

离散时间序列的网络模体分析*

董 昭 李 翔[†]

(复旦大学电子工程系, 上海 200433)

(2009 年 7 月 7 日收到; 2009 年 7 月 14 日收到修改稿)

时间序列可以被转换成网络的形式, 复杂网络理论也因此可以用于刻画时间序列的时域和相空间特性. 本文针对可视图算法和相空间重构算法这两种时间序列的转换算法, 研究了它们的伴生网络在倍周期分岔和混沌等各种类型时间序列的模体分布特征, 分析了这两种算法各自的优点.

关键词: 时间序列, 网络模体, 混沌, 倍周期分岔

PACC: 0547, 0565

1. 引 言

近 10 年来, 复杂网络理论已经成为网络时代科学研究的最活跃的学术研究前沿之一, 并在来自数学学科、信息学科、生命学科和工程学科等诸多领域众多学者交叉研究的推动下蓬勃发展^[1-8].

最近, 一些研究人员通过设计转换算法, 在时间序列和复杂网络之间架起了桥梁, 因而可以将复杂网络理论应用到对时间序列的分析研究中^[9-13]. Zhang 与 Small 提出了一种将时间序列变换成伴生网络的算法^[9], 他们将时间序列划分成连续的周期, 每一周期因此对应于网络中的节点, 而两个节点是否相连取决于对应的两个周期之间的相关系数是否足够. Lucasa 等人则根据视野连线的原理提出一个简单直观的可视图 (visibility graph, VG) 算法^[10], 对于离散时间序列中任意两个时间点 A, B , 只要在 A 点能看到 B 点 (两点之间视野没有受到阻挡), 则认为在对应的伴生网络中节点 A 与 B 是相连的. Xu 等在文献^[9]的基础上进一步提出了基于相空间重构 (phase-space reconstruction, PR) 原理的算法^[11], 他们在对时间序列进行相空间重构^[14]后的相空间点对应着网络中的节点, 并且将节点与其最近的若干个邻居节点相连形成伴生网络.

借助于这些转换算法, 研究人员分析研究了各种类型的时间序列所对应的复杂网络拓扑特征, 并

研究了伴生网络的度分布、介数、聚类系数、网络平均路径长度、模体等统计特征与时间序列的时域特性、相空间结构等之间关系^[9-13]. 特别地, Lucasa 等人通过 VG 算法将周期序列对应转换成规则网络, 随机序列对应转换成随机网络, 分形序列对应转换成无标度网络^[10]; Xu 等人利用 PR 算法研究混沌时间序列发现, 可以利用伴生网络不同的模体排列顺序来区分混沌、超混沌和白噪声时间序列^[9].

这些极为有趣的研究结果也暗示着时间序列与网络之间隐含的某种联系有待更多的关注和更进一步的研究, 例如, VG 算法和 PR 算法在时间序列转换到各自伴生网络的异同点有待分析. 因此, 本文着重利用 logistic 映射的整个完整参数区间所产生的各种类型时间序列, 来研究 VG 和 PR 两种算法所相应的伴生网络的各种模体的分布特征. 另外, 本文还比较了这两种算法在同样的混沌、超混沌和白噪声序列时伴生网络的模体特征.

2. logistic 映射的网络模体分析

2.1. logistic 映射

logistic 映射^[15]是离散时间序列中最为典型的一个例子, 其数学表达式为

$$x_{n+1} = ux_n(1 - x_n), \quad (1)$$

其中参数 $0 \leq u \leq 4$. 如图 1 所示, 当 $u < u_\infty$ ($u_\infty =$

* 国家自然科学基金 (批准号: 60874089) 和上海市青年科技启明星 (跟踪) 计划 (批准号: 09QH1400200) 资助的课题.

[†] 通讯联系人. E-mail: lix@fudan.edu.cn

3.5699456, 图中标记分界线的位置) 时, 随着 u 值的增大, 依次出现会 $2^n (n=1, 2, 3, \dots)$ 的倍周期分岔, 这一区域通常可以称为分岔区; 当 $u > u_{\infty}$ 时, 则情况完全变了, 这时 x 的轨迹呈现混沌特征, 这一区域也被称为混沌区. 然而混沌区存在着不是混沌的周期窗口: 在 $u=3.83$ 附近的 3P 窗口, 3P 窗口向左还依次存在 5P, 7P 等窗口, 这些区域在本文称其为窗口区. 当 $u=4$ 时, 迭代后其 x_n 的数值充满整个 $[0, 1]$ 区间, 即为“单片”混沌区. 但当 u 减小 $u_{(1)}=3.6786$ 时, x 的取值分为两片混沌区, 当 u 值在减小到 $u_{(2)}=3.5926$ 时, 则两片混沌区又分为四片混沌区. 随着 u 的继续减小, 将依次继续发生 4 分为 8, 8 分为 16 等. 我们把这些混沌带分别称为 I, 2I, 4I, ... (即 $2^n I$) 混沌带, 即倒分岔. 在本文中称为倒分岔区.

