

# 单向耦合下两个不同 Lorenz 系统的广义同步\*

李小娟<sup>†</sup> 徐振源 谢青春 王 兵

(江南大学理学院, 数学系, 无锡 214122)

(2009 年 5 月 5 日收到; 2009 年 7 月 9 日收到修改稿)

对单向耦合下两个不同的 Lorenz 系统的广义同步进行了研究, 利用辅助系统方法, 基于稳定性理论和响应系统的有界性, 得到了它们达到广义同步时的充分条件, 并根据响应系统的修正系统具有零渐近稳定平衡点、非零渐近稳定平衡点和轨道渐近稳定周期解的情况, 将广义同步分为第一类、第二类和第三类; 利用 Routh-Hurwitz 定理, 对修正系统平衡点的稳定性进行了分析, 给出了单向耦合下两个不同 Lorenz 系统具有第一类、第二类广义同步的充分条件. 数值仿真表明了该方法的有效性与其可行性.

**关键词:** Lorenz 系统, 辅助系统, 单向耦合, 广义同步

**PACC:** 0545

## 1. 引 言

由于混沌在通讯、信息科学、医学、生物工程等领域中的巨大潜力和发展前途, 因而引起了国内外科研工作者的广泛关注. 自从 1990 年 Pecora 和 Carroll<sup>[1]</sup> 发现混沌系统可以实现同步以来, 国内外提出了许多不同的混沌同步方法. Rulkov 等在文献 [2] 引入了广义同步 (generalized synchronization, GS) 的概念, 它刻画了驱动-响应系统的更广泛的动力学行为. 1996 年 Henry 提出了用辅助系统方法可以检测到响应系统的 GS<sup>[3]</sup>. 最近 Hramov 等提出了辅助系统方法研究 GS<sup>[4]</sup>. 闵富红等利用线性时变连续系统的稳定性理论, 研究了统一混沌系统的耦合同步<sup>[5]</sup>. 文献 [6—8] 主要是对 Lorenz 系统控制同步的研究. 文献 [9] 对通过非线性控制的驱动-响应的广义 Lorenz 系统的同步进行了研究. 文献 [10] 利用惯性流形理论, 证明了一类激励相应系统的光滑 GS 的存在性和指数吸引性. Guo 等主要分析了两个不同系统双向耦合时两类广义同步的存在性<sup>[11]</sup>.

辅助系统的方法的思想来自于数学中函数 (映射) 定义. 对于自变量  $x$ , 如果存在变量  $y$ , 通过一定法则与  $x$  唯一相对应, 则称  $y$  为  $x$  的函数. 当  $x(t)$  为驱动系统的信号, 如果响应系统  $y(t)$  通过一定法则

(可能非常复杂) 与  $x(t)$  唯一相对应, 即  $y(t)$  与辅助系统的信号  $z(t)$  达到完全同步, 也即误差系统  $e(t) = z(t) - y(t)$  具有渐近稳定的零解, 则  $y(t)$  与  $x(t)$  发生广义同步.

本文主要证明了单向耦合下两个不同的 Lorenz 系统达到广义同步时的充分条件. 第 2 节对单向耦合下两个不同的 Lorenz 系统的广义同步类型进行了分类, 并证明了它们达到第一类、第二类 GS 时的充分条件; 第 3 节给出了数值例子; 第四节作了讨论.

## 2. 单向耦合下两个不同的 Lorenz 系统的广义同步

### 2.1. 单向耦合下 Lorenz 系统的同步模型

Lorenz 系统的数学模型为

$$\begin{aligned} \dot{w} &= Aw + f(w) \\ &= \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ c & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix} w \\ &\quad + w_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} w, \end{aligned} \quad (1)$$

\* 国家自然科学基金 (批准号: 10372054) 资助的课题.

<sup>†</sup> 通讯联系人; E-mail: lixiao\_juan@163.com

其中  $a, b, c > 0$  为常数,  $w = (w_1, w_2, w_3)^T, A = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ c & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}$  为含有参数的常矩阵.

