第 59 卷 第 3 期 2010 年 3 月
1000-3290/2010/59(03)/1775-05
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol. 59, No. 3, March, 2010

热场动力学理论中的 Husimi 分布函数及 Wehrl 熵的研究*

王 帅† 张丙云 张运海
(菏泽学院物理系, 菏泽 274015)
(2008 年 11 月 25 日收到;2009 年 6 月 13 日收到修改稿)

利用量子相空间技术和信息熵理论, 研究了热场动力学理论中量子纯态与相应混合态的 Husimi 分布函数及 Wehrl 熵的一致性问题. 结果表明, 热相干态与相应混合态的 Husimi 分布函数及 Wehrl 熵完全相同,支持了热场动力学理论. 且热相干态的 Wehrl 熵与平移因子无关, 故在热相干态中, 量子系统的可观测量的量子涨落及不确定关系也与平移因子无关.

关键词: 热场动力学理论, Husimi 分布函数, Wehrl 熵
PACC: 4250, 0365

1. 引 言

Takahashi 与 Umezawa 在 1975 年提出了热场动力学理论(TFD), 这一理论使得量子系统处于非零温度时的系综平均值可以等价地转换为对一个量子纯态的期望值[1], 并给出了热真空态的表达式. 随后热相干态和热压缩态等量子纯态相继被提出[2, 3], 并在量子统计和量子光学中得到了广泛应用[4—9]. Fan 于 1991 在计算量子系统可观测量的热平均时发现, 热真空态的 Wigner 函数与相应混合态的 Wigner 函数是一致的[10]. 受此启发, 文献[11]研究了 TFD 理论中热相干态与相应混合态的 Wigner 函数的一致性问题. 他们的研究结果支持了 TFD 理论. 但是由于 Wigner 分布函数的非正定性质, 故不能作为一个概率分布函数, 通常称之为准概率分布函数[12]. 为了克服这个缺点, Husimi 在 Wigner 函数定义的基础上引入了 Husimi 分布函数[13], 它是一类相空间正定概率分布函数. Husimi 分布函数对于讨论热平衡态动力学问题、量子信息熵(尤其是 Wehrl 熵)等有着非常重要的意义, 故近年来量子态的 Husimi 分布函数越来越受到人们的重视[14—16].

本文利用量子相空间理论, 首先给出 TFD 理论中量子纯态——热相干态的 Husimi 分布函数, 并研究热相干态与相应混合态的 Husimi 分布函数一致性问题. 其次由 Husimi 分布函数, 给出热相干态的 Wehrl 熵. 而量子态的 Wehrl 熵是一种量子系统可观测量的量子涨落及不确定关系的最好度量[14]. 最后根据热相干态的 Wehrl 熵, 研究量子系统在热相干态下,可观测量的量子涨落及不确定关系与平移因子的关系.

2. 热相干态的 Husimi 分布函数

在量子力学中, 通常采用态矢量或波函数来描述和确定系统所处的状态. 如果某个量子系统的状态能在希尔伯特空间由一个态矢量或波函数来描述, 即可表示为$|\psi\rangle$, 且满足归一化条件, 这样的量子态称为量子纯态. 在谐振子相干态表示的量子相空间中, 量子纯态的 Husimi 分布函数的定义为[15]

$$\mu(p,q) = \langle z|\psi\rangle\langle\psi|z\rangle. \tag{1}$$

式中 $|z\rangle = \exp\left[-\frac{1}{2}|z|^2 + za^\dagger\right]|0\rangle$ 为 Glauber 提出的相干态[17],它在量子光学等领域有着重要应用.