在这一节, 我们将依次针对 logistic 映射中的分岔区和混沌区中的倒分岔区、窗口区分析其在 VG 算法和 PR 算法转换后伴生网络的模体结构. 在这

里我们只分析网络的四阶模体 (如图 2 所示, 模体检测算法如文献 [16, 17]). 我们限定比较两种算法所生成的网络的节点个数均为 10000. PR 算法选择文献 [11] 的参数: 时间延时 $\tau=1$, 嵌入维数 $d_e=5$, 相空间中的每个点跟其四个邻居相连.

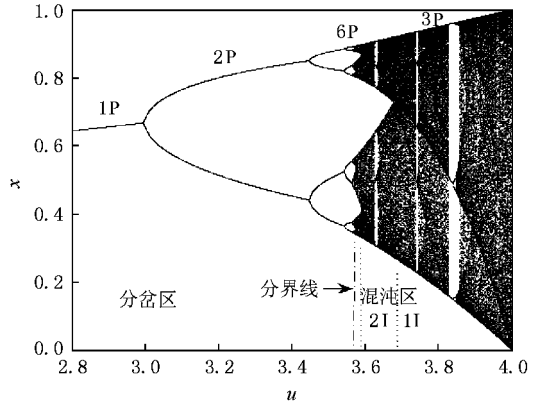


图 1 logistic 映射的倍周期分岔和混沌示意图

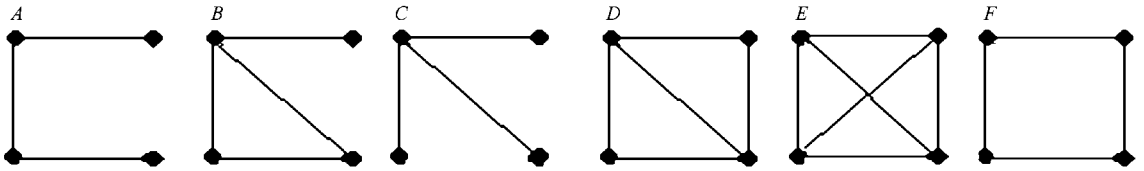


图 2 无权无向网络的四阶模体

表 1 logistic 映射分岔点

| 分岔情况 | u 值 |
|---------|-------------|
| 4→8 | 3.544090359 |
| 8→16 | 3.564407266 |
| 16→32 | 3.56875942 |
| 32→64 | 3.56969161 |
| 64→128 | 3.569891259 |
| 128→256 | 3.569934019 |
| 周期分岔→混沌 | 3.569945672 |

表 2 logistic 映射倒分岔点

| 倒分岔情况 | u 值 |
|---------|-------------|
| 1→2 | 3.678573501 |
| 2→4 | 3.592572184 |
| 4→8 | 3.574804939 |
| 8→16 | 3.57098594 |
| 16→32 | 3.570168472 |
| 32→64 | 3.56999339 |
| 混沌→周期分岔 | 3.569945672 |

2.2 分岔区

在 logistic 映射的分岔区, 我们先后取了如表 1 所示的 7 个不同的分岔点参数 u 来产生相应的时间序列. 从图 3 中可以看到, 不论是 PR 算法还是 VG 算法, 分岔区中各个参数点的时间序列都不存在统一的模体频率排列顺序. 例如, 在 VG 算法下, 当 $u=3.544090359$, 模体的频率排列顺序为 CABD, 而当 $u=3.569691610$, 则顺序变为 ABCD. 在 PR 算法下, 当 $u=3.544090359$, 模体频率顺序为 ACF, 而当 $u=3.569691610$, 则顺序为 ABCEDF.

但两种算法在不同的分岔点参数区间会存在统一的模体排列顺序. 如图 4(a) 所示, 在 VG 算法下, 在 32 周期到 64 周期的分岔点之后, 模体出现的频率保持稳定, 模体排列顺序不变, 为 ACBDE. 而 PR 算法的情形则恰恰相反 (图 4(b)), 在 16 周期到 32 周起分岔点之前, 各个模体频率保持恒定, 模体排列不变, 为 ACF.