我们研究单向线性耦合下两个不同 Lorenz 系统的模型如下:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_1 x + f(x), \\ \dot{y} &= A_2 y + f(y) + k(x - y), \end{aligned} \quad (2)$$

其中  $k = \text{diag}\{k_{11}, k_{22}, k_{33}\}$  为耦合矩阵,  $x = (x_1, y_1, z_1), y = (x_2, y_2, z_2)$  为状态变量, 且

$$A_1 = \begin{pmatrix} -a_1 & a_1 & 0 \\ c_1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b_1 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ c & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}.$$

为了求出(2)式达到广义同步的条件, 根据文献[3], 构造响应系统  $y$  的复制  $z$  系统,  $\dot{z} = A_2 z + f(z) + k(x - z)$ , 有

$$\begin{aligned} \dot{y} &= A_2 y + f(y) + k(x - y), \\ \dot{z} &= A_2 z + f(z) + k(x - z), \end{aligned} \quad (3)$$

其中  $z$  为辅助系统. 因此只需证明(3)式达到完全同步的条件, 即可得(2)式达到广义同步的条件.

定义误差系统  $e = y - z$ , 其中

$$e = (e_1, e_2, e_3)^T = (y_1 - z_1, y_2 - z_2, y_3 - z_3)^T,$$

则

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \dot{y} - \dot{z} = A_2 y + f(y) + k(x - y) \\ &\quad - A_2 z - f(z) - k(x - z) \\ &= (A_2 - k)e + f(y) - f(z). \end{aligned} \quad (4)$$

目的是构造耦合矩阵  $k$ , 使得当  $t \rightarrow \infty$  时, 满足误差系统(4)渐近稳定.

## 2.2. 线性反馈控制系统 $y(t)$ 的有界性

为了得到单向耦合下两个不同 Lorenz 系统到达广义同步的条件, 引入引理 1.

**引理 1** 对于任意的系统  $x(t), y(t)$  定义如(2)式, 对于任何初始条件  $x_0, y_0$ , 当  $t \rightarrow \infty$  时系统  $x(t), y(t)$  均有界.

**证明** 对  $x_3(t), y_3(t)$  分别向左平移  $c + a$  个单位得  $x_3'(t), y_3'(t)$ , 不妨仍记为  $x_3(t), y_3(t)$ , 所以有

$$\dot{x}_1 = -a_1 x_1 + a_1 x_2,$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= -a_1 x_1 - x_2 - x_1 x_3, \\ \dot{x}_3 &= -b_1 x_3 + x_1 x_2 - b(c + a), \\ \dot{y}_1 &= -a y_1 + a y_2 + k_{11}(x_1 - y_1), \\ \dot{y}_2 &= -a y_1 - y_2 - y_1 y_3 + k_{22}(x_2 - y_2), \\ \dot{y}_3 &= -b y_3 + y_1 y_2 - (b + k_{33})(c + a) \\ &\quad + k_{33}(x_3 - y_3), \end{aligned} \quad (5)$$

则令  $u(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t), y_1(t), y_2(t), y_3(t))^T$ , 故可得

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u(t)|^2 + (a_1 - \frac{k_{11}}{2}) x_1^2 + (1 - \frac{k_{22}}{2}) x_2^2 \\ &\quad + (1 - \frac{k_{33}}{2}) x_3^2 + (a + \frac{k_{11}}{2}) y_1^2 \\ &\quad + (1 + \frac{k_{22}}{2}) y_2^2 + (1 + \frac{k_{33}}{2}) y_3^2 \\ &\leq \frac{b_1^2 (c_1 + a_1)^2}{4(b_1 - 1)} + \frac{(b + k_{33})^2 (c + a)^2}{4(b - 1)}. \end{aligned} \quad (6)$$

又有

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} |u(t)|^2 + 2l |u(t)|^2 \\ &\leq \frac{b_1^2 (c_1 + a_1)^2}{2(b_1 - 1)} + \frac{(b + k_{33})^2 (c + a)^2}{2(b - 1)}, \end{aligned} \quad (7)$$

其中

$$l = \min \left( \left| a_1 - \frac{k_{11}}{2} \right|, \left| 1 - \frac{k_{22}}{2} \right|, \left| 1 - \frac{k_{33}}{2} \right|, \left| a + \frac{k_{11}}{2} \right|, \left| 1 + \frac{k_{22}}{2} \right|, \left| 1 + \frac{k_{33}}{2} \right| \right).$$

由(7)式得

$$\begin{aligned} |u(t)|^2 &\leq |u(0)|^2 e^{-2lt} + \left( \frac{(b + k_{33})^2 (c + a)^2}{4l(b - 1)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{b_1^2 (c_1 + a_1)^2}{4l(b_1 - 1)} \right) \cdot (1 - e^{-2lt}), \end{aligned}$$

故当  $t \rightarrow \infty$  时,

$$\sup |u(t)| \leq \sqrt{\frac{(b + k_{33})^2 (c + a)^2}{4l(b - 1)} + \frac{b_1^2 (c_1 + a_1)^2}{4l(b_1 - 1)}},$$

所以  $u(t)$  有界, 故  $x(t), y(t)$  有界.

