第 59 卷 第 3 期 2010 年 3 月
1000-3290/2010/59(03)/1549-05

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol. 59, No. 3, March, 2010

基于线性控制的分数阶统一混沌系统的同步*

张若洵[1)2)3)]　杨世平[1)2)†]　刘永利[3)]

1)(河北师范大学物理科学与信息工程学院,石家庄　050016)

2)(河北省新型薄膜材料实验室,石家庄　050016)

3)(邢台学院初等教育学院,邢台　054001)

(2009 年 5 月 24 日收到;2009 年 6 月 26 日收到修改稿)

研究了分数阶统一混沌系统的同步. 基于分数阶稳定性原理,提出了通过线性反馈实现分数阶统一混沌系统的同步方法. 所设计的控制器为单一控制变量的线性控制器,且不需要计算反馈系数. 通过对分数阶 Lorenz 混沌系统、Chen 混沌系统和 Lü 混沌系统的数值模拟,证实了所提方法的有效性.

关键词: 分数阶统一混沌系统, 混沌同步, 线性控制

PACC: 0545

1. 引　言

分数阶微积分已有 300 多年的历史,其发展几乎与整数阶微积分同步, 但将其应用到物理学和工程学的研究热潮还是最近几十年兴起的. 许多物理系统能展现出分数阶动力学行为, 例如, 黏滞系统、介质极化、电极-电解液极化、(电缆的)管道边界层效应、有色噪声和电磁波等. 最近, 分数阶混沌系统又引起人们广泛的兴趣和深入的研究. Chua 电路[1]、Lorenz 系统[2]、Chen 系统[3—5]、Lü 系统[6]、Liu 系统[7—9]、Duffing 系统[10]、Sprott 系统[11,12]以及 Rossler 混沌和超混沌系统[13]、新超混沌系统[14]中, 通过计算机数值仿真发现,当系统的阶数为分数的时候,系统仍呈现混沌状态,且更能反映系统所呈现的物理现象.

最近,分数阶混沌系统的同步控制由于在保密通信[15]、信号处理和系统控制及其他领域比整数阶混沌系统拥有更突出、更诱人的应用前景和发展前途,已引起广泛关注. 人们提出了许多分数阶混沌系统的同步方法,如驱动-响应法[16]、滑动模杆控制法[17]、Lyapunov 方程法[18]、自适应控制法[19]、主动控制法[20]和非线性反馈控制法[21]等. 上述各种控制方法中的同步控制器都是非线性的,在实际应用中,线性反馈控制器是经济的和工程上易于实现的,具有很高的应用价值. 基于分数阶稳定性原理,我们设计了线性反馈控制器,实现了分数阶统一混沌系统的同步. 该同步方法可以很容易地推广到其他相似分数阶混沌系统, 如分数阶 Liu 混沌系统[22]、分数阶广义 Lorenz 系统[23]和共轭分数阶 Chen 系统[24]等.

2. 基于线性控制的分数阶统一混沌系统的同步理论分析与数值模拟

在分数阶微积分的研究过程中,对分数阶导数的概念有多种定义,本文采用 Caputo 微分定义[25]来研究分数阶混沌动力学行为,Caputo 微分定义为

$$D_*^{\alpha} y(x) = J^{m-\alpha} y^{(m)}(x), \quad \alpha > 0, \tag{1}$$

这里 $m = \lceil \alpha \rceil$, 为第一个不小于 α 的整数, $y^{(m)}$ 为 y 的 m 阶导数, J^{β} 是 β 阶 Riemann-Liouville 积分算子,

$$J^{\beta} z(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^x (x-t)^{\beta-1} z(t)\,\mathrm{d}t, \quad \beta > 0, \tag{2}$$

其中 $\Gamma(\cdot)$ 是 Gamma 函数. D_*^{α} 通常称为 α 阶 Caputo 微分算子.

2.1. 系统数学模型与问题描述

2002 年, 吕金虎等人提出了一个新的混沌系

* 河北省自然科学基金(批准号: A2008000136)和河北省科技支撑计划项目(批准号: 2009SP099)资助的课题.