2.3 混沌区

在 logistic 映射的混沌区, 我们先后取了 $u =$

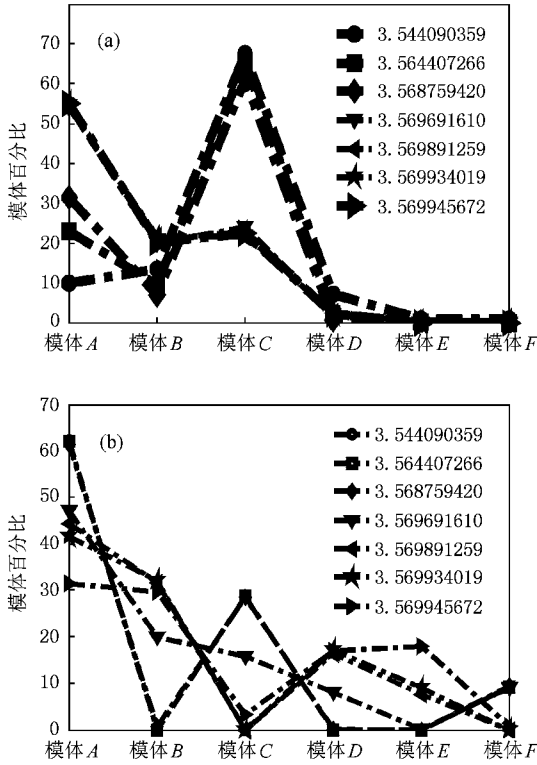


图3 logistic 映射分岔区伴生网络模体顺序 (a) VG 算法; (b) PR 算法

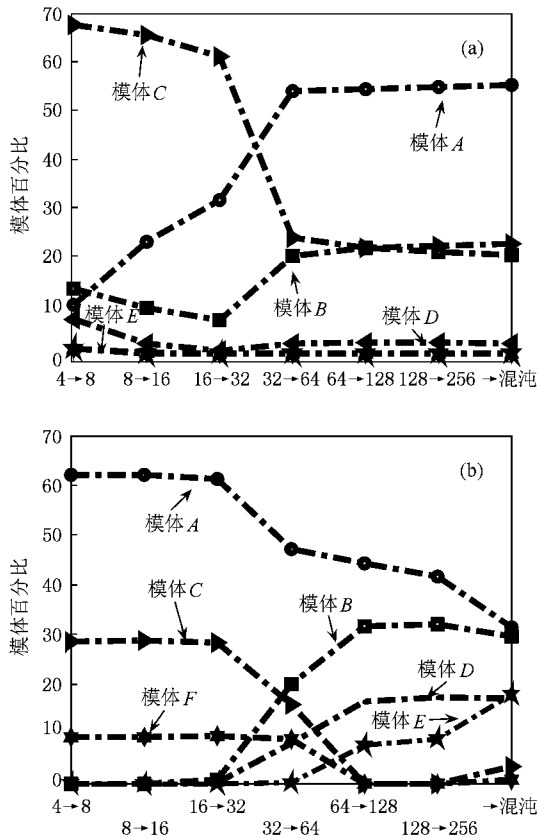


图4 logistic 映射分岔区伴生网络各模体变化趋势 (a) VG 算法; (b) PR 算法

3.61, 3.73, 3.82, 3.86, 3.95 这五个参数点. 如图 5 所示, 在混沌区, VG 算法和 PR 算法所产生的伴生网络模体顺序均与 u 值无关. 但同时我们可以发现, 两种算法所得到的模体顺序不同, VG 算法得到的模体顺序为 $ABCDEF$ (如图 5 (a) 所示), 而在 PR 算法下 (图 5 (b) 所示), 混沌区模体顺序为 $ABDECF$. 此外, 两种算法的第二和第三位的模体频率存在差异. 在 PR 算法下, 排第二位的模体 B 与排第三位的模体 C 在伴生网络中出现的频率几乎相同, 都为 20% 左右. 而在 VG 算法下, 排第二位的模体 B 与排第三位的模体 D 在伴生网络中出现的频率则相差 20% 左右.

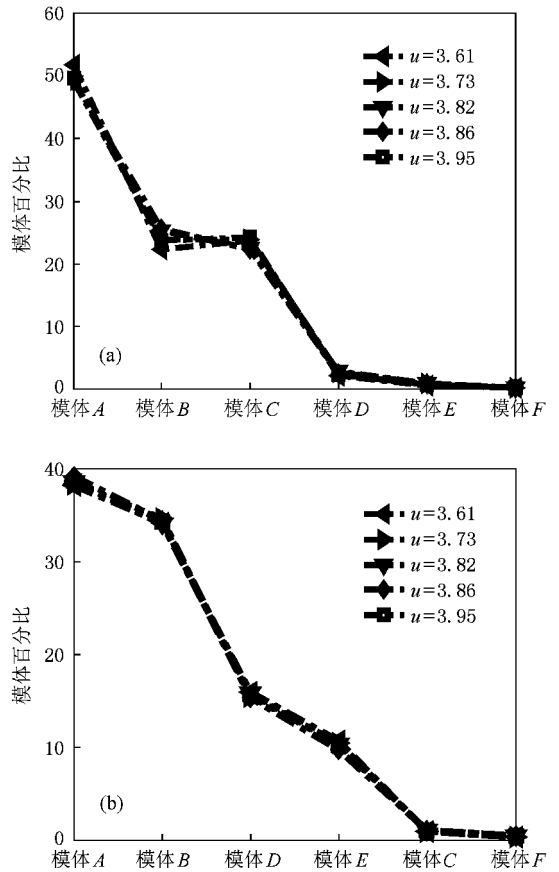


图5 logistic 映射混沌区伴生网络模体顺序 (a) VG 算法; (b) PR 算法

2.4. 倒分岔区

进一步地, 我们在混沌区中的倒分岔区选择了如表 2 的各参数点. 从图 6 可以看到, 在倒分岔区, VG 算法和 PR 算法所产生的伴生网络模体顺序均与 u 值无关, 各自的模体顺序分别为 $ABCDEF$ 和 $ABDECF$, 这与前面混沌区的结果一致.