因此不妨设  $y(t)$  沿任何轨道均有  $\underline{\rho}_i < y_i(t, y_0) < \bar{\rho}_i, \rho_i = \max\{|\underline{\rho}_i|, |\bar{\rho}_i|\} (i = 1, 2, 3)$ .

引理 1 的证明过程说明驱动-响应系统的吸引集与驱动系统  $x(t)$  的关系,  $y(t), z(t)$  的动力行为与  $x(t)$  是相关的, 因此误差系统也与  $x(t)$  是相关的,  $\underline{\rho}_i < y_i(t, y_0) < \bar{\rho}_i, \rho_i = \max\{|\underline{\rho}_i|, |\bar{\rho}_i|\}$ , 上下界也是与  $x(t)$  相关的.

由  $y(t)$  的有界性和误差系统(4)式,可从文献[9]中得到引理 2.

**引理 2** 当耦合矩阵  $k = \text{diag}\{k_{11}, k_{22}, k_{33}\}$  时, (3)式达到同步的条件是

$$\begin{aligned} k_{11} &> -a, \\ k_{22} &> \frac{a}{2(k_{11} + a)} (\sqrt{\rho_3^2 + (\rho_3 - c)^2} - \rho_3 \\ &\quad + c - \rho_3) - 1, \\ k_{33} &> \frac{a\rho_2^2(k_{22} + 1)}{4\Delta_l \sqrt{\rho_3^2 + (\rho_3 - c)^2} - \rho_3} - b, \end{aligned} \quad (8)$$

其中

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}_l &= (k_{11} + a)(k_{22} + 1) \\ &\quad - \frac{a}{2} (\sqrt{\rho_3^2 + (\rho_3 - c)^2} - \rho_3 + c - \rho_3). \end{aligned}$$

**证明** 由误差系统(4)知

$$\dot{e} = (A_2 - k)e + f(y) - f(z) + Q(e, \eta),$$

其中

$$Q(e, \eta) = (Q_1(e, \eta), Q_2(e, \eta), Q_3(e, \eta))^T \in R^3$$

为无穷小量. 因此它满足线性方法, 则

$$\dot{e} = \left( A_2 - k + \frac{\partial}{\partial w} f(y) \right) e. \quad (9)$$

考虑李雅谱诺夫函数

$$V(e) = e^T p e,$$

其中

$$0 < p = p^T \in R^{3 \times 3}.$$

对  $V(e)$  求导得

$$\begin{aligned} \dot{V}(e) &= \dot{e}^T p e + e^T p \dot{e} \\ &= e^T \left[ (A_2 - k + \frac{\partial}{\partial w} f(y))^T p \right. \\ &\quad \left. + p(A_2 - k + \frac{\partial}{\partial w} f(y)) \right] e, \end{aligned}$$

则当

$$\begin{aligned} Y &= \left( A_2 - k + \frac{\partial}{\partial w} f(y) \right)^T P \\ &\quad + P \left( A_2 - k + \frac{\partial}{\partial w} f(y) \right), \end{aligned} \quad (10)$$

取  $p = \text{diag}\{p_1, p_2, p_2\}$  则把  $A_2, k, p$  代入(10)式得

$$Y = \begin{pmatrix} 2p_1(-a - k_{11}) & ap_1 + p_2(c - x_3) & p_2x_2 \\ ap_1 + p_2(c - x_3) & 2p_2(-1 - k_{22}) & 0 \\ p_2x_2 & 0 & 2p_2(-b - k_{33}) \end{pmatrix}. \quad (11)$$

这里令  $p = p_1/p_2$ , 记

$$c(p) = \frac{\rho_2^2 - \rho_3^2 + (\rho_3 - c - ap)^2}{4p},$$

所以由  $Y$  为负定阵得

$$\begin{aligned} k_{11} + a &> 0, \quad k_{22} > -1 + \frac{c(p)}{k_{11} + a}, \\ k_{33} &> -b + \frac{\rho_2^2(k_{22} + 1)}{4\Delta_p}. \end{aligned} \quad (12)$$

其中

$$\bar{\Delta}_p = (k_{11} + a)(k_{22} + 1) - c_1(p),$$

为进一步扩大耦合系数, 求  $c(p)$  的最小值得

$$c_m = c(p_1^*),$$

其中

$$p_1^* = \frac{\sqrt{\rho_3^2 - \rho_2^2 + (\rho_3 - c)^2}}{a}. \quad (13)$$

将(13)式代入(12)式中的  $c(p)$ , 既得.

