

基于 Colpitts 振荡器模型生成的多涡卷超混沌吸引子*

包伯成^{1)2)†} 刘 中¹⁾ 许建平³⁾ 朱 雷²⁾

1)(南京理工大学电子工程系,南京 210094)

2)(江苏技术师范学院电气信息工程学院,常州 213001)

3)(西南交通大学电气工程学院,成都 610031)

(2009 年 6 月 19 日收到;2009 年 7 月 12 日收到修改稿)

基于三阶单涡卷混沌 Colpitts 振荡器模型,通过引入两个分段线性三角波函数,构造了一个新型四维多涡卷超混沌系统,生成了 $(2M+1) \times (2N+1)$, $(2M+1)$ 和 $(2N+1)$ 涡卷混沌和超混沌吸引子. 利用相轨图、Poincaré 映射、Lyapunov 指数谱和分岔图等方法,对新提出的四维多涡卷超混沌系统进行了动力学分析,结果表明,多涡卷超混沌系统的 Hopf 分岔点仅与控制参数有关,而涡卷数量和控制参数的混沌和超混沌范围随着转折点数量的增加而增加. 此外,设计了一个实现四维多涡卷超混沌系统的模拟电路,实验输出与数值仿真的两个结果基本一致.

关键词: 多涡卷超混沌吸引子, 三角波函数, 平衡点, 电路实现

PACC: 0545

1. 引 言

上世纪 90 年代初,基于 Chua 电路归一化状态方程, Suykens 和 Vandewalle 通过增加非线性函数曲线的转折点发现了多涡卷混沌吸引子^[1]. 相比于传统的单涡卷和双涡卷混沌系统,多涡卷混沌系统呈现出更为复杂的结构和动力学行为,在保密通信和信息隐藏等领域具有较好的应用前景^[2]. 因此,多涡卷混沌吸引子生成的理论研究和电路实现已成为目前混沌研究领域的热点^[3-28].

已有很多文献通过采用不同的分段线性或者非线性函数改造低维混沌系统,以求获得特征根为指数 2 的涡卷平衡点. Yalcin^[3,4]、吕金虎^[5-11]和禹思敏等人^[13-17]在一个简单的三阶 Jerk 方程或 Chua 电路方程基础上,主要通过加载不同的多转折点分段线性函数进行驱动,实现了一维、二维和三维空间上多涡卷混沌吸引子的生成. 典型的分段线性函数有阶梯函数、饱和函数、三角波函数和滞后函数

等. 近几年来,禹思敏等人^[18,19]在类 Lorenz 系统族方程上,利用多段非线性偶函数替换原系统方程中的非线性二次项,获得了多翼类 Lorenz 混沌吸引子. 另外,禹思敏和王发强等人^[12,25]也对四维多涡卷混沌系统进行了研究,在四维改型 Chua 电路方程上实现了四涡卷超混沌吸引子^[12],这是文献中首次且唯一的关于多涡卷超混沌吸引子研究成果的报道.

以上大多数多涡卷混沌吸引子生成的构造方法较为复杂,求解系统平衡点较为困难,一般难以通过计算系统的 Lyapunov 指数对其动力学进行定量分析. 在实际应用较为广泛的 Colpitts 振荡器^[29]具有电路方程简单的特点,然而目前尚未见到基于 Colpitts 振荡器模型框架下,通过引入分段线性或非线性的方法构造出多涡卷系统,以生成多涡卷吸引子的研究成果报道. 本文基于三阶单涡卷混沌 Colpitts 振荡器模型,采用三角波分段线性函数改造原方程,构造了一个新型的四维多涡卷超混沌系统,并进行了深入细致的理论分析和数值仿真.

* 国家自然科学基金(批准号:50677056,60971090)和江苏省自然科学基金(批准号:BK2009105)资助的课题.

† 通讯联系人. E-mail: mervinbao@126.com

2. 四维多涡卷超混沌系统

2.1. 多涡卷超混沌系统模型

三阶单涡卷混沌 Colpitts 振荡器无量纲状态变量和归一化参数的状态方程可表达为如下形式^[29]:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{g}{Q(1-k)}[-n(y) + z], \\ \dot{y} &= \frac{g}{Qk}z, \\ \dot{z} &= -\frac{Qk(1-k)}{g}[x + y] - \frac{1}{Q}z, \end{aligned} \quad (1)$$

其中

$$n(y) = \exp(-y) - 1 \quad (2)$$

为系统(1)中唯一的非线性函数. 当归一化参数设定为 $k = 0.5$, $Q = 1.4158$, $g = 3.1623$ 时, 系统(1)可产生一个单涡卷混沌吸引子.

采用分段线性函数替换系统(1)中的非线性项, 并增添一维线性控制器, 以分段线性函数形式反馈到系统(1)的第二方程式上, 经简化参数后可得到一个新四维多涡卷混沌系统, 相应的状态方程可表达为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mu[z - n_M(y)], \\ \dot{y} &= \mu[z + n_N(w)], \\ \dot{z} &= -\frac{0.5(x+y)}{\mu} - z, \\ \dot{w} &= x + y, \end{aligned} \quad (3)$$

其中控制参数 $\mu > 0$, $n_M(y)$ 和 $n_N(w)$ 为两个分段线性三角波函数, M 和 N 均为正整数. 这里用 $n_k(\xi)$ 表示一般的三角波函数, 其数学表示式为^[14]

$$\begin{aligned} n_k(\xi) &= \sum_{\substack{k=-K \\ k \neq 0}}^K \frac{p}{2q} \left\{ \left| \xi - p \left(2k - \frac{|k|}{k} \right) + q \right| \right. \\ &\quad \left. - \left| \xi - p \left(2k - \frac{|k|}{k} \right) - q \right| \right\} - \xi, \end{aligned} \quad (4)$$

式中 $p > 0$, $q \in (0, p]$ 称为三角波函数的变参数, K 为正整数. 图 1 给出了 $K = 3$ 时三角波函数 $n_k(\xi)$ 的曲线图例, 从图 1 中可以很容易确定每个线性段的特性, 如斜率和零点. 文献[14]已验证, q 值越小, 每个涡卷混沌吸引子的分布就越均匀. 因此, 在以后的数值仿真和电路仿真中, 我们选择 $q = 0.02p$.

