的充分必要条件^[15,16].考虑到一般分数阶混沌系统都可以表示成如下形式:

$$\frac{d^\alpha X}{dt^\alpha} = A(X)X, \tag{9}$$

式中 $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 为系统的状态变量, $A(X)$ 为包含变量的系数矩阵.为使分数阶混沌系统(9)稳定,设计相应的控制项 $u(t)$, 则受控系统为

$$\frac{d^\alpha X}{dt^\alpha} = A(X)X - u(t) = A'(X)X. \tag{10}$$

引理 1 对受控分数阶混沌系统(10),如果系数矩阵 $A(X)$ 的任意特征值 λ 满足 $|\arg(\lambda)| > \frac{\alpha\pi}{2}$, 则受控系统渐进稳定.

对于阶数为 α 的分数阶系统的稳定性区域如图6所示.如果系统在平衡点处 Jacobian 矩阵的所有特征值在图6所示的稳定区域,则此分数阶微分系统就是稳定的.然而由于 $A'(X)$ 通常含有状态变量,不便于直接计算其特征值,难以根据特征值直接判定系统是否稳定.

针对上述问题,文献[17]提出了基于 Lyapunov 方程的分数阶混沌系统(阶数小于1)的稳定判定方法.

定理 1 对于分数阶受控系统(9),当阶数 $\alpha < 1$ 时,如果控制项 $u(t)$ 能使分数阶受控系统(9)的系数矩阵 $A'(X)$ 满足 Lyapunov 方程,即存在实对称正定矩阵 P , 半正定矩阵 Q , 使得方程 $PA'(X) +$

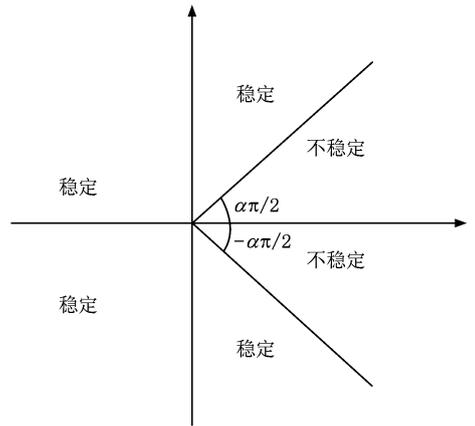


图6 分数阶系统的稳定区间

$(A'(X))^H P = -Q$ 对于任意的状态变量 X 恒成立, 则分数阶受控系统(9)渐进稳定.

证明 如果矩阵 $A'(X)$ 满足 Lyapunov 方程,只需证明 $A'(X)$ 的所有特征值实部都不大于零,根据引理1即可判定分数阶受控系统(10)稳定.

令 λ 为 $A'(X)$ 的任意一个特征值,则存在非零向量 ε 为其对应的特征向量.于是可得

$$A'(X)\varepsilon = \lambda\varepsilon. \tag{11}$$

对(10)式等号两边取其共轭转置得

$$\overline{(A'(X)\varepsilon)}^T = \bar{\lambda}\varepsilon^H. \tag{12}$$

对(10)式左乘 $\varepsilon^H P$ 与(11)式右乘 $P\varepsilon$ 相加得

$$\begin{aligned} \varepsilon^H (PA'(X) + (A'(X))^H P)\varepsilon \\ = (\lambda + \bar{\lambda})\varepsilon^H P\varepsilon. \end{aligned} \tag{13}$$

由于

$$PA'(X) + (A'(X))^H P = -Q, \tag{14}$$

其中 Q 为半正定矩阵.可知,矩阵 $PA'(X) + (A'(X))^H P$ 为半负定矩阵.根据半负定矩阵和正定矩阵的性质,对任意非零向量 ε 有

$$\begin{aligned} \varepsilon^H (PA'(X) + (A'(X))^H P)\varepsilon \\ = \varepsilon^H (-Q)\varepsilon \leq 0, \end{aligned} \tag{15}$$

因为

$$\varepsilon^H P \varepsilon > 0, \quad (16)$$

所以

$$(\lambda + \bar{\lambda}) = \frac{\varepsilon^H (-Q) \varepsilon}{\varepsilon^H P \varepsilon} \leq 0, \quad (17)$$

即系数矩阵 $A'(X)$ 的任意特征值 λ 都满足

$$|\arg(\lambda)| \geq \frac{\pi}{2} > \frac{\alpha\pi}{2} \quad (\alpha < 1). \quad (18)$$

根据引理 1 可知, 分数阶受控系统(10)渐进稳定.