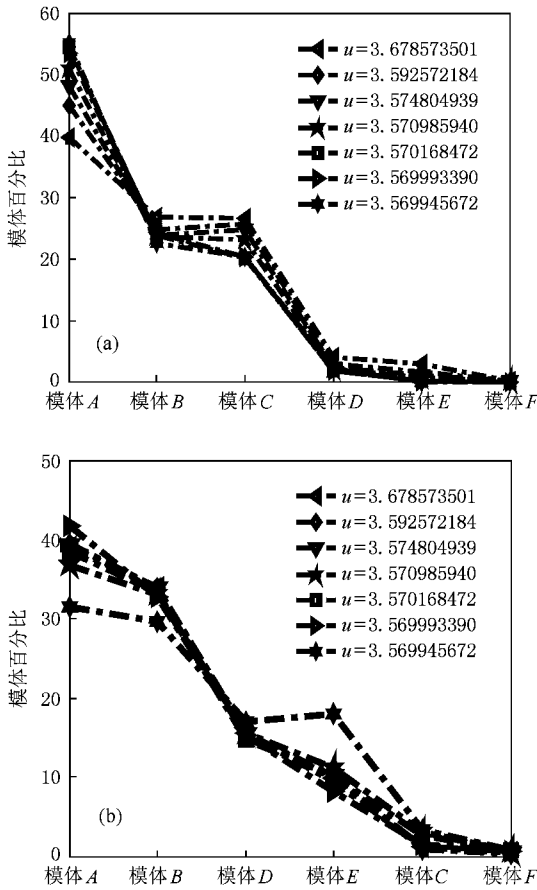


图 6 logistic 映射倒分岔区伴生网络模体顺序 (a) VG 算法; (b) PR 算法

在 VG 的算法下,从图 7 (a) 可以看出,随着分岔周期的增加,模体 A 的相对频率也是再不断增加的. 这一点与分岔区结论一致的. 在 $u = 3.678573501$,该点为周期从 1 到 2 的倒分岔点,模体 A 的百分比为 38.425%. 在 $u = 3.570985940$,该点为周期从 8 到 16 的倒分岔点,模体 A 的百分比已经上升到 52.109%. 而在 PR 算法下,各个模体的出现频率与 u 值的变化不大,即与周期无关,从图 7 (b) 可以看出,模体 A 的频率维持在 40% 左右,只有在周期 32 到周期 64 的点向右变化较大,其余各个模体的频率的变化规律也如同 A 的变化一样,在 32 \rightarrow 64 的点之前,模体频率维持恒定,只有在 32 \rightarrow 64 点到周期解点变化的较大.

我们将分岔区和倒分岔区统一放在一起观察随着周期分岔点参数的变化,两种算法的伴生网络中所存在的模体个数的变化趋势. 从图 8 (a) 可以看到,在 VG 的算法下,在分岔区(即在 $u_{\infty} = 3.569945672$ 之前)模体个数是随着 u 值的增加而