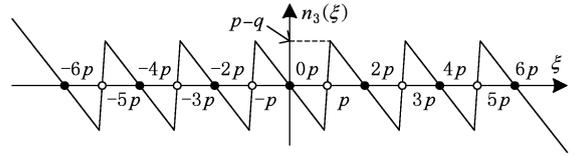


图 1 $K = 3$ 时三角波函数 $n_k(\xi)$ 的曲线图

2.2. 多涡卷混沌和超混沌吸引子

选择系统(3)中三角波函数的参数为 $M = 2$, $N = 1$, $p = 1$, $q = 0.02$.

当 $\mu = 1$ 时, 系统(3)可产生 5×3 涡卷、5 涡卷和 3 涡卷的混沌吸引子, 如图 2 所示, 分别在 $x-w$ 和 $y-w$ 平面上生成了 5×3 涡卷吸引子, $x-y$, $x-z$ 和 $y-z$ 平面上生成了 5 涡卷吸引子, $z-w$ 平面上生成了 3 涡卷吸引子. 此参数值所对应的 Lyapunov 指数分别为 $LE_1 = 0.2602$, $LE_2 = 0$, $LE_3 = -0.589$, $LE_4 = -0.6726$, Lyapunov 维数为 $d_L = 2.2062$.

当 $\mu = 1.7$ 时, 系统(3)则产生了多涡卷的超混沌吸引子, 如图 3 所示, 其超混沌吸引子的涡卷数量与以上各平面上的数量一致, 相应的 Lyapunov 指数分别为 $LE_1 = 0.4327$, $LE_2 = 0.1128$, $LE_3 = -0.6922$, $LE_4 = -0.8534$, Lyapunov 维数为 $d_L = 3.3529$.

图 4 分别给出了 $\mu = 1$ 和 $\mu = 1.7$ 时系统(3)在 $z = 0$ 截面上的 Poincaré 映射. 从图中不难观察到, $\mu = 1$ 时混沌吸引子形成的每个涡卷在截面上的 Poincaré 映射是孤立的; 而 $\mu = 1.7$ 时超混沌吸引子形成的每个涡卷在截面上的 Poincaré 映射逐步连成整个面, 即表示超混沌吸引子在更多方向上分离, 其动力学行为表现得更为复杂.

若选择锯齿波函数序列参数为 $M = N = 5$, 则系统(3)在 $x-w$ 平面和 $y-w$ 平面上生成 11×11 涡卷吸引子, 而在其他平面上则生成 11 涡卷吸引子. 当 $\mu = 1$ 时, 系统(3)在 $y-w$ 平面 11×11 涡卷混沌吸引子的投影如图 5(a) 所示, 其 Lyapunov 指数分别为 $LE_1 = 0.2936$, $LE_2 = 0$, $LE_3 = -0.5655$, $LE_4 = -0.7074$, Lyapunov 维数为 $d_L = 2.2307$. 当 $\mu = 3$ 时, 系统(3)在 $y-w$ 平面 11×11 涡卷超混沌吸引子的投影如图 5(b) 所示, 其 Lyapunov 指数分别为 $LE_1 = 0.9038$, $LE_2 = 0.1826$, $LE_3 = -0.8346$, $LE_4 = -1.2518$, Lyapunov 维数为 $d_L = 3.5207$.

