

# 非简并双光子 Jaynes-Cummings 模型腔场谱中的量子干涉\*

李悦科<sup>†</sup> 张桂明 高云峰

(聊城大学传媒技术学院, 聊城 252059)

(2009 年 5 月 9 日收到; 2009 年 6 月 10 日收到修改稿)

研究了二模二项式光场与二能级原子在高  $Q$  腔中发生双光子相互作用过程的腔场谱, 给出了弱初始场条件下腔场谱的数值计算结果, 讨论了两模腔场谱间的量子干涉. 结果表明: 两模腔场谱间的量子干涉随着频差的增大而呈现出周期性的衰减振荡, 其振荡周期约为  $0.16/g$  ( $g$  为原子与光场的相互作用强度系数), 频差大于  $1.6/g$  时干涉效应已经很弱. 量子干涉还与初始场强度有关, 随着初始场最大光子数的增加, 量子干涉效应逐渐增强, 但当光子数大于 4 时, 干涉效应迅速减弱, 当最大光子数大于 6 时, 量子干涉现象几乎消失.

**关键词:** 腔场谱, 量子干涉, 二项式光场

**PACC:** 4250, 3280

## 1. 引言

1985 年, Stoler 等人<sup>[1]</sup>从理论上引入二项式光场(binomial states), 这种光场可以通过调节光场参量从相干态经历中间态, 过渡到数态; 1987 年, Dattoli 等人<sup>[2]</sup>的研究发现可以在自由电子激光中产生这种二项式光场; 之后的 20 几年来, 无论是在理论层面上, 还是在实验层面上, 原子与二项式光场相互作用过程的量子特性均得到较多的研究<sup>[3-7]</sup>.

1993 年, Tahira Nasreen 等人<sup>[8]</sup>研究了单个二能级原子与光场发生简并双光子过程的腔场谱; 1994 年 Ashraf 详细研究<sup>[9]</sup>了单个原子与光场发生非简并双光子相互作用过程的腔场谱, 并认为系统的腔场谱只是两模腔场谱的简单叠加; 自 1999 年以来, 人们对腔场谱量子特性的研究不断深入<sup>[10-15]</sup>, 作为获取原子与光场相互作用信息的重要手段, 腔场谱已经成为量子光学研究的前沿热点.

研究原子与两模光场相互作用系统的腔场谱时, 人们也像 Ashraf 的处理方法<sup>[9]</sup>一样, 舍弃了腔场谱计算公式中的  $a_1(t')a_2(t)$  和  $a_2(t')a_1(t)$  两个干涉项, 即忽略了两模光场间的量子干涉现

象<sup>[11,13-15]</sup>, 对腔场谱结构进行了适当的简化. 然而, 最近的研究表明<sup>[7]</sup>: 两模二项式光场的腔场谱之间存在量子干涉现象, 且干涉效应与两模频差、光场强弱有关. 到目前为止, 在什么情况下“干涉相长”, 什么情况下“干涉相消”, “相长相消”会不会“交替”出现, 有没有周期性, 量子干涉与两模频差之间存在着怎样的内在规律性, 光场强度对于干涉效应又有着怎样的影响等的研究未见报道, 这正是本文所要研究的问题.

## 2. 模型与理论推导

单个二能级原子与两模二项式光场, 在理想高  $Q$  腔内发生双光子相互作用过程, 系统在旋波近似下的哈密顿为<sup>[16,17]</sup> (取  $\hbar = 1$ )

$$H = \sum_{i=1}^2 \omega_i a_i^\dagger a_i + \frac{1}{2} \omega_0 \sigma_z + g(a_1^\dagger a_2^\dagger \sigma + \sigma^\dagger a_1 a_2), \quad (1)$$

其中  $a_i^\dagger, a_i$  分别为第  $i$  模光场光子的产生和湮没算符;  $\sigma, \sigma^\dagger$  和  $\sigma_z$  为原子的赝自旋算符,  $g$  为原子与光场的耦合常数;  $\omega_i$  为第  $i$  模腔场光子的中心频率,  $\omega_0$  为原子跃迁频率.

\* 国家自然科学基金(批准号:10574060)资助的课题.

