

混沌时间序列重构相空间参数选取研究*

张淑清[†] 贾 健 高 敏 韩 叙

(燕山大学电气工程学院,河北省测试计量技术及仪器重点实验室,秦皇岛 066004)

(2009 年 3 月 14 日收到;2009 年 7 月 22 日收到修改稿)

基于重构相空间的延迟时间和嵌入维数这两个参数的选取不相关的观点,提出用互信息函数法确定延迟时间后,用 CAO 方法来确定嵌入维数的新思路. 通过对几种典型的混沌动力学系统的数值验证,结果表明该方案能够确定出相空间重构的有效延迟时间和最佳嵌入维数. 该方法能够从时间序列中有效地重构原系统的相空间,是混沌信号识别的一种有效途径.

关键词: 混沌相空间重构, 互信息函数, CAO 方法, 嵌入维数

PACC: 0545, 0540, 0250

1. 引 言

混沌的复杂性可通过它的内随机性、整体稳定局部不稳定、对初始条件的敏感依赖性、长期不可预测性、奇异吸引子及其分形结构、轨道不稳定性及分岔、普适性和费根鲍姆(Feigenbaum)常数这些特征表现出来,利用一定理论方法可解析证明某些系统的混沌特性,特别是由已知的混沌系统可导出与之拓扑共轭的系统族的混沌特性. 遗憾的是除少数系统外,适宜于解析分析的系统并不多,如何判断系统是否出现了混沌运动,依然是混沌工程学的重要研究课题. 目前,多采用数值试验来识别动力系统是否存在混沌运动,然后再通过工程实验加以验证^[1-3].

刻画混沌运动特征的一些方法包括相轨的直接观察法、频闪采样法、Poincare 截面法、时间序列的吸引子重构法、自功率谱法、Lyapunov 指数分析法、分维数分析法^[1-11].

实际问题中,我们通常得到一些等时间间隔的单变量时间序列,而不知道系统的数学模型方程,例如地震时间序列、脑电波序列等. 在对这些数学模型未知的动力系统的混沌特征分析时,为了能从这些时间序列中得到有用的信息,需要进行相空间

重构. 塔肯斯^[3]等人于 1981 年提出的嵌入定理回答了如何从时间序列中得到多变量相空间的问题.

2. Takens 定理

Takens 定理^[12]: M 是 d 维流形, $v: M \rightarrow M$, v 是一个光滑的微分同胚, $y: M \rightarrow \Pi$, y 有二阶连续导数, $\Phi(v, y): M \rightarrow \Pi^{2m+1}$, 其中

$$\Phi(v, y) = [y(x), y(v(x)), y(v^2(x)), \dots, y(v^{2d}(x))],$$

(1)

则 $\Phi(v, y)$ 是 M 到 Π^{2m+1} 的一个嵌入.

这里光滑意味着至少两次的微分同胚并且是光滑的. 嵌入意味着重构相空间中点的演化遵循着原空间中动力系统的演化,状态空间中不可观测的状态的特性可在重构空间中无二值的重新产生. 包含着相 $\Phi(v, y): M \rightarrow \Pi^{2m+1}$ 的空间称作嵌入空间,嵌入空间的维数称作嵌入维数,它是指能够完全包容以状态转移构成的吸引子的最小相空间的维数,吸引子在该相空间中不能有任何交叠之处.

Takens 定理说明: 在由一维观测序列及其适当延时值所构成的维数合适的相空间中,系统演化的动力学行为可由此空间中点的演化轨迹无奇异的表达出来. 这个由观测值及其延时值所构成的空间成为重构相空间.

* 国家自然科学基金(批准号:50775198 和 60672015),河北省自然科学基金(批准号:E2008000812)资助的课题.

[†] 通讯联系人, E-mail: zhshqyd@yahoo. cn

如果观测序列为某动力学变量的一个标量 $S(n)$, 则多变量动力学的几何结构可通过将这套装量 $S(n)$ 转化为重构相空间矢量 $y(n)$, 即

$$y(n) = [S(n), S(n + \tau), S(n + 2\tau), \dots, S(n + (d - 1)\tau)], \quad (2)$$

其中 τ 为时间延迟, d 为嵌入维数. 选择合适的 τ 和 d 是重构吸引子成败的关键.