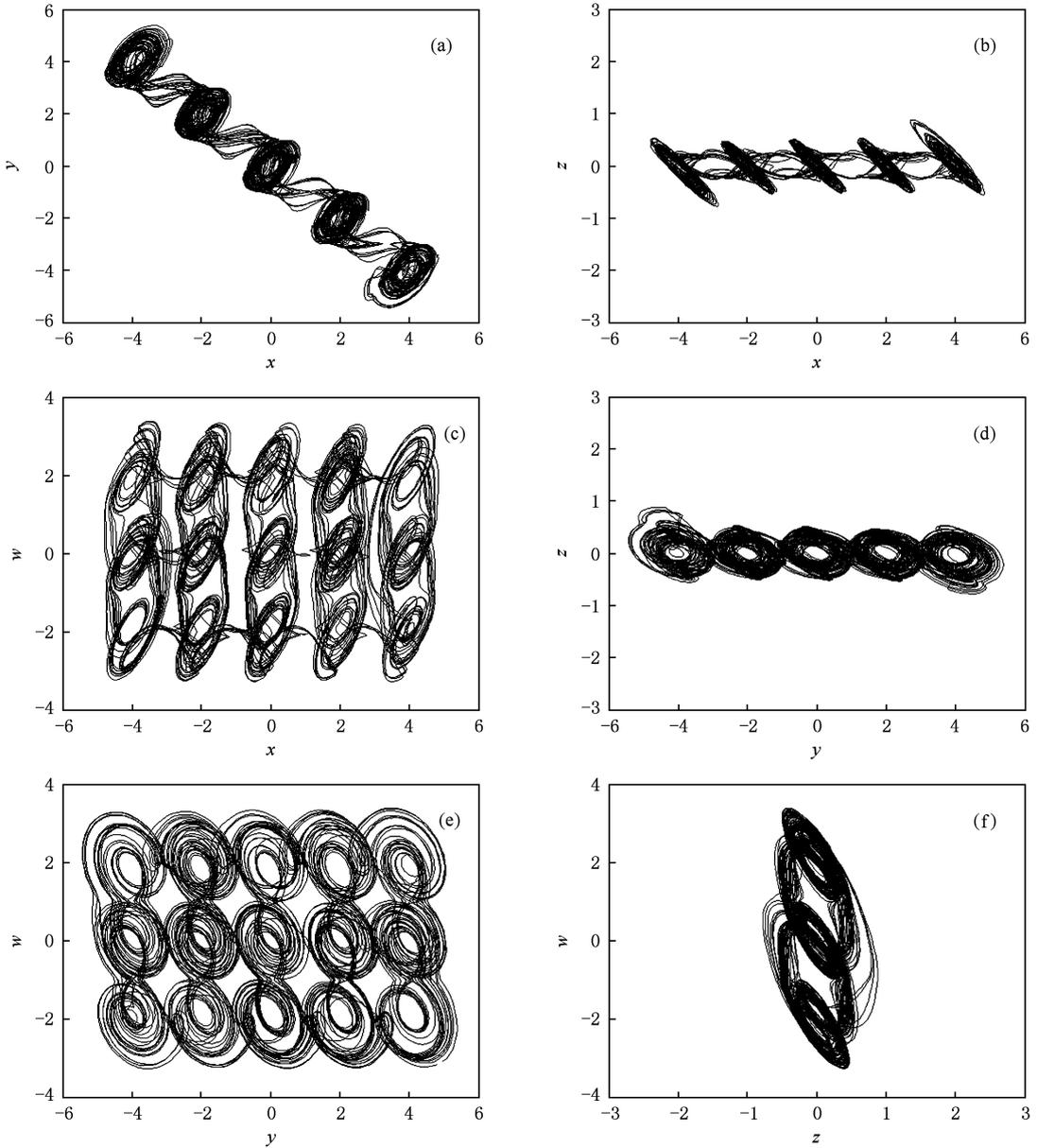


图2 四维多涡卷混沌吸引子($\mu = 1$) (a) x - y 平面5涡卷;(b) x - z 平面5涡卷;(c) x - w 平面 5×3 涡卷;(d) y - z 平面5涡卷;(e) y - w 平面 5×3 涡卷;(f) z - w 平面3涡卷

3. 平衡点和稳定性

以 $M = 4, N = 3, p = 1, q = 0.02$ 为例. 当 $n_M(y) = 0$ 时有 $(4M + 1)$ 个零点, 对应 y 值分别是^E S : $[-8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8]$ 和^O S : $[-7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7]$; 当 $n_N(w) = 0$ 时有 $(4N + 1)$ 个零点, 对应 w 值分别是^E S : $[-6, -4, -2, 0, 2, 4, 6]$ 和^O S : $[-5, -3, -1, 1, 3, 5]$. 这里^E S 和^O S 分别称为偶零点(或涡卷平衡

点)和奇零点(或键波平衡点).

令 $\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = \dot{w} = 0$, 可得 $x = -y, n_M(y) = 0, z = 0, n_N(w) = 0$, 这说明系统(3)的平衡点完全是由两个三角波函数 $n_M(y)$ 和 $n_N(w)$ 的零点形成的. 因此, 四维多涡卷超混沌系统有 $[(2M + 1) \times (2N + 1) + 2M \times 2N]$ 个平衡点, 其中 $(2M + 1) \times (2N + 1)$ 个涡卷平衡点^E $S_{ij} = (-i, i, 0, j)$ 位于 $z = 0$ 的 $x \times w$ 和 $y \times w$ 平面网格上, 这里 $i = 0, \pm 2, \dots, \pm 2M$ 和 $j = 0, \pm 2, \dots, \pm 2N$; 其他 $2M \times 2N$ 个键波平衡点^O $S_{ij} = (-i, i, 0, j)$ 位于 $z = 0$ 的 x