† E-mail: yangship@ mail. hebnu. edu. cn

统，该系统将 Lorenz 吸引子和 Chen 吸引子连接起来，而文献[26]提出的 Lü 系统只是它的一个特例，故文献[27]称其为统一混沌系统. 统一混沌系统的数学模型可写为

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= (25\alpha + 10)(x_2 - x_1),\\
\dot{x}_2 &= (28 - 35\alpha)x_1 - x_1x_3 + (29\alpha - 1)x_2,\\
\dot{x}_3 &= x_1x_2 - (8 + \alpha)x_3/3,
\end{aligned}
\tag{3}
$$

其中系统参数 $\alpha \in [0,1]$. 统一混沌系统是一个由单参数控制的连续混沌系统，具有统一性和全域性混沌特性. 系统只用一个参数 α 就可以控制整个系统，当 $\alpha \in [0,\ 0.8)$ 时，统一系统属于广义 Lorenz 系统；当 $\alpha \in (0.8, 1]$ 时，统一系统属于广义 Chen 系统；而当 $\alpha = 0.8$ 时，统一系统属于 Lü 系统. 统一系统具有连接 Lorenz 系统和 Chen 系统的重要作用，当 α 由零逐渐增加到 1 时，系统也由广义的 Lorenz 系统逐渐过渡到广义的 Chen 系统，具有统一性.

分数阶统一混沌系统[28]有如下形式：

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^q x_1}{\mathrm{d}t^q} &= (25\alpha + 10)(x_2 - x_1),\\
\frac{\mathrm{d}^q x_2}{\mathrm{d}t^q} &= (28 - 35\alpha)x_1 - x_1x_3 + (29\alpha - 1)x_2,\\
\frac{\mathrm{d}^q x_3}{\mathrm{d}t^q} &= x_1x_2 - \frac{8 + \alpha}{3}x_3,
\end{aligned}
\tag{4}
$$

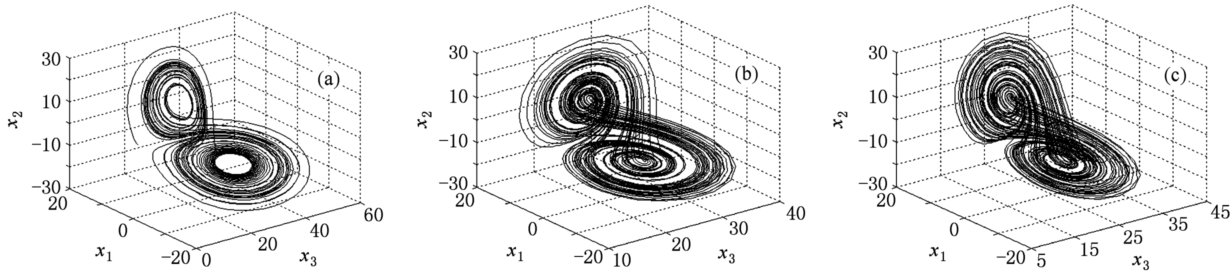

图 1 分数阶统一混沌系统的吸引子 (a) $q = 0.995$, $\alpha = 0$；(b) $q = 0.9$, $\alpha = 0.8$；(c) $q = 0.9$, $\alpha = 1$

其中，$0 < q < 1$，不同的 α 值的分数阶统一混沌系统的吸引子如图 1 所示.

以系统(4)为驱动系统，响应系统为

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^q y_1}{\mathrm{d}t^q} &= (25\alpha + 10)(y_2 - y_1) + u_1,\\
\frac{\mathrm{d}^q y_2}{\mathrm{d}t^q} &= (28 - 35\alpha)y_1 - y_1y_3\\
&\quad + (29\alpha - 1)y_2 + u_2,\\
\frac{\mathrm{d}^q y_3}{\mathrm{d}t^q} &= y_1y_2 - \frac{8 + \alpha}{3}y_3.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

我们的目标就是选取合适的控制器 u_1，u_2，使响应系统(5)和驱动系统(4)达到同步.

2.2. 基于线性控制的分数阶统一混沌系统的同步理论

文献[29]研究了分数阶线性系统的稳定问题，给出了分数阶线性系统稳定性理论.

引理 1 考虑线性分数阶系统

$$
\frac{\mathrm{d}^q x}{\mathrm{d}t^q} = Ax,
\tag{6}
$$

其中，$0 < q < 1$，$x \in R^n (n \in N)$，$A \in R^{n\times n}$. 当且仅当矩阵 A 的任意特征值 λ，满足 $|\arg(\lambda)| > q\pi/2$ 时，系统(6)是渐近稳定的.

由引理 1 的证明过程，我们可得出如下推论.