在重构相空间中, 延迟时间 τ 和嵌入维数 d 的选取具有十分重要的意义. 嵌入维数^[2-7]可根据塔肯斯定理、G-P 算法、Cao 方法; 延迟时间根据自相关函数法、互信息法和经验法则确定. 一个经验法则是: $\tau d = Q$, Q 为平均周期^[13]. 自相关函数方法只是描述变量间线性相关程度的一种方法, 所以它并不适合于非线性动力系统. 用互信息函数方法^[13,14]将极小点对应的的时间作为时间延迟 τ , 它可以反映出数据点之间的一般相关性. CAO^[15,16]方法是判断伪邻近点的改进方法, 该方法计算时只需要延迟时间 τ 一个参数, 并且能够有效区分随机信号和确定性信号, 使用较小的数据量就可以求得嵌入维数. 本文基于以上两种方法的优点, 综合互信息函数法, 用 CAO 方法确定嵌入维数. 对延迟时间和嵌入维数两个参数进行选取重构相空间, 通过对几种典型的非线性动力学系统的数值计算验证该方法的可行性.

3. 互信息函数法确定延迟时间

互信息函数方法是估计重构相空间延迟时间的一种有效方法, 它在相空间重构中有很广泛的应用. Shaw 首先提出互信息第一次达到最小时滞时作为相空间重构的延迟时间, Faster 给出了互信息计算的递归算法.

设有离散变量 X, Y , 其状态数分别为 m, n , 则信息函数一熵定义为

$$H(X) = - \sum_{i=1}^m p_i \log p_i, \quad (3)$$

其中 p_i 是变量 X 在状态 i 出现的概率. X, Y 的联合熵定义为

$$H(X, Y) = - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_{ij} \log p_{ij}, \quad (4)$$

其中 p_{ij} 是变量 X 在状态 i 且变量 Y 在状态 j 时出现的概率. 所以, 互信息可以定义为

$$I(X, Y) = H(X) + H(Y) - H(X, Y). \quad (5)$$

设混沌时间序列 s_1, s_2, \dots , 时间延迟为 τ , 嵌入维数为 d , 重构相空间得

$$X(t) = (x_0(t), x_1(t), \dots, x_n(t)), \quad (6)$$

其中 $x_n(t) = s(t + n\tau)$, 则系统对变量 s 的平均信息量为系统的熵 H ,

$$H(S) = - \sum_i P_s(s_i) \log P_s(s_i). \quad (7)$$

记 $[s, q] = [x(t), x(t + \tau)]$, 考虑一个总的耦合系统 (S, Q) , 假定 s 已知为 s_i , 则 q 的不定性为

$$\begin{aligned} H(Q|s_i) &= - \sum_j P_{q|s}(q_j|s_i) \log [P_{q|s}(q_j|s_i)] \\ &= - \sum_i \left[\frac{P_{sq}(s_i, q_i)}{P_s(s_i)} \right] \times \log \left[\frac{P_{sq}(s_i, q_i)}{P_s(s_i)} \right], \end{aligned} \quad (8)$$

其中 $P_{q|s}(q_j|s_i)$ 是条件概率.

设在时刻 t 时 x 已知, 则在 $x + \tau$ 时刻的 x 平均不定性为

$$\begin{aligned} H(Q|S) &= \sum_i P_s(s_i) H(Q|s_i) \\ &= H(S, Q) - H(S), \end{aligned} \quad (9)$$

$$H(S, Q) = - \sum_{i,j} P_{sq}(s_i, q_i) \log P_{sq}(s_i, q_i), \quad (10)$$

其中 $H(S, Q)$ 是孤立的 q 的不定性, $H(Q|S)$ 是已知 s 的 q 的不定性. 所以, s 的已知减少了 q 的不定性, 互信息为

$$\begin{aligned} I(Q, S) &= H(Q) - H(Q|S) \\ &= H(Q) + H(S) - H(S, Q) \\ &= I(S, Q). \end{aligned} \quad (11)$$

互信息不是变量 s 或 q 的函数, 而是联合概率分布 p_{sq} 的函数. 从概率分布的直方图中估计 p_{sq} 通常采用以下方法: 设在 s, q 平面上点 (s, q) 处的一个大小为 $\Delta s \Delta q$ 的盒子, 那么有

$$P_{sq} = \frac{N_{sq}}{N_{total}} \Delta s \Delta q, \quad (12)$$

其中 N_{sq}, N_{total} 分别是盒子中点的数目和总点数.