相应地, 可以得出当耦合矩阵  $k = \text{diag}\{k_{11}, 0, 0\}$ ,  $k = \text{diag}\{0, k_{22}, 0\}$ ,  $k = \text{diag}\{0, 0, k_{33}\}$  时, (3)式达到同步时的条件.

从引理 2 可知辅助系统与响应系统完全同步的充分条件是 与  $y(t), z(t)$  的上下界有关的, 也与  $x(t)$  完全有关.

### 2.3. 广义同步的分类

**定义** 已知两个动力系统  $X$  和  $Y$ , 如果存在流形  $M = \{(X, Y), Y = \varphi(X)\}$ , 它至少包含一个 Milnor 吸引子, 则称  $X$  和  $Y$  广义同步化,  $\varphi$  是广义同步函数,  $M$  是广义同步流形.

响应系统  $y$  的修正系统是

$$\dot{y} = A_2 y + f(y) - ky. \quad (14)$$

根据修正系统(14)的平衡点及周期解的情况, 把(2)式的 GS 分为三类:

- 第一类: 修正系统有渐近稳定平衡点  $(0, 0, 0)$ .
- 第二类: 修正系统有非零的渐近稳定平衡点.
- 第三类: 修正系统有轨道渐近稳定的周期解.

为了求修正系统的平衡点, 故只需令

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= -(a + k_{11})y_1 + ay_2 = 0, \\ \dot{y}_2 &= (y_1 - (k_{22} + 1))y_2 - y_1y_3 = 0, \end{aligned}$$

$$\dot{y}_3 = y_1 y_2 - (k_{33} + b)y_3 = 0.$$

当  $(k_{11} + a)(k_{22} + 1) - ac > 0$  时, 修正系统 (14) 有唯一平衡点  $O_1(0, 0, 0)$ , 当  $(k_{11} + a)(k_{22} + 1) - ac < 0$  时, 修正系统 (14) 有平衡点  $O_1(0, 0, 0)$ ,

$$O_{2,3} \left\{ \pm \sqrt{\frac{ac(k_{33} + b)}{k_{11} + a} - (k_{22} + 1)(k_{33} + b)}, \right. \\ \left. \pm \frac{k_{11} + a}{a} \sqrt{\frac{ac(k_{33} + b)}{k_{11} + a} - (k_{22} + 1)(k_{33} + b)}, \right. \\ \left. c - \frac{(k_{11} + a)(k_{22} + 1)}{a} \right\}.$$

### 2.3.1. 平衡点 $O_1(0, 0, 0)$ 的稳定性

在平衡点  $O_1(0, 0, 0)$ , (14) 式的 Jacobin 矩阵

$$J_1 = \begin{pmatrix} -(k_{11} + a) & a & 0 \\ c & -(k_{22} + 1) & 0 \\ 0 & 0 & -(k_{33} + b) \end{pmatrix}. \quad (15)$$

从而其本征方程为

$$\lambda^3 + \lambda^2(k_{11} + k_{22} + k_{33} + b + a + 1) \\ + \lambda[(k_{11} + a)(k_{22} + 1) - ac + (k_{33} + b) \\ \times (k_{11} + a + k_{22} + 1)] \\ + [(k_{11} + a)(k_{22} + 1) - ac](k_{33} + b) \\ = 0, \quad (16)$$

$$d_0 = 1,$$

$$d_1 = k_{11} + a + k_{22} + 1 + k_{33} + b,$$

$$d_2 = (k_{11} + a)(k_{22} + 1) - ac \\ + (k_{33} + b)(k_{11} + a + k_{22} + 1),$$

$$d_3 = [(k_{11} + a)(k_{22} + 1) - ac](k_{33} + b).$$

利用 Routh-Hurwitz 定理得 (15) 式的本征值具有负实部的条件是

$$D_1 = d_1 > 0,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} d_1 & d_3 \\ d_0 & d_2 \end{vmatrix} > 0,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} d_1 & d_3 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & d_1 & d_3 \end{vmatrix} > 0,$$

即当  $(k_{11} + a)(k_{22} + 1) - ac > 0$  时, 平衡点  $O_1$  渐近稳定.

故综合引理 1, 引理 2 和对平衡点稳定性的分析, 可得出定理 1.