4.2. 基于 Lyapunov 方程的反馈控制器的设计

对于分数阶混沌系统(4), 基于 Lyapunov 方程判定分数阶混沌系统稳定的理论设计控制器, 则受控系统为

$$\frac{d^\alpha X}{dt^\alpha} = A(X)X - u(t)$$

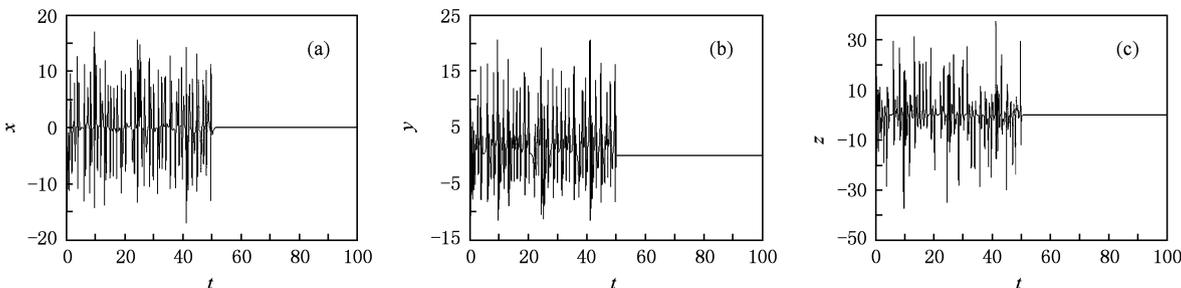


图 7 基于 Lyapunov 方程反馈控制分数阶新混沌系统的状态变量时间波形 (a) $t-x$; (b) $t-y$; (c) $t-z$

4.3. 基于 Lyapunov 方程的反馈控制电路实现

由于电子元件容许电压的有限性, 因此在电路设计中需将混沌信号减小为原来的 $\frac{1}{4}$, 故该系统(19)的控制器应变为

$$u(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ a - 4y & -12x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \quad (20)$$

利用电路理论, 可以设计出如图 8 所示的电路来实现基于 Lyapunov 方程的反馈控制器(20). 由基本电路理论, 可得

$$\frac{R_9 R_{23}}{R_{11} R_{20} R_{22} C_2} = k,$$

$$\frac{R_{14} R_{27}}{R_{15} R_{24} R_{26} C_3} = 3.8,$$

$$\frac{R_{14}}{10R_{15} R_{25} C_3} = 16.$$

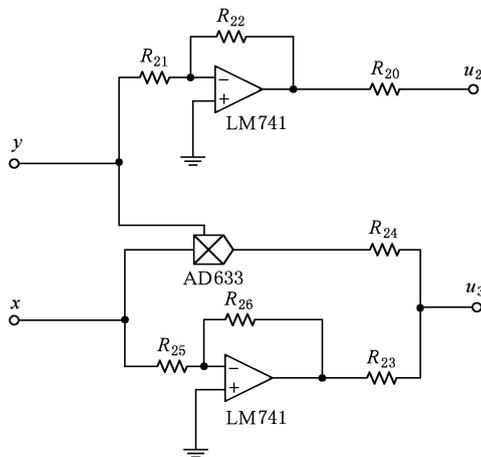


图 8 基于 Lyapunov 方程反馈控制器的电路原理图

因为系统中 $R_9 = 4 \text{ k}\Omega$, $R_{11} = R_{15} = 100 \text{ k}\Omega$, $R_{14} = 15.2 \text{ k}\Omega$, $C_2 = C_3 = 1 \text{ }\mu\text{F}$, 且 $k = 5$. 故可得 $R_{20} = 8 \text{ k}\Omega$, $R_{21} = R_{22} = 1 \text{ k}\Omega$, $R_{23} = 4 \text{ k}\Omega$,

$R_{24} = 0.95 \text{ k}\Omega$, $R_{25} = 10 \text{ k}\Omega$, $R_{26} = 1 \text{ k}\Omega$.

对该受控系统予以电路实现, 得到电路实验结果如图 9 所示.