对于一般情况, 互信息为

$$\begin{aligned} I_n(X_0, X_1, \dots, X_n) \\ &= \sum_j [H(X_j) - H(X_0, X_1, \dots, X_n)]. \end{aligned} \quad (13)$$

如果向量是一个延迟时间重构, 则 $I_n(\tau)$ 第一次达到最小值的时滞可作为相空间重构的时间延迟. 同时如果 n 足够大则 $I_n(\tau)$ 应该是单调递减, 并且 $\frac{I(n)}{n}$ 能很好地估计出系统熵.

4. 用 CAO 方法确定最佳嵌入维数

CAO 在别人工作的基础上提出了计算最小嵌入维的方法. CAO 方法可以按照如下步骤实现.

在 d 维空间中, 每一个相点矢量为 $X(i) = \{x(i), x(i+\tau), \dots, x(i+(d-1)\tau)\}$, 都有一个某距离内的最邻近点 $X^{NN}(i)$, 其距离为 $R_d(i)$, 则

$$\begin{aligned} R_d^2(i) &= \|X(i) - X^{NN}(i)\|^2 \\ &= \sum_{j=1}^d \{x[i+(j-1)\tau] - x^{NN}[i+(j-1)\tau]\}^2. \end{aligned} \quad (14)$$

当相空间的维数增加到 $d+1$ 维时, 这两个相点的距离就会发生变化, 两者的距离成为 $R_{d+1}(i)$, 且有

$$\begin{aligned} R_{d+1}^2(i) &= \sum_{j=1}^{d+1} \{x[i+(j-1)\tau] - x^{NN}[i+(j-1)\tau]\}^2 \\ &= R_d^2(i) + |x(i+\tau d) - x^{NN}(i+\tau d)|^2. \end{aligned} \quad (15)$$

由 d 增加 1 而引起的两邻近点间距离的变化是

$$[R_{d+1}^2(i) - R_d^2(i)]^{1/2} = |x(i+\tau d) - x^{NN}(i+\tau d)|. \quad (16)$$

可见, 如果两邻近点距离不随维数 d 增大而变化, 即 $R_{d+1}(i) = R_d(i)$, 则邻近点是真实的; 如果 $R_{d+1}(i)$ 比 $R_d(i)$ 大很多, 可以认为这是由于高维混沌吸引子中两个不相邻的点投影到低维轨道上时变成相邻的两点造成的, 因此这样的邻点是虚设的, 令

$$a_1(i, d) = \frac{|x(i+\tau d) - x^{NN}(i+\tau d)|}{R_d(i)}, \quad (17)$$

若 $a_1(i, d) > R_r$, 则 $X^{NN}(i)$ 是 $X(i)$ 的伪邻近点, 阈值 R_r 可在 $[10, 50]$ 之间选取. (17) 式代入 $R_d(i)$ 后为如下形式:

$$a_1(i, d) = \frac{x(i+\tau d) - x^{NN}(i+\tau d)}{\|X_d(i) - X_d^{NN}(i)\|}. \quad (18)$$

CAO 将上式改写为

$$a_2(i, d) = \frac{\|X_{d+1}(i) - X_{d+1}^{NN}(i)\|}{\|X_d(i) - X_d^{NN}(i)\|}, \quad (19)$$

其中 $X_d(i)$ 和 $X_d^{NN}(i)$ 为 d 维空间的第 i 个向量和它的最邻近点, $X_{d+1}(i)$ 和 $X_{d+1}^{NN}(i)$ 是 $d+1$ 维相空间的第 i 个向量和它的最邻近点.

定义

$$E(d) = \frac{1}{N-d\tau} \sum_{i=1}^{N-d\tau} a_2(i, d),$$

$$E_1(d) = E(d+1)/E(d). \quad (20)$$

如果时间序列是确定的, 则嵌入维数是存在的, 即 $E_1(d)$ 将在 d 大于某一特定值 d_0 时不再变化. 若时间序列是随机信号, 则 $E_1(d)$ 应逐渐增加, 但在实际应用中不容易判断有限长序列 $E_1(d)$ 究竟是在缓慢变化还是已经稳定, 因此, 补充一个判断准则为

$$\begin{aligned} E^*(d) &= \frac{1}{N-d\tau} \sum_{i=1}^{N-d\tau} |x(i+\tau d) - x^{NN}(i+\tau d)|, \\ E_2(d) &= E^*(d+1)/E^*(d). \end{aligned} \quad (21)$$

对于随机序列, 数据间没有相关性, 即不具备可预测性, $E_2(d)$ 将始终为 1; 对于确定性序列, 数据之间的相关关系是依赖于嵌入维数 d 值变化的, 总存在一些 d 值使得 $E_2(d)$ 不等于 1.