**定理 1** 当  $k = \text{diag}\{k_{11}, k_{22}, k_{33}\}$  满足下列条

件时:

$$k_{11} + a > 0,$$

$$k_{22} > \frac{a}{2(k_{11} + a)} \left( \sqrt{\rho_3^2 + (\rho_3 - c)^2 - \rho_3^2} \right. \\ \left. + c - \rho_3 \right) - 1,$$

$$k_{33} > \frac{a\rho_2^2(k_{22} + 1)}{4\bar{\Delta}_l \sqrt{\rho_3^2 + (\rho_3 - c)^2 - \rho_3^2}} - b, \\ (k_{11} + a)(k_{22} + 1) - ac > 0,$$

其中

$$\bar{\Delta}_l = (k_{11} + a)(k_{22} + 1)$$

$$- \frac{a}{2} \left( \sqrt{\rho_3^2 + (\rho_3 - c)^2 - \rho_3^2} + c - \rho_3 \right),$$

第一类广义同步存在.

同样地, 可以得出当耦合矩阵是其他三种情况的条件.

### 2.3.2. 非零平衡点的稳定性

在平衡点  $O_{2,3}$ , 修正方程 (14) 的 Jacobin 矩阵为

$$J_2 = \begin{pmatrix} -(k_{11} + a) & a & 0 \\ \frac{(k_{11} + a)(k_{22} + 1)}{a} & -(k_{22} + 1) & -x_{1,2} \\ y_{1,2} & x_{1,2} & -(k_{33} + b) \end{pmatrix}, \quad (17)$$

对应的其本征方程为

$$\lambda^3 + \lambda^2(k_{11} + k_{22} + k_{33} + b + a + 1) \\ + \lambda(k_{33} + b) \left[ (k_{11} + a) + \frac{ac}{k_{11} + a} \right] \\ + 2ac(k_{33} + b) - 2(k_{11} + a) \\ \times (k_{22} + 1)(k_{33} + b) = 0, \quad (18)$$

$$d_0 = 1,$$

$$d_1 = k_{11} + k_{22} + k_{33} + b + a + 1,$$

$$d_2 = (k_{33} + b) \left[ (k_{11} + a) + \frac{ac}{k_{11} + a} \right],$$

$$d_3 = 2ac(k_{33} + b) \\ - 2(k_{11} + a)(k_{22} + 1)(k_{33} + b).$$

根据 Routh-Hurwitz 定理得 (17) 式具有负实部的条件是

$$D_1 = d_1 > 0,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} d_1 & d_3 \\ d_0 & d_2 \end{vmatrix} > 0,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} d_1 & d_3 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & d_1 & d_3 \end{vmatrix} > 0,$$

也就是当

$$(k_{11} + k_{22} + k_{33} + b + a + 1) \left[ (k_{11} + a) + \frac{ac}{k_{11} + a} \right] > 2[ac - (k_{11} + a)(k_{22} + 1)]$$

时,平衡点  $O_{2,3}$  渐近稳定. 同理可得定理 2.

**定理 2** 当  $k = \text{diag}\{k_{11}, k_{22}, k_{33}\}$  满足下列条件时:

$$k_{11} + a > 0,$$

$$k_{22} > \frac{a}{2(k_{11} + a)} (\sqrt{\rho_3^2 + (\rho_3 - c)^2} - \rho_3 + c - \rho_3) - 1,$$

$$k_{33} > \frac{a\rho_3^2(k_{22} + 1)}{4\bar{\Delta}_l \sqrt{\rho_3^2 + (\rho_3 - c)^2} - \rho_3^2} - b,$$

$$(k_{11} + a)(k_{22} + 1) - ac < 0,$$

$$(k_{11} + k_{22} + k_{33} + b + a + 1) \left[ (k_{11} + a) + \frac{ac}{k_{11} + a} \right] > 2[ac - (k_{11} + a)(k_{22} + 1)],$$

其中

$$\bar{\Delta}_l = (k_{11} + a)(k_{22} + 1) - \frac{a}{2} (\sqrt{\rho_3^2 + (\rho_3 - c)^2} - \rho_3 + c - \rho_3),$$

第二类广义同步存在.

同样地,可以得出当耦合矩阵是  $k = \text{diag}\{k_{11}, 0, 0\}, k = \text{diag}\{0, k_{22}, 0\}, k = \text{diag}\{0, 0, k_{33}\}$  三种情况的条件.