<sup>†</sup> E-mail: liyueke@lcu.edu.cn

此时,系统的基矢可取为

$$\begin{aligned} |\Psi_1^N\rangle &= |+, n_1, n_2\rangle \\ |\Psi_2^N\rangle &= |-, n_1 + 1, n_2 + 1\rangle, \end{aligned} \quad (2)$$

式中  $N$  代表  $(n_1, n_2)$ .

式(1)的本征方程为

$$H|\varphi_j^N\rangle = E_j^N|\varphi_j^N\rangle, \quad (j = 1, 2), \quad (3)$$

$$|\varphi_j^N\rangle = \sum_{m=1}^2 C_{jm}^N |\Psi_m^N\rangle, \quad (j = 1, 2). \quad (4)$$

在共振相互作用条件下  $(\omega_0 = \omega_1 + \omega_2)$ , 利用标准方法可以求出本征值和本征态

$$\begin{aligned} E_j^N &= \omega_1(n_1 + 1) + \omega_2(n_2 + 1) + \frac{\omega_0}{2} \\ &+ (-1)^{j+1} g \sqrt{(n_1 + 1)(n_2 + 1)}, \\ &(j = 1, 2), \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} C_{11}^N &= C_{12}^N = C_{21}^N = -C_{22}^N = 1/\sqrt{2}, \\ &(n_1 \geq 0 \text{ 且 } n_2 \geq 0), \end{aligned} \quad (6a)$$

$$\begin{aligned} C_{11} &= C_{12} = C_{21} = 0, C_{22} = 1, \\ &(n_1 = -1 \text{ 或 } n_2 = -1). \end{aligned} \quad (6b)$$

根据 Stoler 等人<sup>[1]</sup>的工作, 一个单模二项式态在数态基中可以定义为

$$\begin{aligned} |\eta M\rangle &= \sum_{n=0}^M \beta_n^M |n\rangle, \\ &(0 < \eta < 1, M > 0), \end{aligned} \quad (7a)$$

式中

$$\begin{aligned} \beta_n^M &= \left[ \frac{M!}{n!(M-n)!} \eta^n (1-\eta)^{M-n} \right]^{1/2}, \\ &(0 \leq n \leq M), \end{aligned} \quad (7b)$$

$\beta_n^M$  是二项式的光子分布函数, 表现为亚泊松分布,  $M$  是光场的最大光子数. 当  $\eta = 0, 1$  时,  $|\eta M\rangle$  分别约化为  $|0\rangle$  和数态; 当  $\eta \rightarrow 0, M \rightarrow \infty$  但  $\eta M = \bar{n} = \alpha^2$  ( $\alpha$  为常数,  $\bar{n}$  为平均光子数), 则  $|\eta M\rangle$  约化为相干态.

按照 Eberly 物理谱的定义<sup>[17]</sup>, 该系统的腔场谱按下式计算:

$$\begin{aligned} S(\omega) &= 2\Gamma \int_0^T dt' \exp[-(\Gamma - i\omega)(T - t')] \int_0^T dt \\ &\times \exp[-(\Gamma + i\omega)(T - t)] \\ &\times \langle \Phi(0) | A^+(t') A(t) | \Phi(0) \rangle, \end{aligned} \quad (8)$$

其中,  $\Gamma$  为谱仪带宽,  $T$  为测量时间,  $A(t) = a_1(t) + a_2(t)$ ,  $|\Phi(0)\rangle$  是系统的初态. 本文讨论初始时刻原子处于激发态而两模光场均为二项式态的情况, 即取

$$|\Phi(0)\rangle = \sum_{n=0}^M q_{n_1}^{(1)} q_{n_2}^{(2)} |+, n_1, n_2\rangle,$$

式中  $q_{n_i}^{(i)} = \beta_{n_i}^M$ .