推论 1 对于非线性分数阶系统

$$
\frac{\mathrm{d}^q x}{\mathrm{d}t^q} = A(x)x,
\tag{7}
$$

其中，$0 < q < 1$，$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$ 为状态向量，$A(x) \in R^{n\times n}$ 是系数矩阵. 当含有状态变量的系数矩阵 $A(x)$ 的所有特征值 $\lambda_i (i = 1,2,\cdots,n)$ 实部都不大于零，即 $|\arg(\lambda_i)| > q\pi/2$ 时，系统(7)是渐近稳定的.

定理 设系统(5)和(4)的误差 $e_1 = y_1 - x_1$，$e_2 = y_2 - x_2$，$e_3 = y_3 - x_3$. 若选取控制器 $u_1 = -(25\alpha + 10)e_2$，$u_2 = -29\alpha e_2$ （$\alpha = 0$ 时，$u_2 = 0$）.
则响应系统(5)和驱动系统(4)同步. 即 $\lim\limits_{t\to\infty} e_i = 0 (i = 1,2,3)$.

证明 由(5)，(4)式得误差系统为

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^q e_1}{\mathrm{d}t^q} &= -(25\alpha + 10)e_1,\\
\frac{\mathrm{d}^q e_2}{\mathrm{d}t^q} &= (28 - 35\alpha)e_1 - x_1e_3 - y_3e_1 - e_2,
\end{aligned}
$$

$$\frac{\mathrm{d}^q y_3}{\mathrm{d}t^q} = x_1 e_2 + y_2 e_1 - \frac{8+\alpha}{3} e_3, \tag{8}$$

即

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\mathrm{d}^q e_1}{\mathrm{d}t^q} \\ \dfrac{\mathrm{d}^q e_2}{\mathrm{d}t^q} \\ \dfrac{\mathrm{d}^q e_3}{\mathrm{d}t^q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(25\alpha+10) & 0 & 0 \\ 28-35\alpha-y_3 & -1 & -x_1 \\ y_2 & x_1 & -\dfrac{8+\alpha}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$$

$$= A \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

通过计算，得 A 的特征值为

$$\lambda_1 = -(25\alpha+10),$$

$$\lambda_{2,3} = \frac{-\dfrac{11+\alpha}{3} \pm \sqrt{\left(\dfrac{11+\alpha}{3}\right)^2 - 4\left(\dfrac{8+\alpha}{3} + x_1^2\right)}}{2}.$$

由于 $\alpha \in [0,1]$，x_1 是系统(4)的状态参量，有 $\lambda_1 < 0$，$\mathrm{Re}(\lambda_{2,3}) \leqslant 0$，即矩阵 A 的任意特征值都满足

$$|\arg(\lambda_i)| \geqslant \frac{\pi}{2} > \frac{q\pi}{2}, (q < 1).$$

根据引理 1 的推论 1，误差系统(9)是渐近稳定的，即 $\lim\limits_{t\to\infty} e_i = 0 (i = 1,2,3)$. 因此，在控制器 $u_1 = -(25\alpha+10)e_2$，$u_2 = -29\alpha e_2$ 作用下，分数阶系统(5)与(4)达到同步.

2.3. 数值模拟

通过 Matlab6.5，采用预估-校正法[30]进行数值模拟，选取驱动系统状态初始值 $x(0)=1$，$y(0)=2$，$z(0)=3$；响应系统状态初始值 $x_1(0)=-1$，$y_1(0)=-2$，$z_1(0)=6$；当 $\alpha=0$，$q=0.995$ 时，系统(4)是分数阶 Lorenz 混沌系统，此时，控制器 $u_2=0$，仅需要一个控制器；当 $\alpha=0.6$，$q=0.9$ 时，系统(4)是分数阶 Lü 混沌系统；当 $\alpha=1$，$q=0.9$ 时，系统(4)是分数阶 Chen 混沌系统. 它们的同步数值仿真结果分别如图 2 至图 4 所示. 从图 2—图 4 可以看