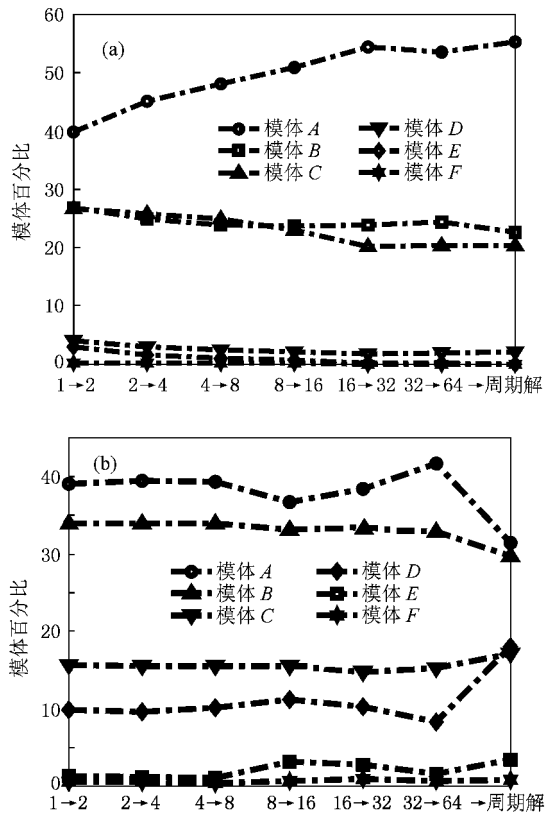


图 7 logistic 映射倒分岔区伴生网络各模体变化趋势 (a) VG 算法; (b) PR 算法

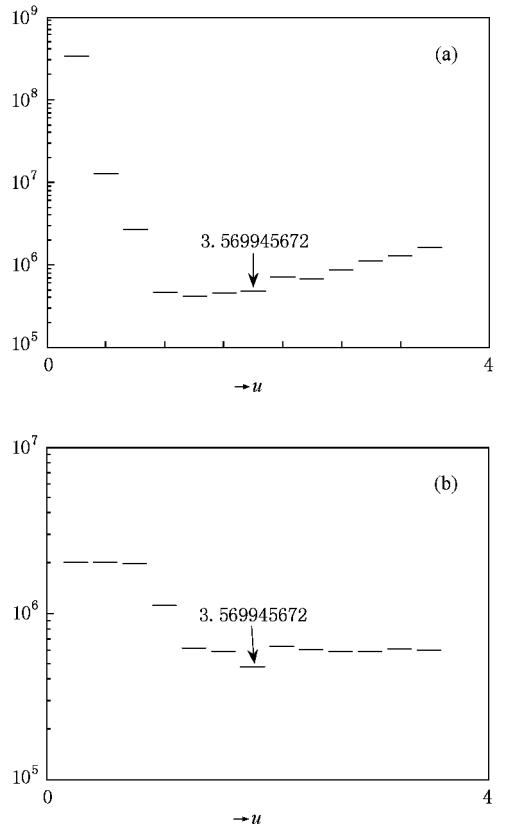


图 8 logistic 映射分岔区与倒分岔区伴生网络模体数量变化趋势(其中,在 $u = 3.569945672$ 之前的点均为分岔点,之后的点为倒分岔点) (a) VG 算法; (b) PR 算法

递减,而在倒分岔区(即在 $u_{\infty} = 3.569945672$ 之后)模体个数是随着 u 值的增加而增加. 与之对照,在 PR 算法下,如图 8(b)所示,模体个数变化呈现分段阶梯状,在分岔区,各个分岔点 1→2(即周期为 1 变为周期为 2 的点), 2→4, 4→8, 8→16, 16→32 的参数下时间序列的伴生网络模体个数基本保持不变;在倒分岔区(即在 $u_{\infty} = 3.569945672$ 之后),各个参数下时间序列伴生网络模体个数也变化不大. 这是因为 PR 算法生成网络时限定每个相空间的点与周围固定数量的邻居点连边有关,而 VG 算法则没有任何节点之间连边的数量限制.

2.5. 窗口区

在窗口区,将窗口中的某一部分放大,将会发现,它也有与图 1 相同的精细结构,即它也包含有从左到右的倍周期分岔序列和从右到左的混沌带反序列. 如果将二级结构图的某一部分继续放大,又会得到完全一样的三级结构. 这样下去,可以不断地得到四级、五级……结构. 由此可见,混沌带中存在着无穷层次的自相似结构^[15].

表 3 6P 窗口区的各个分岔参数点

| 周期 | u 值 |
|----|--------|
| 6 | 3.627 |
| 12 | 3.631 |
| 48 | 3.6326 |
| 72 | 3.633 |

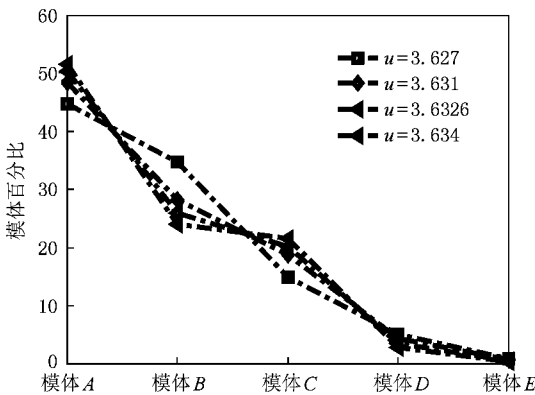


图 9 logistic 映射 6P 窗口区 VG 算法伴生网络模体顺序

我们着重分析了在 6P 窗口区的情形,选择各个参数点如表 3 所示. 我们发现,PR 算法在窗口区无法形成网络,因此,我们则集中分析 VG 算法的情形. 从图 9 可以看到,6P 窗口区的模体排列顺序与

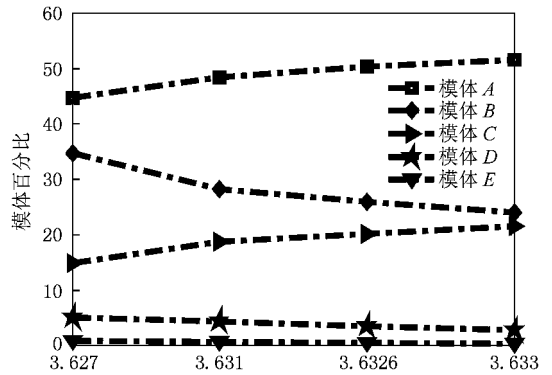


图 10 logistic 映射 6P 窗口区 VG 算法伴生网络各模体变化趋势

混沌区的情形一样,仍然为 $ABCDE$,但实际上,模体 B 与模体 C 的排序,并没有像混沌区的那样出现来回摇摆,模体 B 的百分比始终是大于模体 C 的百分比. 从图 10 可以进一步发现,在 6P 窗口区,随着周期的增加,模体 A 的百分比会随之增大,而模体 B 与模体 C 的百分比之差会随之减小;同时,模体的总数也是随着周期增大而增加的(如图 11 所示). 类似的现象在 5P 和 3P 窗口区也存在.