5. 数值验证

考虑 Lorenz^[10] 方程

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y-x), \\ \dot{y} &= rx - y - xz, \\ \dot{z} &= -bz + xy, \end{aligned} \quad (22)$$

取 $\sigma = 16, b = 4, r = 45.92$. 用 Runge-Kutta 方法求解方程(22), 步长 $h = 0.01$, 去除暂态过程, 得变量的一个 30000 个点数值解. 图 1(a) 是 Lorenz 系统的互信息函数 $I(\tau)$ 随延迟时间 τ 的变化关系图, 图中看出, 在 $\tau = 10$ 时, $I(\tau)$ 出现第一个极小值, 故可得延迟时间为 $\tau = 10$; 图 1(b) 是根据 CAO 方法所取得的最佳嵌入维数. 图中 E_1, E_2 都在 d 大于 3 时不再变化, 所以取得最佳嵌入维数为 3, 这与方程(22)相符合; 图 1(c) 是 Lorenz 吸引子在 $x-y$ 平面上的投影图; 图 1(d) 是延迟时间 $\tau = 10$ 时变量 x 的重构吸引子; 图 1(e) 为 $\tau = 1$ 时变量 x 的重构吸引子; 图 1(f) 为 $\tau = 30$ 时变量 x 的重构吸引子. 显然, $\tau = 10$ 时的重构图最能反映图 1(c) Lorenz 系统吸引子的双圈拓扑结构.

再考虑以下 Duffing 方程^[11]:

$$\ddot{x} + \delta\dot{x} - ax(1-x^2) = F\cos(t), \quad (23)$$

令 $y = \dot{x}$, 选取 x, y 为状态变量, 上式的动力学方程为

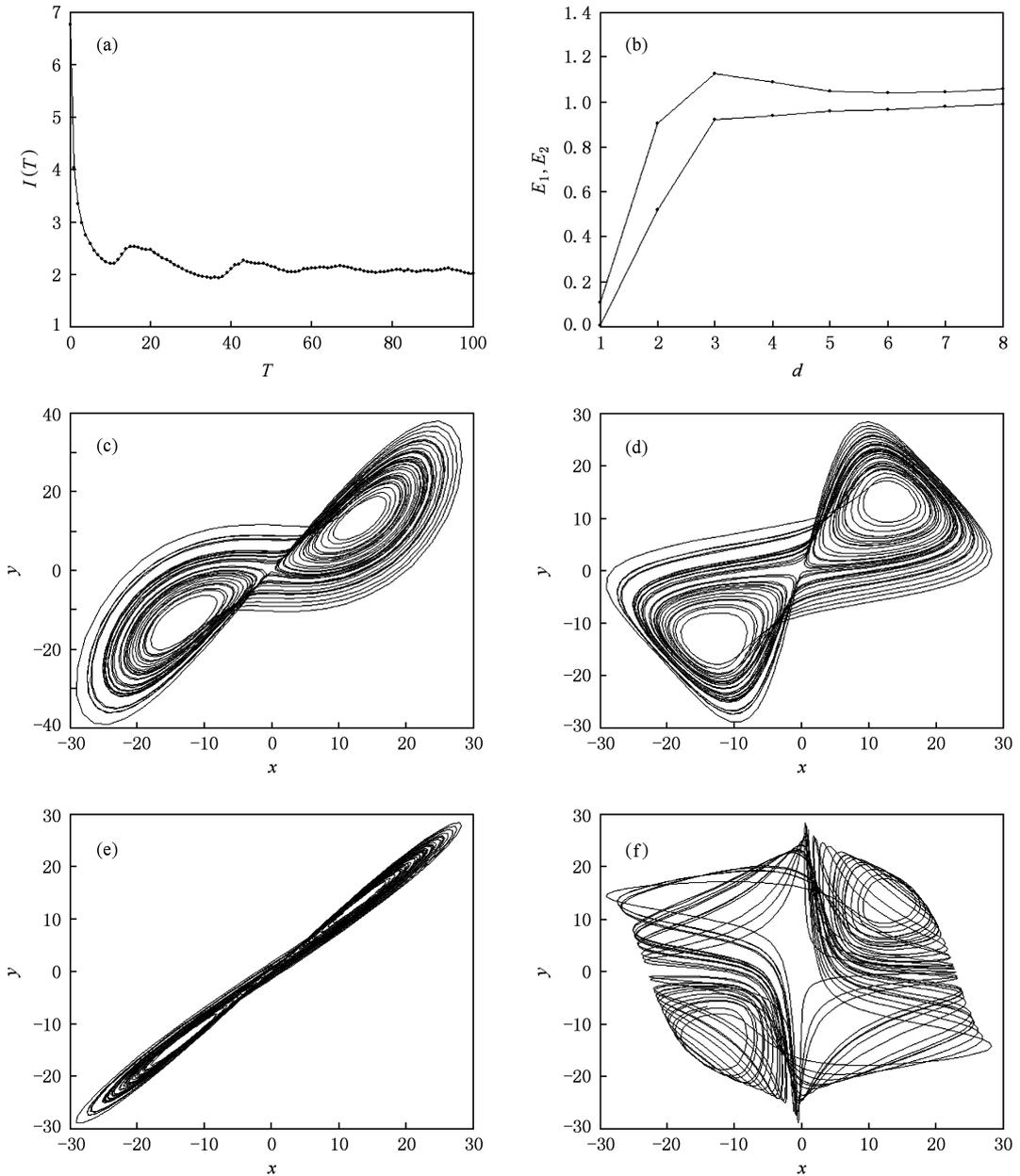


图1 $\sigma = 16, b = 4, r = 45.92$ 的 Lorenz 系统 (a) 互信息函数 $I(\tau)$; (b) 最佳嵌入维数; (c) Lorenz 吸引子投影图; (d) $\tau = 10$; (e) $\tau = 1$; (f) $\tau = 30$

$$\dot{x} = y,$$

$$\dot{y} = -\delta y + ax(1 - x^2) + F\cos(t). \quad (24)$$

取 $\delta = 0.05, a = 0.07, F = 7.5$. 用 4 阶 Runge-Kutta 方法求解方程(24), 步长 $h = 0.01$, 去除暂态过程, 得变量的一个 30000 个点数值解. 图 2 (a) 是 Duffing 系统的互信息函数 $I(\tau)$ 随延迟时间 τ 的变化关系图, 图中看出, 在 $\tau = 10$ 时, $I(\tau)$ 出现第一个极小值, 故可得延迟时间为 $\tau = 10$; 图 2 (b) 是根据 CAO 方法所取得的最佳嵌入维数. 图中 E_1, E_2 都在

d 大于 2 时不再变化, 所以取得最佳嵌入维数为 2, 这与方程(24)相符合; 图 2 (c) 是 Duffing 吸引子在 $x-y$ 平面上的投影图; 图 2 (d) 是延迟时间 $\tau = 10$ 时变量 x 的重构吸引子; 图 2 (e) 为 $\tau = 1$ 时变量 x 的重构吸引子; 图 2 (f) 为 $\tau = 30$ 时变量 x 的重构吸引子. 显然, $\tau = 10$ 时的重构图最能反映图 2 (c) Duffing 系统吸引子的混沌特性.