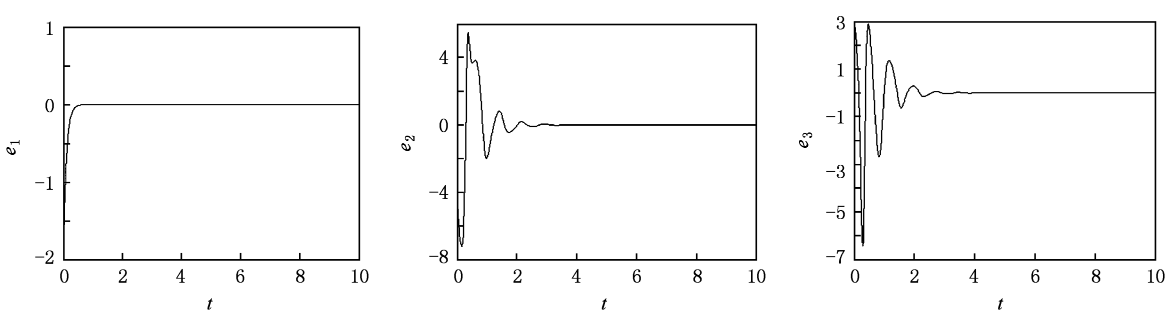

图 2　两个相同的分数阶 Lorenz 混沌系统的同步($\alpha=0, q=0.995$)

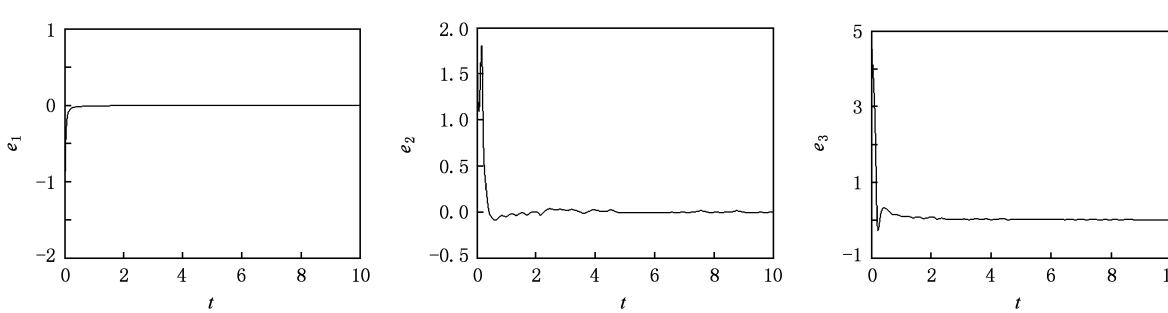

图 3　两个相同的分数阶 Lü 混沌系统的同步($\alpha=0.8, q=0.9$)

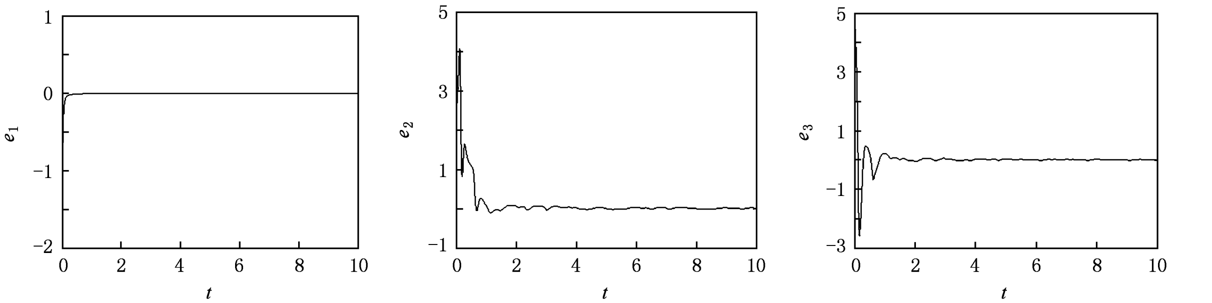

图 4 两个相同的分数阶 Chen 混沌系统的同步($\alpha = 1, q = 0.9$)

出,响应系统与驱动系统渐进同步.

3. 结 论

根据分数阶系统的稳定性理论,提出了基于线性反馈控制的分数阶统一混沌系统的同步方法. 所设计的控制器为单一控制变量的线性控制器,不需要计算反馈系数,并且当 $0 \leqslant \alpha < 1/29$ 时,仅需要一个线性反馈控制器即可实现分数阶统一混沌系统的同步控制,比起已有的同步方法具有更高的实用价值和一定的理论意义. 数值模拟结果表明了该方法的有效性.