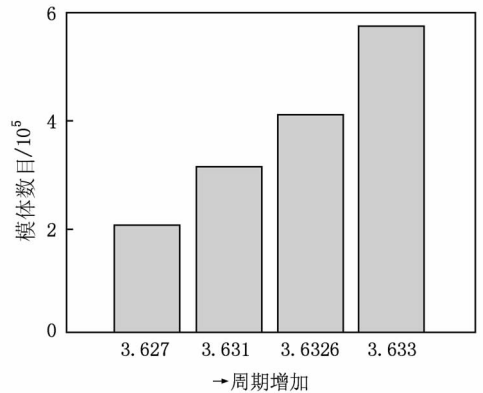


图 11 logistic 映射 6P 窗口区 VG 算法伴生网络模体个数

3. 不同类型时间序列的分析

文献[11]指出,PR 算法可以通过模体的排列顺序来区分混沌、超混沌和白噪声等不同类型的时序,这一结论是否对 VG 算法同样成立则是未知的,这也是这一节的分析内容. 如文献[11]一样,选取了 logistic 映射、Henon 映射和 Ikeda 映射三种混沌序列、超混沌广义 Henon 映射和超混沌 folded tower 映射的时序,各自的模型及参数分别为 logistic 映射:

$$x_{n+1} = 4x_n(1 - x_n); \quad (2)$$

Henon 映射:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= y_n + 1 - 1.4x_n^2, \\ y_{n+1} &= 0.3x_n; \end{aligned} \quad (3)$$

Ikeda 映射:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 1 + 0.7(x_n \cos t_n - y_n \sin t_n), \\ y_{n+1} &= 0.7(x_n \sin t_n + y_n \cos t_n), \\ t_n &= 0.4 - 6/(1 + x_n^2 + y_n^2); \end{aligned} \quad (4)$$

超混沌广义 Henon 映射:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 1.9 - y_n^2 - 0.03z_n, \\ y_{n+1} &= x_n, \\ z_{n+1} &= y_n; \end{aligned} \quad (5)$$

超混沌 folded-tower 映射:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 3.8x_n(1 - x_n) - 0.05(y_n + 0.35)(1 - 2z_n), \\ y_{n+1} &= 0.1(y_n + 0.35)(1 + 2z_n) - (1 - 1.9x_n), \\ z_{n+1} &= 3.78z_n(1 - z_n) + 0.2y_n. \end{aligned} \quad (6)$$

综合图 12(a)、图 13(a)、图 14(a),我们可以发现,无论是混沌序列还是超混沌序列、白噪声序列,

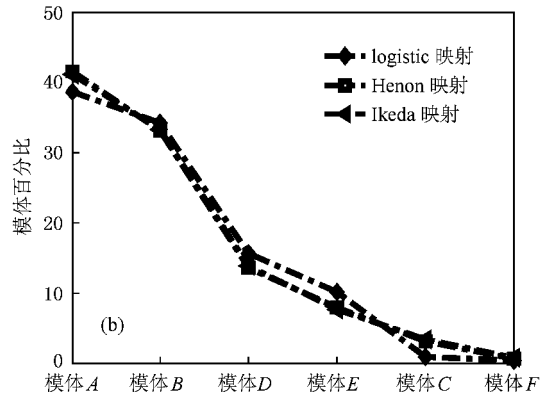
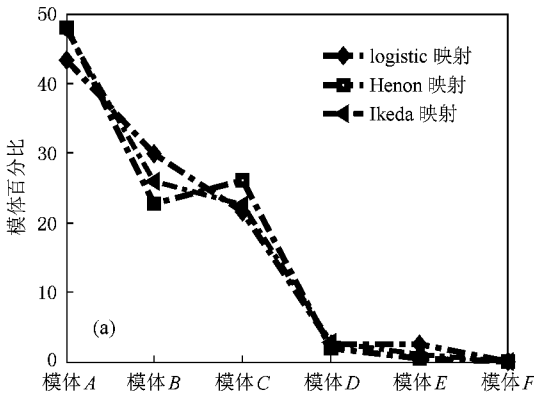