* 山东省自然科学基金(批准号: Y2008A16)和菏泽学院自然科学基金(批准号: XY09WL01)资助的课题.
† E-mail: wangshuai197903@sohu.com

在量子统计和量子光学等领域，热相干态也有着广泛应用. 常用的热相干态定义如下[2]：

$$|\tau\rangle_{\mathrm{DT}} = D(\tau)\,|0\rangle_{\mathrm{T}},$$

$$|0\rangle_{\mathrm{T}} = T(\theta)\,|0\tilde{0}\rangle, \tag{2}$$

式中 $|0\rangle_{\mathrm{T}}$ 为热真空态，$D(\tau)=\exp(\tau a^{\dagger}-\tau^{*}a)$ 为标准平移算符，$T(\theta)=\exp[-\theta(a\tilde{a}-a^{\dagger}\tilde{a}^{\dagger})]$ 为热压缩算符. 对于处在热库中的一维谐振子系统，热真空态[18]为

$$|0\rangle_{\mathrm{T}} = (1-\mathrm{e}^{-\beta\omega\hbar})^{1/2}\exp(\mathrm{e}^{-\beta\omega\hbar/2}a^{\dagger}\tilde{a}^{\dagger})\,|0\tilde{0}\rangle,$$

则相应的热相干态表达式为

$$\begin{aligned}|\tau\rangle_{\mathrm{DT}} &= D(\tau)\,|0\rangle_{\mathrm{T}}\\ &= (1-\mathrm{e}^{-\beta\omega\hbar})^{1/2}D(\tau)\\ &\quad\times\exp(\mathrm{e}^{-\beta\omega\hbar/2}a^{\dagger}\tilde{a}^{\dagger})\,|0\tilde{0}\rangle.\end{aligned} \tag{3}$$

式中的 $\tilde{a}^{\dagger}$ 是虚构希尔伯特空间中的玻色产生算符，与希尔伯特空间中的玻色产生算符 $a^{\dagger}$ 相对应. 由(3)式可知，热相干态是双模量子纯态. 为了求其 Husimi 分布函数，我们引入如下双模相干态形式[18]：

$$|z\tilde{z}\rangle = \exp\left[-\frac{1}{2}|z|^{2}-\frac{1}{2}|\tilde{z}|^{2}+za^{+}+\tilde{z}\tilde{a}^{+}\right]|0\tilde{0}\rangle. \tag{4}$$

利用 IWOP 技术[18]，容易证明双模相干态满足归一化条件 $\int\frac{\mathrm{d}^{2}z\mathrm{d}^{2}\tilde{z}}{\pi^{2}}|z\tilde{z}\rangle\langle z\tilde{z}|=1$. 则热相干态的 Husimi 分布函数可表示为

$$\mu(p\tilde{p},q\tilde{q}) = \langle z\tilde{z}|\tau\rangle_{\mathrm{DTDT}}\langle\tau|z\tilde{z}\rangle. \tag{5}$$

把(3)和(4)式代入(5)式，并利用算符的正规乘积形式，可得在希尔伯特和虚构希尔伯特所组成的相空间中 Husimi 分布函数为

$$\begin{aligned}\mu(p\tilde{p},q\tilde{q}) &= (1-\mathrm{e}^{-\hbar\omega\beta})\exp\big[\mathrm{e}^{-\hbar\omega\beta/2}(z^{*}-\tau^{*})\tilde{z}^{*}\\ &\quad-(z^{*}-\tau^{*})(z-\tau)-|\tilde{z}|^{2}\\ &\quad+\mathrm{e}^{-\hbar\omega\beta/2}(z-\tau)\tilde{z}\big].\end{aligned} \tag{6}$$

由 Husimi 函数的归一化条件 $\int\frac{\mathrm{d}^{2}z\mathrm{d}^{2}\tilde{z}}{\pi^{2}}\mu(p\tilde{p},q\tilde{q})=1$，对虚构希尔伯特空间进行积分，就可得出在希尔伯特空间中的 Husimi 分布函数，即