[1] Hartly T T, Lorenzo C F, Qammer H K 1995 *IEEE Trans CAI* **42** 485
[2] Grigorenko I, Grigorenko E 2003 *Phys. Rev. Lett.* **91** 034101
[3] Li C P , Peng G J 2004 *Chaos, Solitons & Fractals* **22** 443
[4] Li C G , Chen G R 2004 *Chaos, Solitons & Fractals* **22** 549
[5] Lu J G , Chen G R 2006 *Chaos, Solitons & Fractals* **27** 685
[6] Deng W H, Li C P 2005 *Physica* A **353** 61
[7] Wang F Q, Liu C X 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3922 (in Chinese) [王发强、刘崇新 2006 物理学报 **55** 3922]
[8] Chen X R, Liu C X, Wang F Q, Li Y X 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 1416 (in Chinese) [陈向荣、刘崇新、刘发强、李永勋 2008 物理学报 **57** 1416]
[9] Liu C X, Liu T, Liu L, Liu K 2004 *Chaos, Solitions and Fractals* **22** 1031
[10] Gao X, Yu J B 2005 *Chaos, Solitons & Fractals* **24** 1097
[11] Ahamd W M, Sprott J C 2003 *Chaos, Solitons & Fractals* **16** 339
[12] Gao X, Yu J B 2005 *Chin. Phys.* **14** 908
[13] Li C G , Chen G R 2004 *Physica* A **341** 55
[14] Liu C X 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 6865 (in Chinese) [刘崇新 2007 物理学报 **56** 6865]
[15] Arman Kiani-B, Kia Fallahi , Naser Pariz , Henry Leung 2009 *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* **14** 863
[16] Li C P, Deng WH, 2006 *Int J Modern Phys.* B **20** 791
[17] Mohammad Saleh Tavazoei, Mohammad Haeri 2008 *Physica* A **387** 57
[18] Hu J B, H Y, Zhao L D 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 7522 (in Chinese) [胡建兵、韩 焱、赵灵冬 2008 物理学报 **57** 7522]
[19] Zhang R X , Yang Y, Yang S P 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 6039 (in Chinese) [张若洵、杨 洋、杨世平 2009 物理学报 **58** 6039]
[20] Wang X Y, Song J M 2009 *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, doi: 10.1016/j.cnsns.2009.01.010
[21] Zhang R X, Yang S P 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 6837 (in Chinese) [张若洵、杨世平 2008 物理学报 **57** 6837]
[22] Lu J J, Liu C X 2007 *Chin. Phys.* **16** 1586
[23] Zhang R X, Yang S P 2009 *Chin. Phys.* B **18** 2957
[24] Zhang R X, Yang S P 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 2957 (in Chinese) [张若洵、杨世平 2008 物理学报 **58** 2957]
[25] Caputo M. 1967 *The Geophys J Roy Astronom Soc.* **13** 529
[26] Lü J H, Chen G R 2002 *Int. J of Bifurcation and Chaos* **12** 659
[27] Lü J H, Chen G R Zhang S C 2002 *Int. J of Bifurcation and Chaos* **12** 1001
[28] Wang X J, Li J, Chen G R 2008 *J. of the Franklin Institute* **345** 392
[29] Matignon D 1996 *In: IMACS, IEEE-SMC*, Lille, France 963
[30] Diethelm K, Ford N J, Freed A D 2002 *Nonlinear Dynamics* **29** 3

Synchronization of fractional-order unified chaotic system via linear control*

Zhang Ruo-Xun[1)2)3)] Yang Shi-Ping[1)2)†] Liu Yong-Li[3)]

1) (*College of Physics Science and Information Engineering, Hebei Normal University, Shijiazhuang* 050016, *China*)

2) (*Hebei Advanced Thin Films Laboratory, Shijiazhuang* 050016, *China*),

3) (*College of Elementary Education, Xingtai University, Xingtai* 054001, *China*)

(Received 24 May 2009; revised manuscript received 26 June 2009)

Abstract

Chaos synchronization in fractional-order unified chaotic system is disscussed in this paper. Based on the stability theory of fractional-order system, the control law is presented to achieve chaos synchronization. The advantage of the proposed controllers is that they are linear and have lower dimensions than that of the states. With this technique it is very easy to find the suitable feedback constant. Simulation results for fractional-order Lorenz, Lü and Chen chaotic systems are provided to illustrate the effectiveness of the proposed scheme.

Keywords: fractional-order unified chaotic system, chaos synchronization, linear control

PACC: 0545

* Project supported by the Natural Science Foundation of Hebei Province (Grant No. A2008000136) and the Science and Technology Supporting Program of Hebei Province (Grant No. 2009SP099).

† E-mail: yangship@mail.hebnu.edu.cn