最后考虑 Rossler^[3] 方程

$$\dot{x} = -(y + z),$$

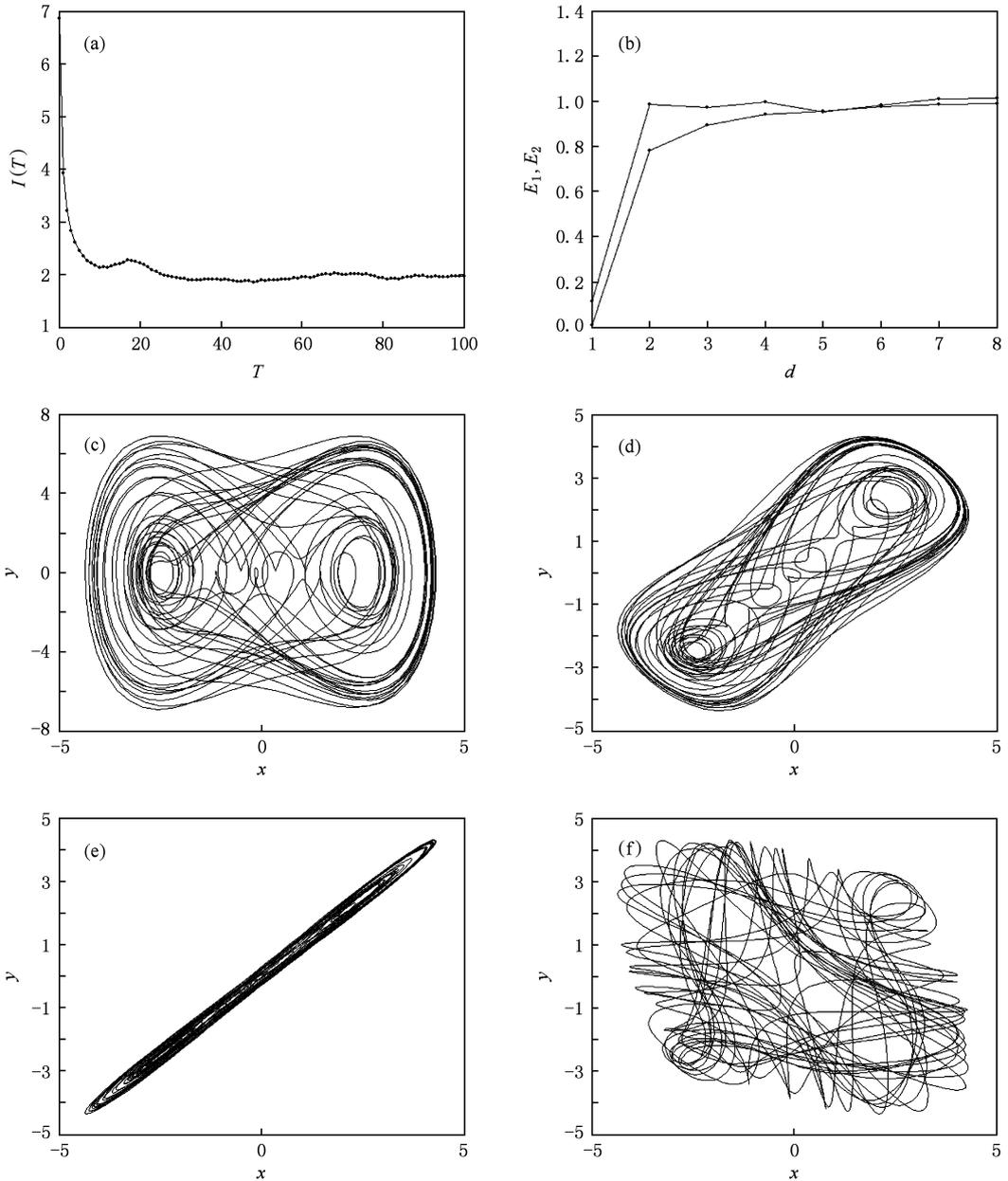


图2 $\delta=0.05, a=0.07, F=7.5$ 的 Duffing 系统 (a)互信息函数 $I(\tau)$; (b)最佳嵌入维数; (c)Duffing 吸引子投影图; (d) $\tau=10$; (e) $\tau=1$; (f) $\tau=30$

$$\begin{aligned} \dot{y} &= x + dy, \\ \dot{z} &= e + z(x - f). \end{aligned} \tag{25}$$

取 $d=0.2, e=0.2, f=0.5$. 用 4 阶 Runge-Kutta 方法求解方程(25), 步长 $h=0.01$, 去除暂态过程, 得变量的一个 30000 个数值解. 图 3(a) 是 Rossler 系统的互信息函数 $I(\tau)$ 随延迟时间 τ 的变化关系图, 计算得出, 图中在 $\tau=30$ 时, $I(\tau)$ 出现第一个极小值, 故可得延迟时间为 $\tau=30$; 图 3(b) 是根据 CAO 方法所取得的最佳嵌入维数. 图中 E_1, E_2 都在 d 大于 3 时不再变化, 所以取得最佳嵌入维数为 3, 这与

方程(25)相符合; 图 3(c) 是 Rossler 吸引子在 $x-y$ 平面上的投影图; 图 3(d) 是延迟时间 $\tau=30$ 时变量 x 的重构吸引子; 图 3(e) 为 $\tau=1$ 时变量 x 的重构吸引子; 图 3(f) 为 $\tau=50$ 时变量 x 的重构吸引子. 显然, $\tau=30$ 时的重构图最能反映图 3(c) Rossler 系统吸引子的单圈结构.