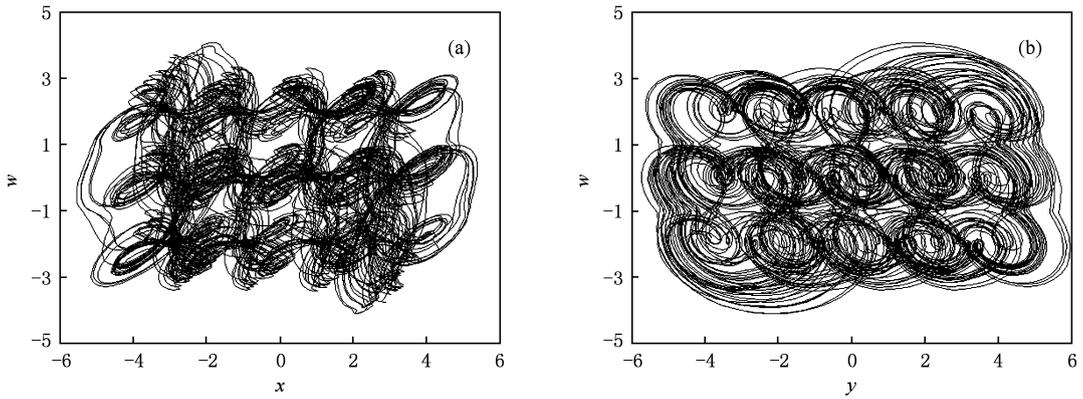


图3 5×3 涡卷超混沌吸引子($\mu = 1.7$) (a) $x-w$ 平面;(b) $y-w$ 平面

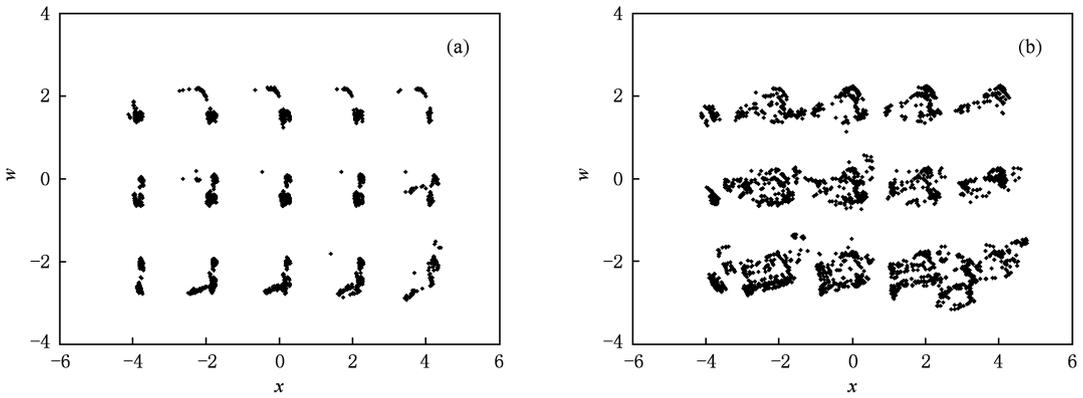


图4 在 $z = 0$ 截面上的 Poincaré 映射 (a) $\mu = 1$;(b) $\mu = 1.7$

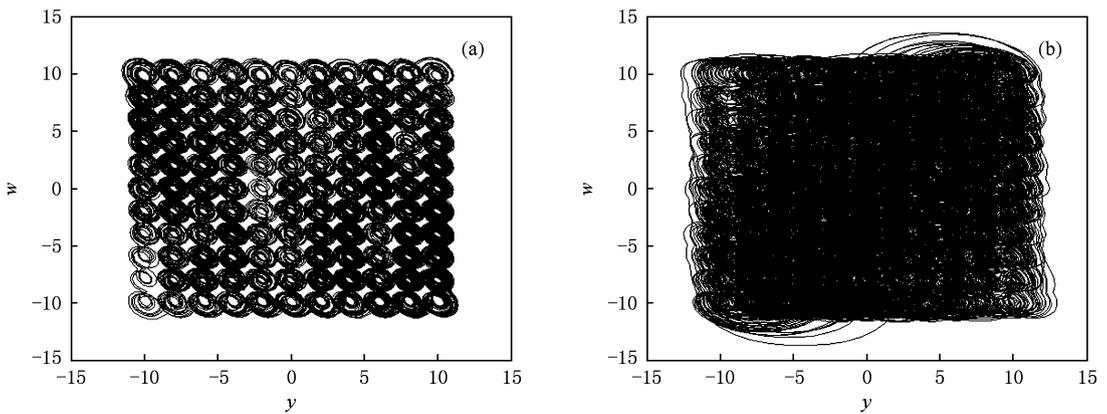


图5 $y-w$ 平面 11×11 涡卷混沌和超混沌吸引子 (a) 混沌吸引子($\mu = 1$);(b) 超混沌吸引子($\mu = 3$)

$\times w$ 和 $y \times w$ 平面网格上,这里 $i = \pm 1, \dots, \pm(2M - 1)$ 和 $j = \pm 1, \dots, \pm(2N - 1)$. 当 $M = 4, N = 3, p = 1, q = 0.02$ 时,在 $y \times w$ 平面网格上,系统 (3) 的平衡点分布如图 6 所示,图中偶平衡点^E S 用 ‘○’ 来标注,奇平衡点^O S 用 ‘●’ 来标注. 图 6 中系

统 (3) 有 $63 + 35$ 个平衡点,其中 9×7 个涡卷平衡点产生了 63 个涡卷数量的混沌吸引子,同时还有 7×5 个键波平衡点.

系统 (3) 在平衡点 $S^* = (x^*, y^*, z^*)$ 处的 Jacobi 矩阵为

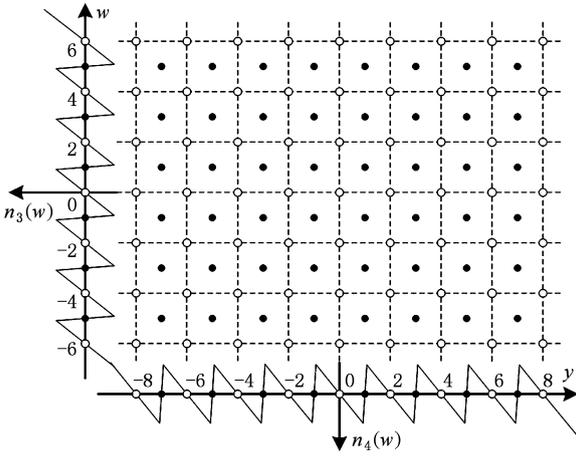


图6 系统(3)在 $y \times w$ 平面网格上的平衡点

$$J_{S^*} = \begin{bmatrix} 0 & -\mu n_M^J(y^*) & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu & \mu n_N^J(w^*) \\ -\frac{0.5}{\mu} & -\frac{0.5}{\mu} & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{5}$$

式中 $n_M^J(y^*) = dn_M(y)/dy|_{y^*}$, $n_N^J(w^*) = dn_N(w)/dw|_{w^*}$.