对(8)式进行繁复的运算可以得到

$$\begin{aligned} S(\omega) &= 2\Gamma \sum_{n_1=-1}^{M_1} \sum_{n_2=-1}^{M_2} \sum_{m=1}^2 \left| \sum_{j=1}^2 (q_{n_1+1}^{(1)} q_{n_2}^{(2)} G_{jm}^{N_1} Z_{jm}^{N_1} \right. \\ &\left. + q_{n_1}^{(1)} q_{n_2+1}^{(2)} F_{jm}^{N_2} Y_{jm}^{N_2} \right|^2. \end{aligned} \quad (9a)$$

如果忽略量子干涉, 系统腔场谱可看作两模腔场谱的简单叠加, 即

$$S'(\omega) = S_1(\omega) + S_2(\omega),$$

其中

$$S_1(\omega) = 2\Gamma \sum_{n_1=-1}^{M_1} \sum_{n_2=-1}^{M_2} \sum_{m=1}^2 \left| \sum_{j=1}^2 (q_{n_1+1}^{(1)} q_{n_2}^{(2)} G_{jm}^{N_1} Z_{jm}^{N_1}) \right|^2, \quad (9b)$$

$$S_2(\omega) = 2\Gamma \sum_{n_1=-1}^{M_1} \sum_{n_2=-1}^{M_2} \sum_{m=1}^2 \left| \sum_{j=1}^2 (q_{n_1}^{(1)} q_{n_2+1}^{(2)} F_{jm}^{N_2} Y_{jm}^{N_2}) \right|^2, \quad (9c)$$

$$G_{jm}^{N_1} = \sum_{k=1}^2 C_{j1}^{N_1} C_{jk}^{N_1} b_k^{(1)} C_{mk}^N,$$

$$F_{jm}^{N_2} = \sum_{k=1}^2 C_{j1}^{N_2} C_{jk}^{N_2} b_k^{(2)} C_{mk}^N,$$

$$Z_{jm}^{N_1} = \frac{\exp[i(\omega - (E_j^{N_1} - E_m^N))T] - \exp(-T\Gamma)}{\Gamma + i(\omega - (E_j^{N_1} - E_m^N))},$$

$$Y_{jm}^{N_2} = \frac{\exp[i(\omega - (E_j^{N_2} - E_m^N))T] - \exp(-T\Gamma)}{\Gamma + i(\omega - (E_j^{N_2} - E_m^N))},$$

式中  $b_k^{(1)} = \sqrt{n_1 + k}$ ,  $b_k^{(2)} = \sqrt{n_2 + k}$ ,  $N_1$  代表  $(n_1 + 1, n_2)$ ,  $N_2$  代表  $(n_1, n_2 + 1)$ ,  $N$  代表  $(n_1, n_2)$ ,  $q_{n_i}^{(i)} = \beta_{n_i}^M$  为二项式光场的光子数分布.

利用(5), (6), (7), (9)式, 就可以计算系统的腔场谱(取  $T = 40 \text{ g}^{-1}$ ,  $\Gamma = 0.1 \text{ g}$ ,  $\eta_1 = \eta_2 = 0.5$ ).

### 3. 结果与分析

#### 3.1. 频差 $\Delta$ 对量子干涉的影响

频差  $\Delta = |\omega_1 - \omega_2|$  表示两模光场中心频率之差, 取两模光场最大光子数  $M_1 = M_2 = 1$  计算腔场谱. 图 1 中  $S(\omega)$  为(9a)式计算出的腔场谱, 给出了考虑量子干涉情况下, 计及两模间的交叉项时, 腔场谱结构与频差之间的关系; 图 2 中  $S_1(\omega) + S_2(\omega)$  为(9b)式与(9c)式之和计算出的腔场谱, 给出了忽略交叉项, 即将系统的腔场谱看成两模腔场

谱的简单叠加时,系统腔场谱结构与频差之间的关系.比较两图计算结果,可以发现:随着频差的逐渐增大,系统腔场谱出现时而增强、时而减弱的周期性量子干涉现象,且这种干涉效应随频差的增加越来越弱,在干涉相消时峰位没有改变.可见,两模二项式腔场谱间存在量子干涉现象,若忽略干涉因子——交叉项后,得到的是简化了的腔场谱结构.