图 12 混沌映射伴生网络的模体顺序 (a)VG 算法;(b)PR 算法

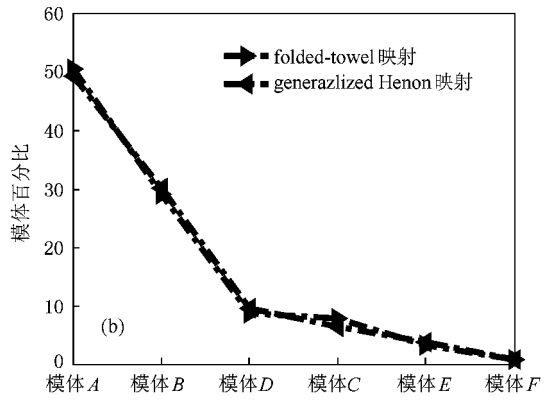
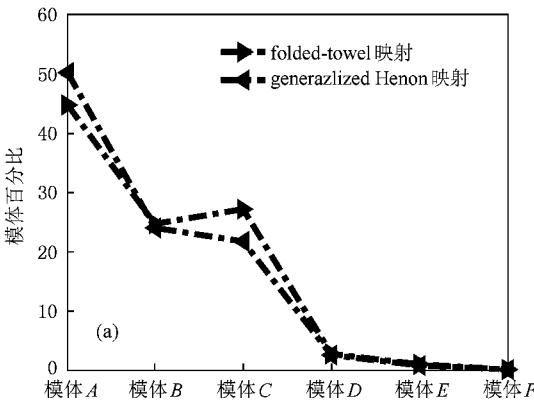


图 13 超混沌映射伴生网络的模体顺序 (a)VG 算法;(b)PR 算法

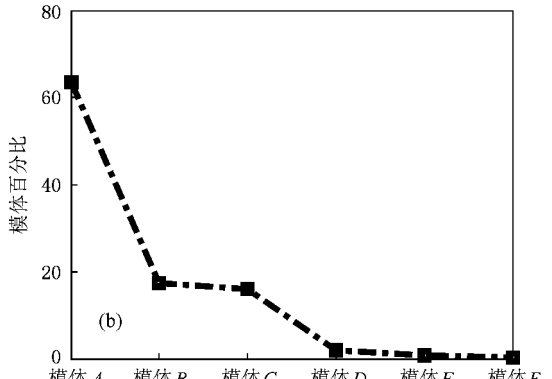
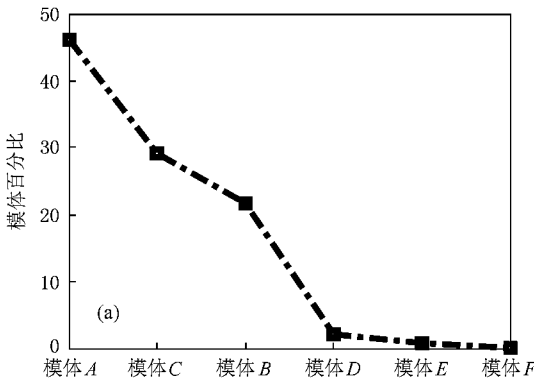


图 14 高斯白噪声伴生网络的模体顺序 (a)VG 算法;(b)PR 算法

VG 算法的伴生网络的各个模体排序都是 $ABCDEF$ 或 $ACBDEF$, 仍然存在模体 B 与模体 C 对不同类型的时间序列会出现百分比排序抖动的情形, 但无法像 PR 算法那样出现模体 C 对混沌、超混沌和白噪

声时间序列存在非常明显的排序差别. 如图 12(b)、图 13(b)、图 14(b) 所示, PR 算法下对于混沌、超混沌和白噪声时间序列, 伴生网络的模体排序分别是 $ABDECF$, $ABDCEF$ 和 $ABCD FE$.

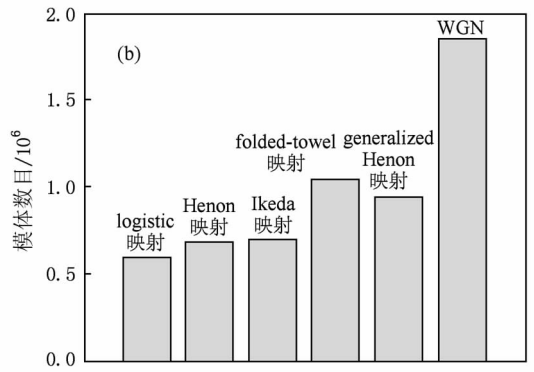
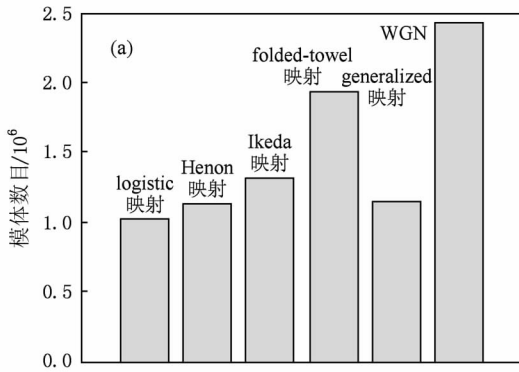


图 15 各类时间序列伴生网络模体数量对比 (a) VG 算法; (b) PR 算法

因此, 在 PR 算法下, 从混沌到超混沌、噪声, 伴生网络的模体 C 的频率是在递增的, 而模体 F 的频率是不断减小的, 并且模体总数呈现出与(混沌)系统维数的明显的相关性. 然而这些特征在 VG 算法并不明显, 表现在 VG 算法伴生网络的各个模体频率与系统维数的相关性不明显.