在 ξ^* 处对(4)式求偏导得

$$n_k^J(\xi^*) = \left. \frac{dn_k(\xi)}{d\xi} \right|_{\xi^*} = \sum_{k \neq 0}^K \frac{p}{2q} \left\{ \operatorname{sgn} \left[\xi^* - p \left(2k - \frac{|k|}{k} \right) + q \right] - \operatorname{sgn} \left[\xi^* - p \left(2k - \frac{|k|}{k} \right) - q \right] \right\} - 1, \tag{6}$$

这里 ξ^* 代表 y^* 或 w^* . 若 $\xi^* = 2k$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm K$), 则有 $n_k^J(\xi^*) = -1$; 或若 $\xi^* = (2k - |k|/k)p$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm K$), 则有

$$n_k^J(\xi^*) = \frac{p}{q} - 1.$$

对涡卷平衡点^E S , 有 $n_M^J(y^*) = n_N^J(w^*) = -1$, 在此平衡点附近线性化系统得到以下特征方程:

$$f(\lambda) = \lambda^4 + \lambda^3 + (1 + \mu)\lambda^2 + \mu(1.5 + \mu)\lambda + \mu^2 = 0. \tag{7}$$

注意到该四次多项式的系数在 $\mu > 0$ 时均为正数, 因此对所有 $\lambda > 0$ 都有 $f(\lambda) > 0$. 根据 Routh-Hurwitz 稳定判据, 系统稳定的充分必要条件是

$$(1 + \mu) - \mu(1.5 + \mu) > 0,$$

$$\mu(1.5 + \mu) [(1 + \mu) - \mu(1.5 + \mu)] - \mu^2 > 0.$$

即

$$\begin{aligned} \mu^2 + 0.5\mu - 1 &< 0, \\ \mu^3 + 2\mu^2 + 0.75\mu - 1.5 &< 0. \end{aligned} \tag{8}$$

数值计算表明当 $\mu > 0.6263$ 时, 系统不能满足(8)式的充分必要条件, 即系统不稳定, 这时方程式(7)有两个负实根(或两个实部为负数的共轭复根)和两个实部为正数的共轭复根. 因此, $\mu = 0.6263$ 是 Hopf 分岔的临界点, 当 $\mu > 0.6263$ 时系统所有涡卷平衡点^E S 为指数 2 的不稳定鞍结.

当 $\mu = 1$ 和 $\mu = 3$ 时, 系统(3)的涡卷平衡点^E S 的四个特征根分别是

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= 0.1779 \pm i1.3946, \\ \lambda_{3,4} &= -0.6779 \pm i0.2152; \\ \lambda_{1,2} &= 0.7452 \pm i2.3923, \\ \lambda_3 &= -0.903, \\ \lambda_4 &= -1.5875. \end{aligned} \tag{9}$$

对键波平衡点^O S , 有 $n_M^J(y^*) = n_N^J(w^*) = \frac{p}{q} - 1$, 在此平衡点附近线性化系统得到的特征方程为

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \lambda^4 + \lambda^3 + [1 - \mu(\frac{p}{q} - 1)]\lambda^2 \\ &+ \mu(\frac{p}{q} - 1)[\mu(\frac{p}{q} - 1) - 1.5]\lambda \\ &+ \mu^2(\frac{p}{q} - 1)^2 = 0. \end{aligned} \tag{10}$$

可以验证, 当 $\mu > 0$ 时, 方程式(10)有两个负实根(或两个实部为负数的共轭复根)和两个实部为正数的共轭复根. 同样, 当 $\mu > 0$ 时系统所有键波平衡点^O S 为指数 2 的不稳定鞍结.

设定 $p = 1, q = 0.02$, 当 $\mu = 1$ 和 $\mu = 3$ 时, 系统(3)的键波平衡点^O S 的四个特征根分别是

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= 7.2732 \pm i10.5146, \\ \lambda_3 &= -1.0105, \\ \lambda_4 &= -14.5359; \\ \lambda_{1,2} &= 14.7854 \pm i22.5771, \\ \lambda_3 &= -1.0034, \\ \lambda_4 &= -29.5674. \end{aligned}$$

4. 多涡卷超混沌系统动力学分析

从上面分析可知, $\mu = 0.6263$ 是 Hopf 分岔的

临界点, 当 $\mu > 0.6263$ 时系统 (3) 是不稳定的, 随着参数的改变, 系统 (3) 将处于混沌和超混沌两个不同的运行状态. 下面利用数值仿真手段, 分析参数变化时, 系统 (3) 的变化情况.