$$\begin{aligned}\mu(p,q) &= \int\frac{\mathrm{d}^{2}\tilde{z}}{\pi}(1-\mathrm{e}^{-\hbar\omega\beta})\\ &\quad\times\exp\big[\mathrm{e}^{-\hbar\omega\beta/2}(z^{*}-\tau^{*})\tilde{z}^{*}\\ &\quad-(z^{*}-\tau^{*})(z-\tau)-|\tilde{z}|^{2}\\ &\quad+\mathrm{e}^{-\hbar\omega\beta/2}(z-\tau)\tilde{z}\big]\\ &= (1-\mathrm{e}^{-\hbar\omega\beta})\exp\big[-(1-\mathrm{e}^{-\hbar\omega\beta})\\ &\quad\times(z^{*}-\tau^{*})(z-\tau)\big].\end{aligned} \tag{7}$$

这就是热相干态的 Husimi 分布函数. 推导中利用了如下公式：

$$\begin{aligned}&\int\frac{\mathrm{d}^{2}z}{\pi}\mathrm{e}^{\lambda|z|^{2}+fz+gz^{*}}\\ &= -\frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{-fg/\lambda},\\ &|0\tilde{0}\rangle\langle 0\tilde{0}| = :\mathrm{e}^{-\hat{a}^{\dagger}\hat{a}-\tilde{a}^{\dagger}\tilde{a}}:.\end{aligned} \tag{8}$$

式中::表示算符的正规乘积形式. 再利用积分式(8)，易证明热相干态的 Husimi 分布函数满足归一化条件

$$\int\frac{\mathrm{d}^{2}z}{\pi}\mu(p,q) = 1. \tag{9}$$

当平移算符 $D(\tau)=1$，即 $\tau=0$ 时，可以得到热真空态的 Husimi 分布函数

$$\begin{aligned}\mu(p,q) &= (1-\mathrm{e}^{-\hbar\omega\beta})\\ &\quad\times\exp[-(1-\mathrm{e}^{-\hbar\omega\beta})|z|^{2}].\end{aligned} \tag{10}$$

以上通过引入双模相干态，得到了量子纯态——热相干态的 Husimi 分布函数，其值恒为正值，且与平移因子有关. 利用双模相干态表象和算符的正规乘积形式来计算量子态的 Husimi 函数显的非常简洁方便，这是利用相干态表象和算符正规乘积形式进行有关量子计算的优点. 下面我们进而研究热相干态的 Wehrl 熵.

3. 热相干态的 Wehrl 熵

信息熵是信息科学中的一个基本量，由统计物理理论知，信息熵是描述量子系统可观测量量子涨落及不确定关系的最好度量. 特别是量子态的 Wehrl 熵，在量子统计物理中是非常有用的工具，是一种关于量子效应和热效应所引起的不确定关系的最好度量[14,15]. 文献[19]给出 Wehrl 熵的如下定义：

$$I_{\mathrm{W}} = -\int\frac{\mathrm{d}p\mathrm{d}q}{2\pi\hbar}\mu(p,q)\,\ln\mu(p,q). \tag{11}$$

按照 Wehrl 熵的定义(11)式，把(7)式代入(11)式，在相干态表示的量子相空间中，得

$$\begin{aligned}I_{\mathrm{W}} &= -\int\frac{\mathrm{d}^{2}z}{\pi}(1-\mathrm{e}^{-\hbar\omega\beta})\\ &\quad\times\exp\big[-(1-\mathrm{e}^{-\hbar\omega\beta})\\ &\quad\times(|z|^{2}-\tau^{*}z-\tau z^{*}+|\tau|^{2})\big]\\ &\quad\times\ln(1-\mathrm{e}^{-\hbar\omega\beta})-\int\frac{\mathrm{d}^{2}z}{\pi}(1-\mathrm{e}^{-\hbar\omega\beta})\\ &\quad\times\exp\big[-(1-\mathrm{e}^{-\hbar\omega\beta})\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\times(|z|^2-\tau^* z-\tau z^*+|\tau|^2)] \\
&\times[-(1-e^{-\hbar\omega\beta}) \\
&\times(|z|^2-\tau^* z-\tau z^*+|\tau|^2)] \\
\equiv\, & I_{W1}+I_{W2},
\end{aligned}
\tag{12}
$$