4. 结 论

时间序列与复杂网络理论之间已经架起了一座桥梁. 本文针对两种时间序列转换成网络的算法——VG 算法和 PR 算法, 分析具有不同混沌和倍周期分岔特征的时间序列伴生网络所具有的模体

特征. 总体来看, VG 算法简单, 能够把在不同时间点的时间序列值之间的时域特性反映到网络连接结构中, 因此, 在 logistic 映射的分岔区与倒分岔区, VG 算法伴生网络的模体出现频率与分岔周期之间存在着密切的关系. 而 PR 算法重视时间序列的相空间结构, 因此它的伴生网络模体的不同顺序可以用于刻画分类不同维数的混沌时间序列. 而两种算法各自的优点也恰恰是对方所相对欠缺的方面, 因此, 进一步的研究可以考虑如何综合这两种算法的优点.

作者感谢许小可和 Michael Small (司马乐) 提供的文献 [11] 和算法代码, 感谢张捷阅读本文及其交流和讨论.

[1] Albert R, Barabasi A L 2002 *Rev. Mod. Phys.* **74** 47
 [2] Newman M E J 2003 *SIAM REV* **45** 167
 [3] Wang X F, Li X, Chen G R 2006 *Complex Network Theory And Application* p1 (in Chinese) [汪小帆、李翔、陈关荣 2006 复杂网络理论及其应用 (北京:清华大学出版社) 第 1 页]
 [4] Wu J S, Di Z R 2004 *Progress In Physics* **24** 18 (in Chinese) [吴金闪、狄增如 2004 物理学进展 **24** 18]
 [5] Zhou T, Bo W H, Wang B H 2005 *Physics* **34** 31 (in Chinese) [周涛、柏文浩、汪秉宏 2005 物理 **34** 31]
 [6] Fang J Q 2007 *Progress in Natural Science* **17** 841 (in Chinese) [方锦清 2007 自然科学进展 **17** 841]
 [7] Pei W D, Liu Z X, Chen Z Q, Yuan Z Z, 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 6777 (in Chinese) [裴伟东、刘忠信、陈增强、袁著祉 2008 物理学报 **57** 6777]

[8] Wang G Z, Cao Y J, Bao Z J, Han Z X 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 3597 (in Chinese) [王光增、曹一家、包哲静、韩祯祥 2009 物理学报 **58** 3597]
 [9] Zhang J, Small M 2006 *Phys. Rev. Lett.* **96** 238701
 [10] Lucasa L, Luque B, Bllesteros F, Luque J, Nuno J C 2008 *Proc. Natl. Acad. Scai* **105** 4972
 [11] Xu X K, Zhang J, Small M 2008 *Proc. Natl. Acad. Scai* **105** 50
 [12] Zhang J, Sun J F, Luo X D, Zhang K, Tomomichi Nakamura, Small M *Physica D* **237** 2856
 [13] Lucasa L, Luuque B, Luque J, Nuno J C 2009 *Europhysics Letters* **86** 30001
 [14] Yang Z A, Chen S G, Wang G R 1996 *Acta Phys. Sin.* **45** 904 (in Chinese) [杨志安、陈式刚、王光瑞 1996 物理学报 **45** 904]

- [15] Liu B Z 1995 *Nonlinear Dynamics and Chaotic Basis* (Changchun: Dongbei Normal University Press) p174 (in Chinese) [刘秉正 1995 非线性动力学与混沌基础(修订本)(东北:东北师范大学出版社)第 174 页]
- [16] Milo R, Shen orr R, Itzkovitz S, Kashan N, Chklovskii D, Alon U 2002 *Science* **298** 824
- [17] [http://www. Weizmann. ac. Il/mcb/UriAlon/](http://www.Weizmann.ac.il/mcb/UriAlon/)

The study of network motifs induced from discrete time series *

Dong Zhao Li Xiang[†]

(*Department of Electronic Engineering, Fudan University, Shanghai 200433, China*)

(Received 7 July 2009; revised manuscript received 14 July 2009)

Abstract

Complex network theory is used to characterize the temporal and phase space features of a time series when it is transferred into a network. In this paper, we study the motif ranks of complex networks induced from different categories of time series with periodic bifurcations and chaos, which are generated with two algorithms: the Visiblity Graph (VG) algorithm and the Phase-space Reconstruction (PR) algorithm. The advantages of both algorithms are analyzed.

Keywords: time series, network motif, chaos, periodic bifurcation

PACC: 0547, 0565

* Project supported by the Natural Science Foundation of China (Grant No. 60874089) and the Shanghai Rising-Star Program (Grant No. 09QH1400200).

[†] Corresponding author. E-mail: lix@fudan.edu.cn