以两个三角波函数参数分别为 $M = 2, N = 1$ 和 $M = N = 5$ 时为例, 系统 (3) 随 μ 变化的

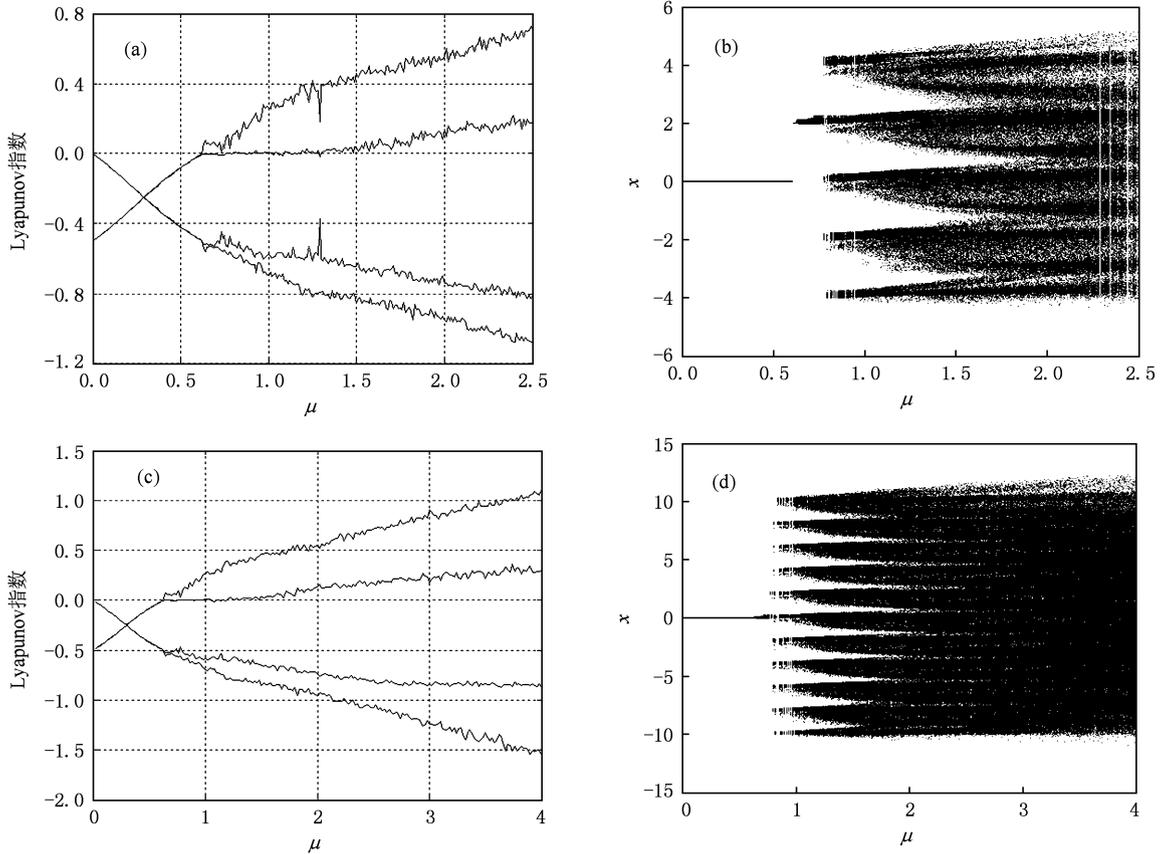


图7 系统(3)随 μ 变化的 Lyapunov 指数谱和分岔图 (a) Lyapunov 指数($M = 2, N = 1$); (b) 分岔图($M = 2, N = 1$); (c) Lyapunov 指数($M = N = 5$), (d) 分岔图($M = N = 5$)

当 μ 逐渐增加时, 系统 (3) 的 Lyapunov 指数有着不同的值, 这意味着系统 (3) 在不同的参数 μ 下有着不同的动力学行为. 随 μ 增加时, 系统 (3) 的运行状态主要演变历经了以下的轨道状态:

1) 当 $0 < \mu < 0.6263$ 时, 有 $LE_{1,2,3,4} < 0$, 系统 (3) 是一个稳定的汇.

2) 当 $\mu = 0.6263$ 时, 有 $LE_{1,2} = 0, LE_{3,4} < 0$, 为系统 (3) 的 Hopf 分岔点.

3) 当 $\mu > 0.6263$ 时, 有 $LE_1 > 0, LE_2 \geq 0, LE_{3,4} < 0$, 系统 (3) 逐步从混沌状态过渡到超混沌状态, 并且随着控制参数值增大, 多个混沌带渐渐靠拢, 最后连成一片形成了一个整体. 这是吸引子在相空间中的运行轨迹在更多方向上伸展和收缩

Lyapunov 指数谱和对应的状态变量 x 的分岔图如图 7 所示. 显然, 分岔图与 Lyapunov 指数谱保持很好的一致性. 从图中不难看出, 三角波函数参数不同时, Hopf 分岔点位置总是一致, 不同点在于系统 (3) 处于混沌状态时混沌带数量不一样, 且参数值越大, 系统趋向发散时的控制参数值越大.

的结果. 需注意的是, 在 $0.6263 < \mu \leq 0.78$ 区间内, 系统 (3) 只在含坐标 w 的平面上生成 $(2N + 1)$ 涡卷混沌吸引子, 而在其他平面上则只显示单涡卷混沌吸引子.

观察图 7 可以明显地看到, 系统 (3) 在 $\mu > 0.6263$ 的参数区间内, 其混沌或超混沌状态是鲁棒稳定的, 这对其在基于混沌的信息系统和通信工程的应用是十分有价值的.

5. 电路实现和实验验证

本文设计了一个实现四维多涡卷超混沌系统的模拟电路, 选择 TI 公司的 TL082CP 运算放大器

完成多涡卷混沌系统方程中的加减运算、积分运算和三角波函数实现等功能. TL082CP 运算放大器的

电源电压 $\pm 15\text{ V}$, 输出饱和值为 $V_{\text{sat}} = \pm 13.5\text{ V}$. 图 8 的电路为 $K = 1$ 和 $K = 2$ 的三角波函数

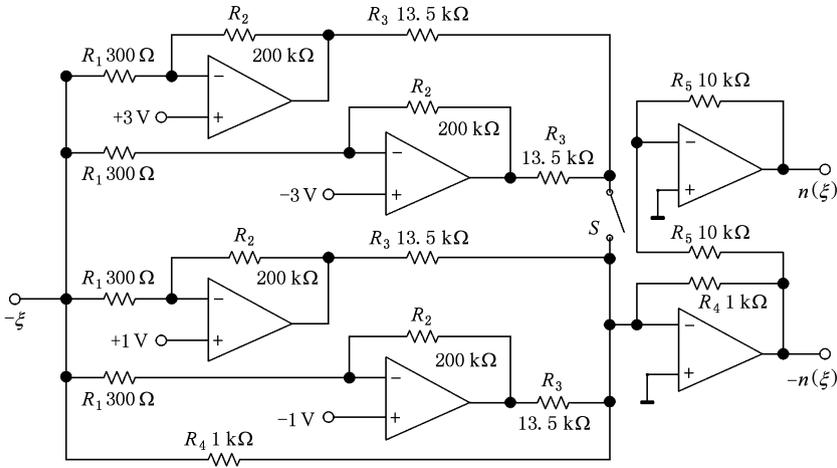


图 8 $K = 1$ 和 $K = 2$ 时的三角波函数电路

电路. 如果将图 8 中的开关 S 闭合, 那么所得到的电路为 $K = 2$ 的三角波函数电路. 图中电阻 R_1 和 R_2 决定了 q 的大小, 其数学关系可以表示为

$$q = \frac{R_1}{R_2} |V_{\text{sat}}| = \frac{300}{200 \times 10^3} \times 13.5 \approx 0.02.$$