(12)式的第一项 I_{W1} 采用积分式(8)，得

$$
\begin{aligned}
I_{W1} &= -\int \frac{d^2 z}{\pi}(1-e^{-\hbar\omega\beta}) \\
&\quad\times\exp[-(1-e^{-\hbar\omega\beta}) \\
&\quad\times(|z|^2-\tau^* z-\tau z^*+|\tau|^2)] \\
&\quad\times\ln(1-e^{-\hbar\omega\beta}) \\
&= -\ln(1-e^{-\hbar\omega\beta}).
\end{aligned}
\tag{13}
$$

在(12)式的第二项，令 $\lambda=-(1-e^{-\hbar\omega\beta}),f=-\tau^*\lambda,g=-\tau\lambda$. 若直接对(12)式积分，积分过程会十分的复杂，在此采用一巧妙的数学变换有

$$
\begin{aligned}
I_{W2} &= \exp(\lambda|\tau|^2) \\
&\quad\times\int\frac{d^2 z}{\pi}\lambda(\lambda|z|^2+fz+gz^*+\lambda|\tau|^2) \\
&\quad\times\exp(\lambda|z|^2+fz+gz^*) \\
&= \exp(\lambda|\tau|^2) \\
&\quad\times\left[\lambda^2\frac{\partial}{\partial\lambda}\int\frac{d^2 z}{\pi}\exp(\lambda|z|^2+fz+gz^*)\right. \\
&\quad\left.+\lambda f\frac{\partial}{\partial f}\int\frac{d^2 z}{\pi}\exp(\lambda|z|^2+fz+gz^*)\right] \\
&\quad+\exp(\lambda|\tau|^2) \\
&\quad\times\left[\lambda g\frac{\partial}{\partial g}\int\frac{d^2 z}{\pi}\exp(\lambda|z|^2+fz+gz^*)\right. \\
&\quad\left.+\lambda^2|\tau|^2\int\frac{d^2 z}{\pi}\exp(\lambda|z|^2+fz+gz^*)\right].
\end{aligned}
\tag{14}
$$

再利用积分式(8)，在整个相空间对(14)式积分，得

$$
I_{W2}=1. \tag{15}
$$

把(13)和(15)式代入(12)式,得

$$
I_W=I_{W1}+I_{W2}=1-\ln(1-e^{-\beta\hbar\omega}). \tag{16}
$$

这样我们就通过一个巧妙的数学变换，得到了热场动力学理论中热相干态，这一量子纯态的 Wehrl 熵. 显然，热相干态的 Wehrl 熵随温度的增加而增加. 另外热相干态的 Wehrl 熵与平移因子 τ 无关. 这一结果表明在热相干态下，量子系统的可观测量的量子涨落及不确定关系也与平移因子 τ 无关.

由热真空态的 Husimi 分布函数(10)式和 Wehrl 熵的定义(11)式，可得这样的结论，虽然热真空态与热相干态的 Huismi 分布函数不同，故其物理量的期望值也不同，但它们的 Wehrl 熵完全相同. 这一结果表明，在热相干态或热真空态下，量子系统的可观测量的量子涨落及不确定关系完全相同，这与目前研究结果相一致[7,8]. 下面研究热相干态这一量子纯态与其相应混合态的 Husimi 分布函数及 Wehrl 的一致性问题.