**注** 在定理 2 中,由于实现两系统广义同步化的条件比较保守,所以很难找到符合条件的耦合系数,但数值仿真比较容易实现第二类 GS.

### 3. 仿真例子

下用 Matlab 软件对广义同步的情况进行了仿真,均取  $a_1 = 16, b_1 = 4, c_1 = 45.6$

#### 3.1. 第一类广义同步的仿真

取  $a = 10, b = 8/3, c = 28$ , 耦合系数  $k = (30, 10, 12)$ , 初值  $(x_1, x_2, x_3) = (2, 3.5, 18.4)$ ,  $(y_1, y_2, y_3) = (-1, 10.2, 8.3)$ ,  $(z_1, z_2, z_3) = (-2, 9.2, 7.3)$ , Lorenz 系统的修正方程具有渐近稳定平衡点  $(0, 0, 0)$ , 如图 1, 2, 3.

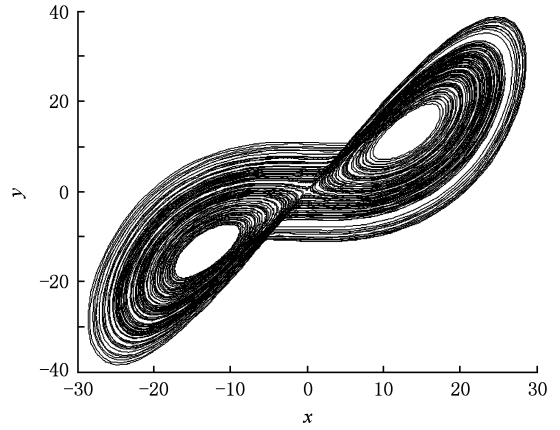


图 1 驱动系统在  $x$ - $y$  平面的投影图

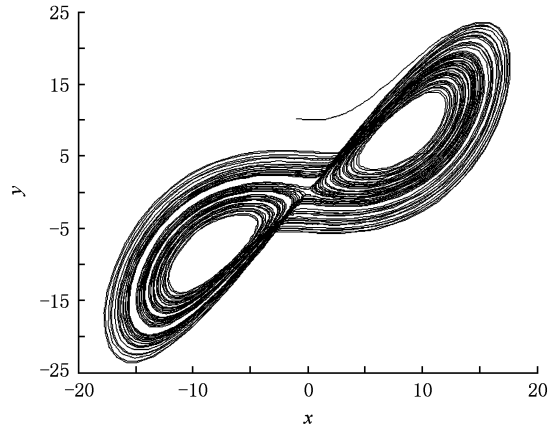


图 2 未加反馈耦合的响应系统  $x$ - $y$  平面的投影图

#### 3.2. 第二类广义同步的仿真

取  $a = 10, b = 8/3, c = 28$ , 耦合系数  $k = (20, 7, 8)$ , 初值  $(x_1, x_2, x_3) = (2, 3.5, 18.4)$ ,  $(y_1, y_2, y_3) = (-1, 10.2, 8.3)$ ,  $(z_1, z_2, z_3) = (-2, 9.2, 7.3)$ , 这时特征方程的 3 个根为  $(-38.2919, -3.0370, -7.3378)$ , 全为负数, 则辅助系统的平衡点是  $(3.7712, 11.3137, 4)$  渐近稳定, 仿真如图 4 (驱动系统和未加反馈耦合的响应系统的仿真见图 1, 2).

#### 3.3. 第三类广义同步的仿真

当  $a = 10, b = 8/3, c = 200$  时, 取耦合矩阵  $k = (0, 0, 3)$ , 此时耦合项为  $k(h \cdot x - y)$ ,  $h = 10.8$  时周期解存在, 大量的仿真表明当  $h > 9.8$  时, 第三类广义同步均存在.  $(x_1, x_2, x_3) = (2, 3.5, 18.4)$ ,  $(y_1, y_2, y_3) = (0.4063, 35.04, 124.5)$ ,  $(z_1, z_2, z_3) = (-2, 9.2, 7.3)$ , 仿真如图 5, 6, 7 (驱动系统的仿真见图 1).