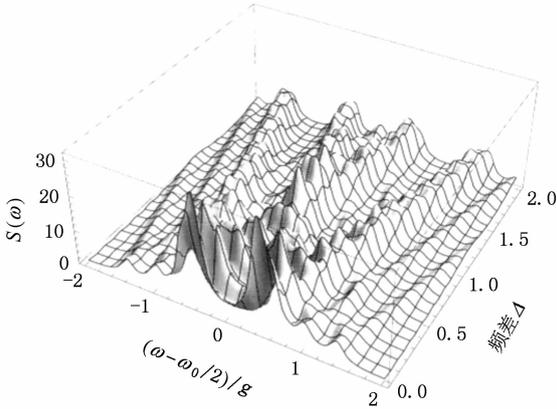


图1 两模处于二项态系统腔场谱与频差  $\Delta$  的关系

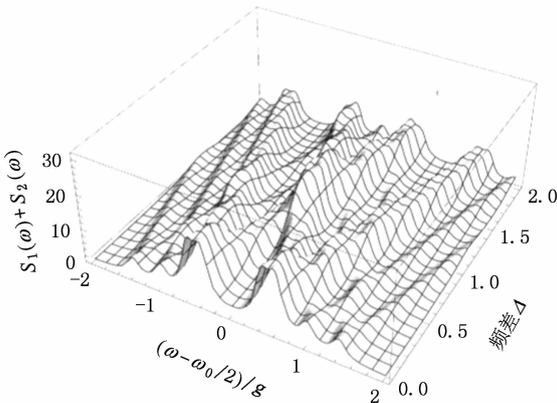


图2 忽略交叉项情况下系统腔场谱与频差  $\Delta$  的关系

如果这样还难以看出量子干涉对腔场谱影响规律的话,我们用图1对应点的光场强度减去图2对应点处的光场强度,得出图3的结果.图3中  $\Delta S(\omega) = S(\omega) - S_1(\omega) - S_2(\omega)$ ,反映对应点处量子干涉因子,交叉项致使光场强度的改变量.图3可知,随着频差的逐渐越大,两模腔场谱间出现“干涉相长,干涉相消”的量子干涉现象,且呈现出周期性衰减振荡的规律.

### 3.2. 最大光子数 $M$ 对量子干涉的影响

图4(a),(b),(c),(d)分别给出光场最大光子

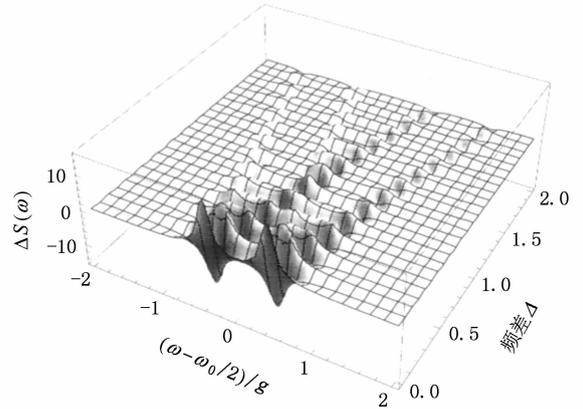


图3 干涉效应引起腔场谱的改变与频差  $\Delta$  的关系

数  $M_1 = M_2$  取 2,3,4,5 时,交叉项-干涉因子对腔场谱结构的绝对影响.即用考虑量子干涉腔场谱强度,减去对应点处不考虑量子干涉情况下腔场谱强度所得到的差值,即用  $\Delta S(\omega) = S(\omega) - S_1(\omega) - S_2(\omega)$  表征交叉项因子对腔场谱的绝对影响.图4表明:随着最大光子数的增加,量子干涉效应也逐渐增强,但当平均光子数大于 4 时,干涉效应迅速减弱;干涉效应随频差的增加呈现出周期性衰减振荡的规律,其振荡周期约为  $0.16g$ ,频差大于  $1.6g$  时干涉效应已经不明显了.进一步的计算表明:有一模为真空场,或者强场(最大光子数大于 6),或者频差较大时,量子干涉效应可以忽略;弱场,频差较小时,量子干涉效应不能忽略.