4. 混合态的 Husimi 分布函数和 Wehrl 熵

在有限温度 T 时，量子系统以一定的概率处于某一个量子态上，需要用一组态矢量及其概率来描述，即系统处于混合态. 对于处于热平衡的系统，混合态常用与吉布斯正则分布相联系的密度矩阵来表征，其密度矩阵可表示为[20]

$$
\rho_T=Z^{-1}e^{-\beta H}, \tag{17}
$$

式中 $Z=\mathrm{Tr}(e^{-\beta H})$ 为配分函数，这时量子系统处在自由热态，由能量本征态所组成的混合态. 由于密度矩阵包含了量子态的概率分布及相位等信息，所以由密度矩阵 ρ 所构建的 Husimi 分布函数一样也包含了量子态的所有量子信息. 利用算符恒等式 $e^{\lambda a^\dagger a}=:\exp[(e^\lambda-1)a^\dagger a]:$[18]，把 $\rho_T=Z^{-1}e^{-\beta H}$ 化为正规乘积形式有

$$
\begin{aligned}
\rho_T &= (1-e^{-\hbar\omega\beta}) \\
&\quad\times:\exp[-(1-e^{-\hbar\omega\beta})a^\dagger a]:,
\end{aligned}
\tag{18}
$$

对于热场中一维谐振子系统的哈密顿量 $H=\hbar\omega\left(a^\dagger a+\frac{1}{2}\right)$. 配分函数 Z 在能量本征态表象中为

$$
\begin{aligned}
Z &= \mathrm{Tr}(e^{-\beta H}) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\langle n|e^{-\beta H}|n\rangle \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}e^{-\hbar\omega\beta\left(n+\frac{1}{2}\right)} \\
&= \frac{e^{-\frac{1}{2}\hbar\omega\beta}}{1-e^{-\hbar\omega\beta}}.
\end{aligned}
\tag{19}
$$

由(18)式，可以得到与热相干态这一量子纯态相对应的混合热态的密度矩阵为[2]

$$
\begin{aligned}
\rho_T(\tau) &= D(\tau)\rho_T D^\dagger(\tau) \\
&= (1-e^{-\hbar\omega\beta}):\exp[-(1-e^{-\hbar\omega\beta}) \\
&\quad\times(a^\dagger-\tau^*)(a-\tau)]:
\end{aligned}
\tag{20}
$$

在谐振子相干态表示的量子相空间中，密度矩阵 ρ 构建 Husimi 分布函数的定义如下[14]：

$$
\mu(p,q)=\langle z|\rho|z\rangle, \tag{21}
$$

因此，把(20)式代入到(21)式，得

$$\mu(p,q) = \langle z|\rho|z\rangle = (1-e^{-\hbar\omega\beta})\exp[-(1-e^{-\hbar\omega\beta}) \times (z^*-\tau^*)(z-\tau)]. \tag{22}$$

比较(22)式和(7)式，可知，热相干态的 Husimi 函数与混合态的 Husimi 函数是相同的. 并且根据 Wehrl 熵的定义，热相干态与相应混合态的 Wehrl 熵也完全一致. 这一研究结果与文献[11]中给出的热相干态的 Wigner 函数与混合态的 Wigner 函数视为同一在理论上相一致.

当平移算符 $D(\tau)=1$，即 $\tau=0$ 时,得到自由热态(混合态)Husimi 分布函数

$$\mu(p,q) = (1-e^{-\hbar\omega\beta}) \times \exp[-(1-e^{-\hbar\omega\beta})|z|^2] \tag{23}$$

与 Anderson 等人[14]的结果相一致. 对比(23)式和(10)式，可以得到这样的结论，热真空态的 Husimi 函数与自由热态的 Husimi 函数是相同的. 且根据 Wehrl 熵的定义，热真空态与相应混合态的 Wehrl 熵也完全一致. 这一结果又与热真空态和自由热态的 Wigner 函数视为统一在理论上是相一致的[10].

5. 结　论

本文利用量子相空间技术和信息熵理论，通过引入双模相干态，给出了 TFD 理论中的热相干态的 Husimi 分布函数. 进而利用一巧妙的数学变换，简捷地得到了热相干态的 Wehrl 熵. 并与相应混合态的 Husimi 分布函数及 Wehrl 熵进行了比较. 结果表明，热相干态与相应混合态的 Husimi 分布函数及 Wehrl 熵完全相同. 且根据热相干态的 Wehrl 熵与平移因子无关，故在热相干态下，量子系统的可观测量的量子涨落及不确定关系也与平移因子无关. 所以本文的研究结果不但支持了 TFD 理论的正确性，还对 TFD 理论中量子态的相空间分布函数和 Wehrl 熵的研究具有很好的参考价值.