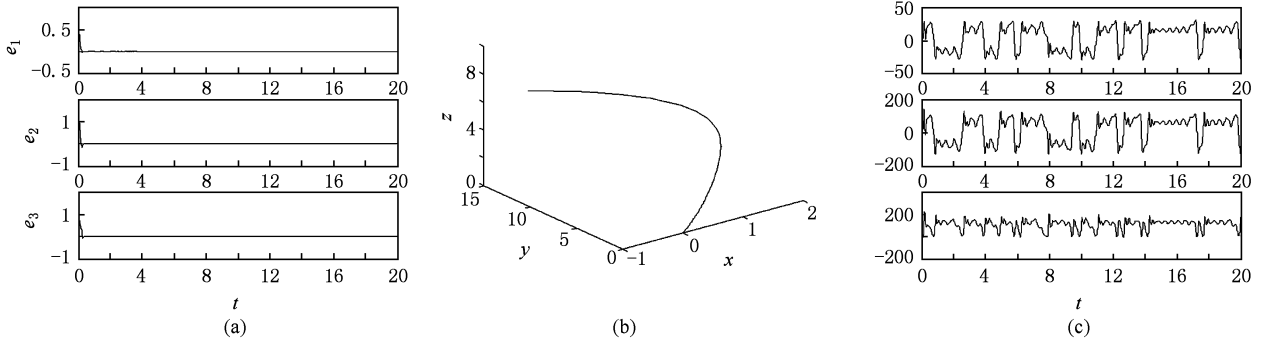


图3 (a) 响应系统和辅助系统的完全同步误差图;(b) 修正方程到达渐近平衡点(0,0,0);  
(c) 驱动系统和响应系统的广义同步误差图

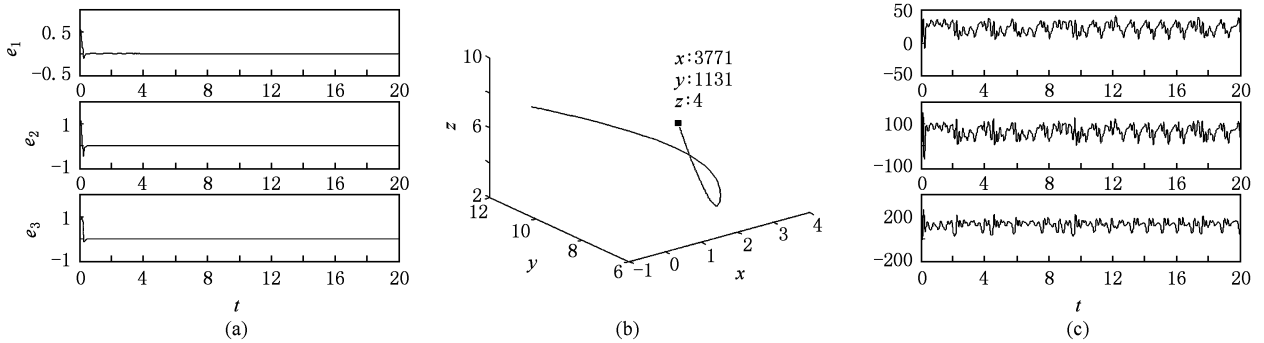


图4 (a) 响应系统和辅助系统的完全同步误差图;(b) 修正方程到达渐近平衡点(3.7712,11.3137,4);  
(c) 驱动系统和响应系统的广义同步误差图