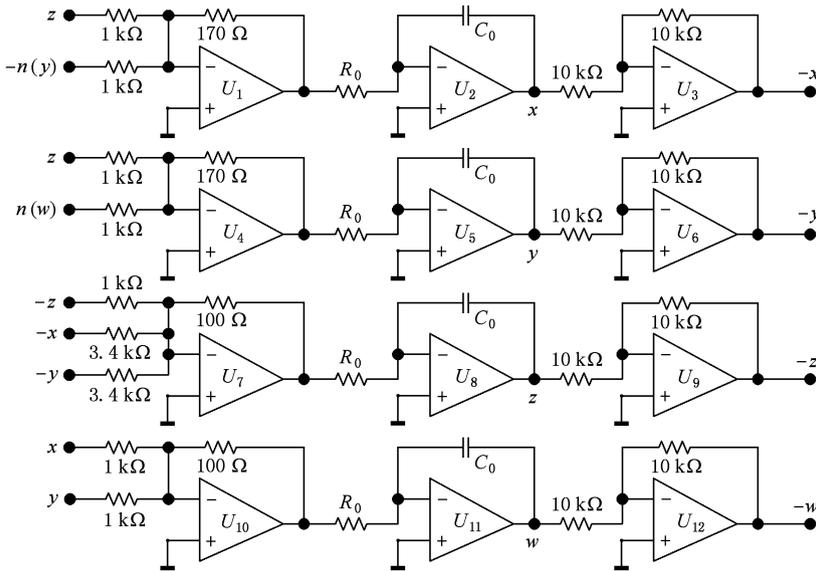


图 9 基本的四维系统电路

图 9 为基本的四维线性系统电路. 图中 R_0, C_0 为积分器的积分常数, 同时也是时间尺度变换因子, 固定 R_0 不变, 改变 C_0 的大小, 可改变时间尺度变换因子, 从而可改变混沌信号的频谱范围. 在电路实验中, 取 $R_0 = 2\text{ k}\Omega$, $C_0 = 33\text{ nF}$. 图 9 中 U_1 和 U_4 运算放大器的反馈电阻和反向输入端的电阻比值相等, 决定了 μ 的大小, 图示电路参数表明 $\mu = 1.7$.

把图 8 中 $K = 1$ 和 $K = 2$ 所对应的两路电路连接到图 9 所示电路, 即可实现一个多涡卷超混沌电路. 利用 Tektronix 数字存储示波器观察该电路的输出波形, 运算放大器 U_2 与 U_{11} 输出端的相轨图如图 10(a) 所示, U_5 与 U_{11} 输出端的相轨图如图 10(b) 所示.

图 10 电路实验输出结果与图 3 数值仿真结果完全一致. 该结果证实了基于 Colpitts 振荡器模型所

提出的多涡卷超混沌系统是一个可电路实现的系

统, 可以由实际电路产生多涡卷超混沌吸引子.

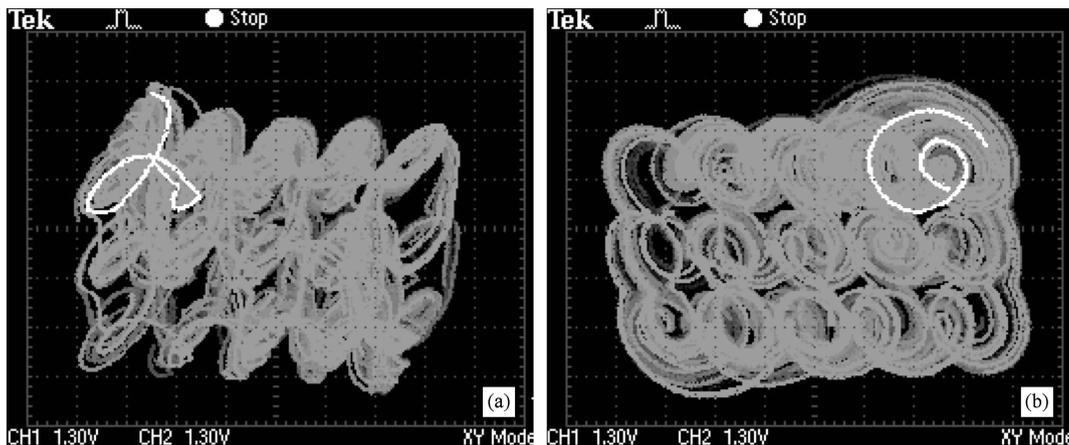


图 10 电路实现的 5×3 涡卷超混沌吸引子 (a) U_2 与 U_{11} 输出端的相轨图; (b) U_5 与 U_{11} 输出端的相轨图

6. 结 论

基于三阶单涡卷混沌 Colpitts 振荡器模型, 采用分段线性三角波函数改造状态方程, 构造了一个新型四维多涡卷超混沌系统. 转折点的增加, 致使新系统产生较多数量的指数 2 的平衡点分布, 由此实现了 $(2M + 1) \times (2N + 1)$, $(2M + 1)$ 和 $(2N + 1)$ 涡卷混沌和超混沌吸引子. 新型四维超混沌系统具有以下显著特性:

1. 系统状态方程简单, 只有单一的控制参数, 三角波函数直观易数学表达;
2. 系统具有 $[(2M + 1) \times (2N + 1) + 2M \times 2N]$

个平衡点, 其中 $(2M + 1) \times (2N + 1)$ 个指数 2 的涡卷平衡点, 对应于每个涡卷吸引子, 其吸引子的涡卷数量和在网络点上的位置可控;

3. 在较宽的控制参数区间内, 系统处于稳定的混沌或超混沌状态, 具有鲁棒性.