[1] Takahashi Y, Umezawa H 1975 *Collective Phenomena* **2** 55

[2] Fearn H, Collett M J 1988 *J. Mod. Opt.* **35** 553

[3] Oz-Vogt J, Mann A, Revzen M 1991 *J. Mod. Opt.* **38** 2339

[4] Fan H Y, Liang X T 2000 *Chin. Phys. Lett.* **17** 174

[5] Wang Z Q 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1808 (in Chinese) [汪仲清 2002 物理学报 **51** 1808]

[6] Zhan Y B 2004 *Chin. Phys.* **13** 234

[7] Li H Q, Xu X L, Wang J S 2006 *Chin. Phys. Lett.* **23** 2892

[8] Xu X L, Li H Q, Wang J S 2007 *Chin. Phys.* **16** 2462

[9] Mintert F, Życzkowski K 2004 *Phys. Rev.* A **69** 2317

[10] Fan H Y 1991 *Commun. Theor. Phys.* **16** 123

[11] Wang S 2009 *Acta Optica Sinica* **29** 1101 (in Chinese) [王　帅 2009 光学学报 **29** 1101]

[12] Meng X G, Wang J S, Liang B L 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 2160 (in Chinese) [孟祥国、王继锁、梁宝龙 2007 物理学报 **56** 2160]

[13] Husimi K 1940 *Proc. Phys. Math. Soc. Japan.* **22** 264

[14] Anderson A, Halliwell J J 1993 *Phys. Rev.* D **48** 2753

[15] Pennini F, Plastino A 2004 *Phys. Rev.* E**69** 7101

[16] Xu X W, Ren T Q, Chi Y J, Zhu Y L, Liu S Y 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3892 (in Chinese) [徐秀玮、任廷琦、迟永江、朱友良、刘姝廷 2006 物理学报 **55** 3892]

[17] Glauber R J 1963 *Phys. Rev.* **131** 2766

[18] Fan H Y 2005 *From Quantum Mechanics to Quantum Optics* (Shanghai: Shanghai Jiaotong University Press) (in Chinese) [范洪义 2005 从量子力学到量子光学(上海:上海交通大学出版社)]

[19] Wehrl A 1978 *Rev. Mod. Phys.* **50** 221

[20] Department of Physics, Peking University 1987 *Quantum Statistical Physics* (Beijing: Peking University Press) p28 (in Chinese) [北京大学物理系《量子统计物理学》编写组 1987 量子统计物理学(北京: 北京大学出版社)第 28 页]

Husimi function and Wehrl entropy in thermo field dynamics *

Wang Shuai† Zhang Bing-Yun Zhang Yun-Hai
(*Department of Physics, Heze College, Heze* 274015, *China*)
(Received 25 November 2008; revised manuscript received 13 June 2009)

Abstract

Using the quantum phase space technique and the information-theory like the Wehrl entropy, the Husimi function and the Wehrl entropy of the quantum pure states and the corresponding mixed states in thermo field dynamics are studied. It is found that the Husimi function and the Wehrl entropy of the thermal coherent state agree with that of the corresponding mixed states. And the Wehrl entropy of thermal coherent state is not related with the displacement factor. Therefore for a quantum system, the quantum fluctuations of the observable quantities and corresponding uncertainty relation are also not related with the displacement factor in the thermal coherent state.

Keywords: thermo field dynamics, Husimi function, Wehrl entropy
PACC: 4250, 0365

* Project supported by the Natural Science Foundation of Shandong Province, China (Grant No. Y2008A16) and the Natural Science Foundation of Heze University of Shandong Province, China (Grand No. XY 09WL01).

† E-mail: wangshuai197903@ sohu. com