6. 结 论

基于混沌理论中重构相空间的延迟时间 τ 和嵌

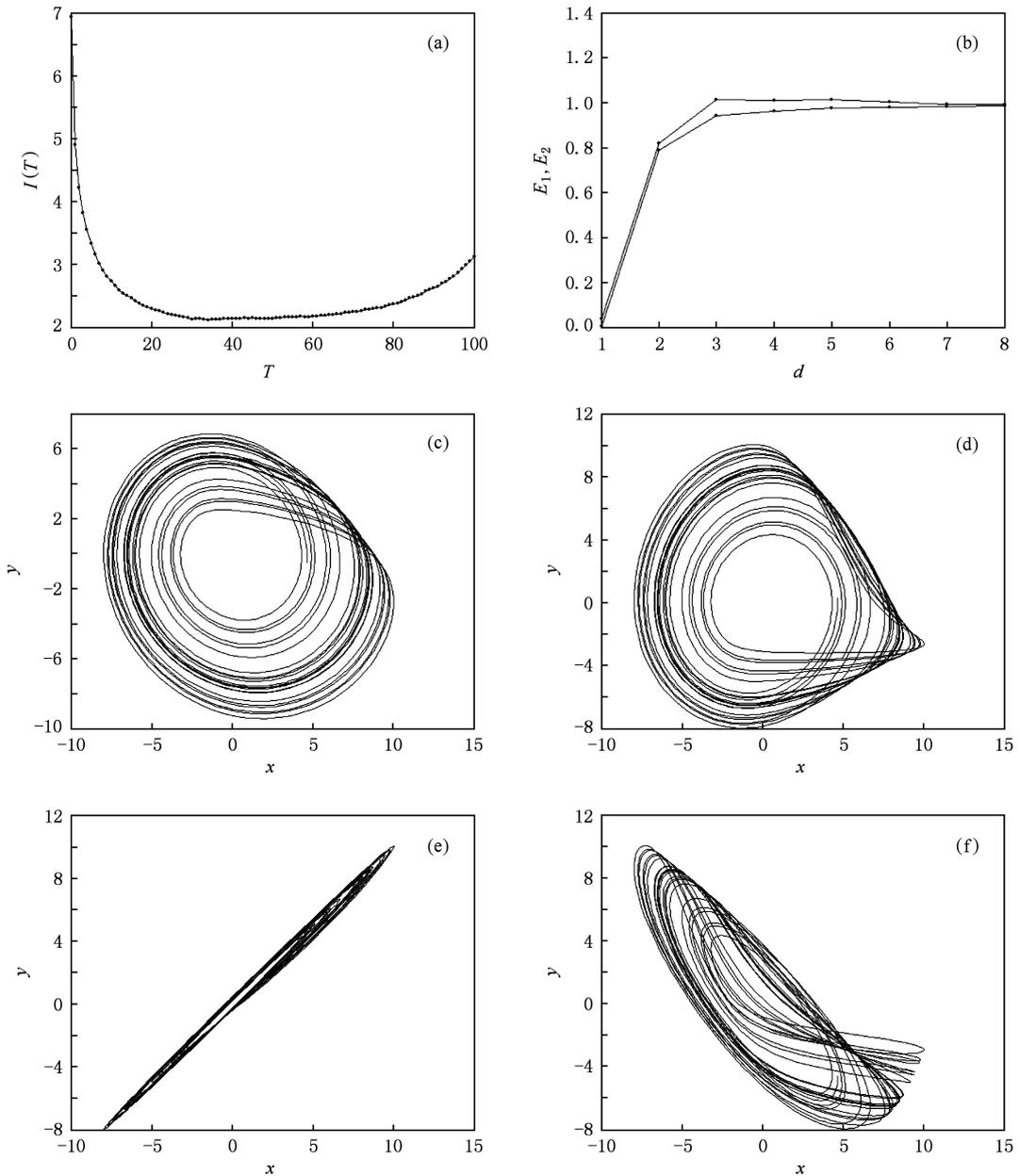


图3 $d=0.2, e=0.2, f=0.5$ 的 Rossler 系统 (a)互信息函数 $I(\tau)$; (b)最佳嵌入维数; (c)Rossler 吸引子投影图; (d) $\tau=30$; (e) $\tau=1$; (f) $\tau=50$

入维数 d 两个参数的选取不相关的观点,提出了先用互信息函数法来确定延迟时间 τ ,然后再用 CAO 方法来确定嵌入维数 d 的思路。为了验证该方法的有效性,对 Lorenz 型、Duffing 型和 Rossler 型这 3 种典型的

混沌动力学系统进行数值验证,比较了重构吸引子的几何形状和原吸引子之间的相似性、延迟时间选取不同所产生的差异性。结果表明该方案能够确定出相空间重构的有效延迟时间和最佳嵌入维数。