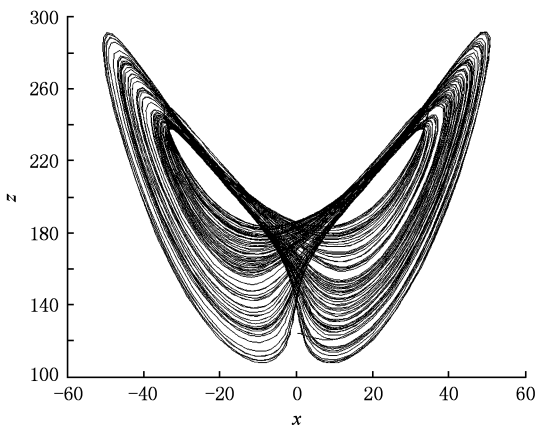


图5 未加耦合反馈的响应系统  $x$ - $z$  平面的投影图

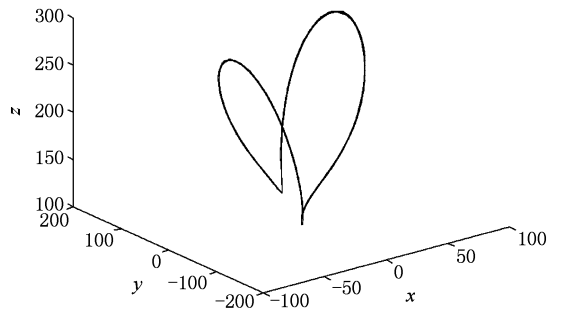


图6 修正方程渐近到达轨道渐近稳定周期解

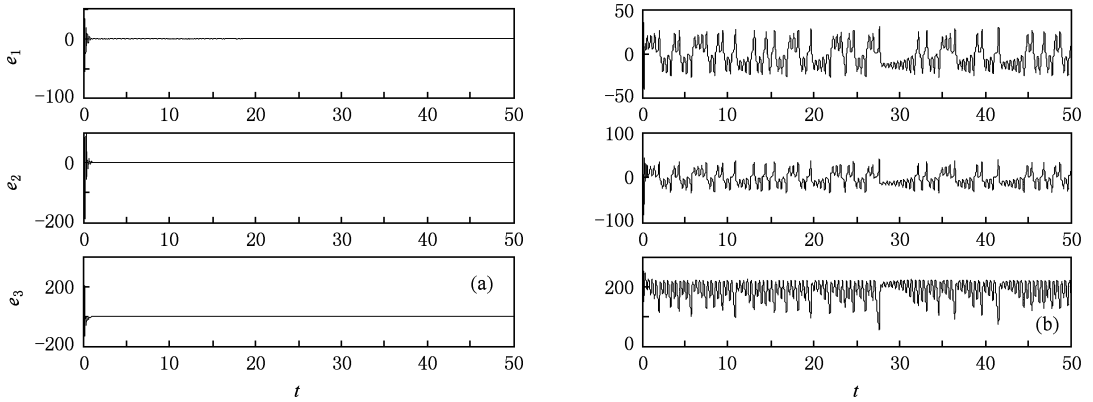


图 7 (a) 响应系统和辅助系统的完全同步误差图; (b) 驱动系统和响应系统的广义同步

## 4. 结 论

本文利用辅助系统方法,给出了单向耦合下两个不同的 Lorenz 系统达到广义同步的条件,并利用

Routh-Hurwitz 定理,具体讨论了第一、二类 GS 的情况,由于第三类 GS 的情况相当复杂,我们将作进一步研究,另文给出.从本文可以看出耦合系数在同步的过程中起着重要的作用,故应尽量扩大耦合系数.

- [1] Pecora L M, Carroll T L 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 821
- [2] Rulkov N F, Sushchik M M, Tsimring L S 1995 *Phys. Rev. E* **51** 980
- [3] Abarbanel H D I, Rulkov N F, Sushchik M M 1996 *Phys. Rev. E* **53** 4528
- [4] Hramov A E, Koronovskii A A 2005 *Phys. Rev. E* **71** 067201
- [5] Min F H, Wang Z Q 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 4026 (in Chinese) [闵富红、王执铨 2005 物理学报 **54** 4026]
- [6] Chen G R, Lü J H 2003 *The Dynamics Analysis, Control and Synchronization of Lorenz Family* (Beijing: Science Press) (in Chinese) [陈关荣、吕金虎 2003 Lorenz 系统族的动力学分析、控制与同步 (北京:科学出版社)]
- [7] Tao C H 2006 *Phys. Lett. A* **348** 201
- [8] Yu Y G, Zhang S C 2004 *Chaos, Solitons and Fractals* **22** 189
- [9] Wu X F, Chen G R, Cai J P 2007 *Physica D* **229** 52
- [10] Li F, Hu A H, Xu Z Y 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 590 (in Chinese) [李芳、胡爱花、徐振源 2006 物理学报 **55** 590]
- [11] Guo L X, Xu Z Y 2008 *Chaos* **18** 033134
- [12] Guo B L 1995 *Nonlinear Evolution Equations* (1st ed) (Shanghai: Shanghai Scientific and Technological Education Publishing House) p208 (in Chinese) [郭柏灵 1995 非线性演化方程 (上海:上海科技教育出版社) 第 208 页]

# Generalized synchronization of two different unidirectional coupled Lorenz systems<sup>\*</sup>

Li Xiao-Juan<sup>†</sup> Xu Zhen-Yuan Xie Qing-Chun Wang Bing

(*School of Science, Jiangnan University, Wuxi 214122, China*)

(Received 5 May 2009; revised manuscript received 9 July 2009)

## Abstract

The generalized synchronization (GS) of two different unidirectional coupled Lorenz systems is studied. According to the method of auxiliary-system, by using the theories of stability and the boundary of the responded system, a sufficient criterion is rigorously proven. Furthermore, based on the modified system approach, GS is classified into three types, the first type, the second type and the third type of GS when the modified system has an asymptotically stable equilibrium of zero solution, asymptotically stable equilibrium of non-zero solution, asymptotically stable limit cycles, respectively. Moreover, using the Routh-Hurwitz theorem to analyze the stability of equilibrium of the modified system, the existence of the first type and the second type of GS are strictly theoretically proved. Numerical simulations show the effectiveness of the method.

**Keywords:** Lorenz system, auxiliary-system, unidirectional coupling, generalized synchronization

**PACC:** 0545

---

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10372054).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: lixiao\_juan@163.com