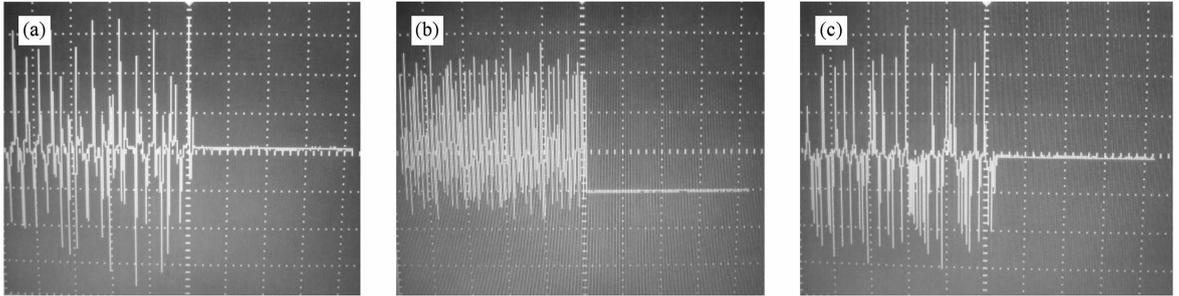


图 9 基于 Lyapunov 反馈控制分数阶新混沌系统的电路实验的状态变量时间波形 (a) $t-x$; (b) $t-y$; (c) $t-z$

5. 结 论

本文主要根据分数阶算子 $1/s^\alpha$ 在频域中的近似式, 提出了一种混合型电路单元近似实现分数阶算子, 并设计电路实现了 2.7 阶新混沌系统, 电路实

验和仿真实证了该电路单元的有效性. 提出了基于 Lyapunov 方程的分数阶系统稳定理论的控制方法, 设计了相应的控制器. 数值仿真及电路实验结果表明该方法可有效的控制分数阶新混沌系统, 为实现多种分数阶控制方法打下了理论基础, 具有很大的理论意义和应用价值.

-
- [1] Hartly T T, Lorenzo C F, Qammer H K 1995 *IEEE Trans. CAS-I* **42** 485
- [2] Grigorenko I, Grigorenko E 2003 *Phys. Rev. Lett.* **91** 034101
- [3] Li C P, Peng G J 2004 *Chaos, Solitons and Fractals*. **22** 443
- [4] Li C G, Chen G R 2004 *Chaos, Solitons and Fractals* **22** 549
- [5] Deng W H, Li C P 2005 *Physica A* **353** 61
- [6] Wang F Q, Liu C X 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3922 (in Chinese) [王发强、刘崇新 2006 物理学报 **55** 3922]
- [7] Lu J J, Liu C X 2007 *Chin. Phys.* **16** 1586
- [8] Xu Z, Liu C X 2008 *Chin. Phys. B* **17** 4033
- [9] Li C G, Chen G R 2004 *Physica A* **341** 55
- [10] Liu C X 2006 *Far East J. Dynamical System* **8** 51
- [11] Gao X, Yu J B 2005 *Chin. Phys.* **14** 908
- [12] Charef A, Sun H H, Tsao Y Y, Onaral B 1992 *IEEE Trans. Auto. Contr.* **37** 9
- [13] Liu C X, Liu T, Liu K, Liu L 2004 *Chaos, Solitons and Fractals* **22** 1031
- [14] Ahmad W M, Sprott J C 2003 *Chaos, Solitons and Fractals* **16** 339
- [15] Zhao P D, Zhang X D 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 2791 (in Chinese) [赵品栋、张晓丹 2008 物理学报 **57** 2791]
- [16] Matignon D 1996 In: *IMACS, IEEE-SMC, Lille, France* 963
- [17] Hu J B, Han Y, Zhao L D. 2008 *Acta Phys. Sin* **57** 7522 (in chinese) [胡建兵、韩焱、赵灵冬 2008 物理学报 **57** 7522]

Controlling fractional-order new chaotic system based on Lyapunov equation

Xu Zhe[†] Liu Chong-Xing Yang Tao

(School of Electrical Engineering, Key Laboratory of Electrical Insulation and Power Equipment, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

(Received 22 April 2009; revised manuscript received 4 July 2009)

Abstract

A new circuit unit for the analysis and synthesis of the chaotic behaviors in the new fractional-order system is proposed in this paper. Based on the approximation theory of fractional-order operator, an electronic circuit is designed to demonstrate the dynamic behaviors of the fractional-order Liu system with $\alpha = 0.9$. An effective controller is designed based on a theory of stability identification based on Lyapunov equation. The results between simulation and experiment are in good agreement, thereby proving the existence of chaos in the fractional-order new system and the effectiveness of our proposed control method.

Keywords: fractional-order chaotic system, circuit experiment, chaos control

PACC: 0545

[†] E-mail: seanxz@yahoo.cn