[1] Jiang W L, Zhang S Q, Wang Y Q 2005 *Chaos and Wavelet Based Fault Information Diagnosis* (Beijing: National Defence Industry Press) p43 (in Chinese) [姜万录、张淑清、王益群 2005 基于混沌和小波的故障信息诊断 (北京:国防工业出版社) 第 43 页]

[2] Liu S Y, Zhu S J, Yu X 2008 *Journal of Harbin Engineering University* 29 4 (in Chinese) [刘树勇、朱石坚、俞翔 2008 哈尔滨工程大学学报 29 4]

[3] Liu Z H 2006 *Fundamentals and Applications of Chaotic Dynamics* (Beijing: Higher Education Press) p71 (in Chinese)

- [刘宗华 2006 混沌动力学基础及其应用 (北京:高等教育出版社) 第 71 页]
- [4] Wang J, Shi Y F, Yu H R 2001 *Journal of Sichuan University (Engineering Science Edition)* **33** 2 (in Chinese) [王 军、石炎福、余华瑞 2001 四川大学学报(工程科学版) **33** 2]
- [5] Huang G R, Rui X F 2004 *Advances in Water Science* **15** 2 (in Chinese) [黄国如、芮孝芳 2004 水科学进展 **15** 2]
- [6] Li C G, Pei L Q 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2114 (in Chinese) [李春贵、裴留庆 2003 物理学报 **52** 2114]
- [7] Wang S, Yang Z A, Ren Z J 2005 *Optical Technique* **31** 5 (in Chinese) [王 沙、杨志安、任中京 2005 光学学报 **31** 5]
- [8] Jiang W L, Zhang S Q, Wang Y Q 2000 *Chinese Journal of Mechanical Engineering* **36** 10 (in Chinese) [姜万录、张淑清、王益群 2000 机械工程学报 **36** 10]
- [9] You R Y, Chen Z, Xu S C, Wu B X 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2882 (in Chinese) [游荣义、陈 忠、徐慎初、吴伯僖 2004 物理学报 **53** 2882]
- [10] Yu W B 2008 *Calculate Experiment and Analysis on Chaos* (Beijing: Science Press) p33 (in Chinese) [于万波 2008 混沌的计算实验与分析 (北京:科学出版社) 第 33 页]
- [11] Sun H Y, Cao Q J 2000 *Journal of Shandong University of Technology* **30** 2 (in Chinese) [孙海云、曹庆杰 2000 山东工业大学学报 **30** 2]
- [12] Li Y, Yang B J 2007 *Chaos Osilator System (L-Y) and Its Detection* (Beijing: Science Press) p112 (in Chinese) [李月、杨宝俊 2007 混沌振子系统(L-Y)与检测 (北京:科学出版社) 第 112 页]
- [13] Xiao F H, Yan G R, Han Y H 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 550 (in Chinese) [肖方红、阎桂荣、韩宇航 2005 物理学报 **54** 550]
- [14] Chu J F 2006 *Chaos and Cycles of Chinese Stock Market* (Beijing University) p16 (in Chinese) [储军峰 2006 中国股市的混沌性质研究 (北京大学) 第 16 页]
- [15] Cao L Y 1997 *Physica D* **110** 43
- [16] Xu X K 2007 *Nonlinear Analysis and Modeling on Mixed Seawave* (Dalian: Dalian Maritime Affairs University) p9 (in Chinese) [许小可 2007 海杂波的非线性分析与建模 (大连:大连海事大学) 第 9 页]

Study on the parameters determination for reconstructing phase-space in chaos time series *

Zhang Shu-Qing[†] Jia Jian Gao Min Han Xu

(Measurement Technology and Instrumentation Key Lab of Hebei Province, Institute of Electronic engineering of Yanshan University, Qinhuangdao 066004, China)

(Received 14 March 2009; revised manuscript received 22 July 2009)

Abstract

The choice of delay time and embedding dimension have no correlation in the process of phase-space reconstruction. Based on this principle, a new idea for determining the embedding dimension is proposed. It uses CAO theory after determining the delay time by the mutual information function. Numerical simulations show that the method is applicable for determining the appropriate delay time and the best embedding dimension. The method can recover the original phase space from the time series effectively, and can be used as an effective method to identify the chaotic signal.

Keywords: phase-space reconstruction of chaos, mutual information function, CAO method, embedding dimension

PACC: 0545, 0540, 0250

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 50775198 and 60672015), and the Natural Science Foundation of Hebei Province (Grant No. E2008000812).

[†] Corresponding author. E-mail: zhshqyd@yahoo.cn