此外, 通过对平衡点的稳定性分析, 发现偶零点 (或涡卷平衡点) 和奇零点 (或键波平衡点) 均为指数 2 的不稳定鞍结, 并计算出了系统 Hopf 分岔的临界点为 $\mu = 0.6263$. 根据相轨图、Lyapunov 指数谱和分岔图等仿真手段, 本文进行了该多涡卷超混沌系统的动力学特性研究, 并设计了一个多涡卷超混沌电路, 通过实验观察结果验证了提出的多涡卷超混沌系统是一个可电路实现的系统.

[1] Suykens J A K, Vandewalle J 1993 *IEEE Trans. Circuits Syst. I* **40** 861

[2] Yalcin M 2007 *Int. J. Bifur. Chaos* **17** 4471

[3] Yalcin M, Suykens J, Vandewalle J, Mözoguz S 2002 *Int. J. Bifur. Chaos* **12** 23

[4] Yalcin M, Mözoguz S 2007 *Chaos* **17** 033112

[5] Lü J H, Yu X H, Chen G R 2003 *IEEE Trans. Circuits Syst. I* **50** 198

[6] Lü J H, Chen G R, Yu X H, Leung H 2004 *IEEE Trans. Circuits Syst. I* **51** 2476

[7] Lü J H, Han F L, Yu X H, Chen G R 2004 *Automatica* **40** 1677

[8] Lü J H, Murali K, Sinha S, Leung H, Aziz-Alaoui MA 2008 *Physics Letters A* **372** 3234

[9] Lü J H, Yu S M, Leung H, Chen G R 2006 *IEEE Trans. Circuits Syst. I* **53** 149

[10] Lü J H, Chen G R 2006 *Int. J. Bifur. Chaos* **16** 775

[11] Deng W H, Lü J H 2006 *Chaos* **16** 043120

[12] Yu S M, Lin Q H, Qiu S S 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 25 (in Chinese) [禹思敏、林清华、丘水生 2003 物理学报 **52** 25]

[13] Yu S M, Lin Q H, Qiu S S 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2084 (in Chinese) [禹思敏、林清华、丘水生 2004 物理学报 **53** 2084]

[14] Yu S M 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 1500 (in Chinese) [禹思敏 2005 物理学报 **54** 1500]

[15] Yu S M, Lü J H, Tang W K S, Chen G R 2006 *Chaos* **16** 033126

[16] Yu S M, Lü J H, Leung H, Chen G R 2005 *IEEE Trans. Circuits Syst. I* **52** 1459

[17] Liu M H, Yu S M 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 5707 (in Chinese) [刘明华、禹思敏 2006 物理学报 **55** 5707]

[18] Yu S, Tang W K S, Lü J H, Chen G R 2008 *IEEE Trans. Circuits Syst. II* **55** 1168

- [19] Yu S M, Tang W K S, Lü J H, Chen G R 2008 *Int. J. Circuit Theory and Appl.* DOI: 10.1002/cta.558
- [20] Radwan A, Soliman A, Elwakil A 2007 *Int. J. Bifur. Chaos* **17** 227
- [21] Gandhi G, Roska T 2008 *Int. J. Circuit Theory and Appl.* DOI: 10.1002/cta.487
- [22] Wang F Q, Liu C X 2007 *Chin. Phys.* **16** 942
- [23] Wang F Q, Liu C X 2006 *Chin. Phys.* **15** 2878
- [24] Wang F Q, Liu C X 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 1983 (in Chinese) [王发强、刘崇新 2007 物理学报 **56** 1983]
- [25] Wang F Q, Liu C X, Lu J J 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3289 (in Chinese) [王发强、刘崇新、逯俊杰 2006 物理学报 **55** 3289]
- [26] Chen L, Peng H J, Wang D S 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 3337 (in Chinese) [谌龙、彭海军、王德石 2008 物理学报 **57** 3337]
- [27] Zhang C X, Yu S M 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 120 (in Chinese) [张朝霞、禹思敏 2009 物理学报 **58** 120]
- [28] Luo X H, Li H Q, Dai X G 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 7511 (in Chinese) [罗小华、李华青、代祥光 2008 物理学报 **57** 7511]
- [29] Maggio G M, Feo O D, Kennedy M P 1999 *IEEE Trans. Circuits Syst.* **1** **46** 1118

Generation of multi-scroll hyperchaotic attractor based on Colpitts oscillator model*

Bao Bo-Cheng^{1)2)†} Liu Zhong¹⁾ Xu Jian-Ping³⁾ Zhu Lei²⁾

1) (Department of Electronic Engineering, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China)

2) (School of Electrical and Information Engineering, Jiangsu Teachers University of Technology, Changzhou 213001, China)

3) (School of Electrical Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China)

(Received 19 June 2009; revised manuscript received 12 July 2009)

Abstract

Based on third-order spiral chaotic Colpitts oscillator model, by introducing two piecewise-linear triangular function, a novel four-dimensional multi-scroll hyperchaotic system is constructed, which can generate $(2M + 1) \times (2N + 1)$, $(2M + 1)$ and $(2N + 1)$ -scroll chaotic and hyperchaotic attractors. By using phase portrait, Poincaré mapping, Lyapunov exponent spectrum and bifurcation diagram, the dynamical behaviors of the proposed multi-scroll hyperchaotic system are analyzed. These results indicate that Hopf bifurcation point of multi-scroll hyperchaotic system is only related with the control parameter, but its scroll number and ranges of the control parameter for chaotic and hyperchaotic states increase along with the number of turning points. Furthermore, an analog circuit was designed to realize the four-dimensional multi-scroll hyperchaotic system. The results of experimental output and numerical simulation are basically the same.

Keywords: multi-scroll hyperchaotic attractor, triangular function, equilibrium, circuit realization

PACC: 0545

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 50677056, 60971090) and the Natural Science Foundation of Jiangsu Province, China (Grant No. BK2009105).

† Corresponding author. E-mail: mervinbao@126.com