## 4. 结 论

本文研究了高  $Q$  腔中单个二能级原子与两模二项式光场发生双光子相互作用过程系统的腔场谱,讨论了两模二项式光场腔场谱间的量子干涉.计算结果表明:非真空场情况下,两模腔场谱之间存在量子干涉现象,其干涉效应与频差  $\Delta$ 、光场最大光子数  $M$  有显著相关性.随着频差的逐渐增大,两模腔场谱间交替出现“干涉相长,干涉相消”的量子干涉现象,且干涉呈现出周期性衰减振荡的规律,其振荡周期约为  $0.16g$ ,当频差  $\Delta$  大于  $1.6g$  时,干涉效应明显逐渐减弱;量子干涉只是使峰的强弱发生变化,但干涉不改变腔场谱的峰位;随着最大光子数的增加,量子干涉效应也逐渐增强,但当平均光子数大于 4 时,干涉效应迅速减弱,当最大光子数大于 6 时,量子干涉现象几乎消失.因此,弱场 ( $0 < M \leq 5$ )、频差较小 ( $\Delta < 1.5g$ ) 时,量子干涉应予以

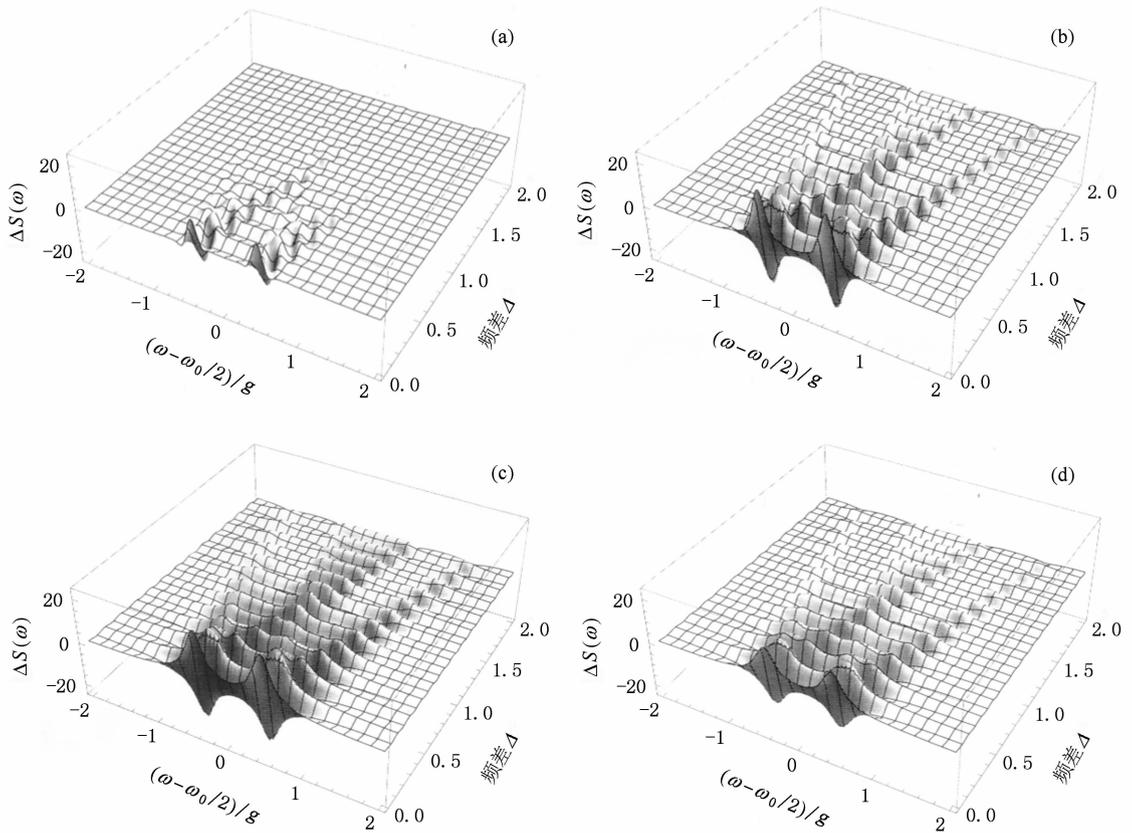


图4 不同强度光场下干涉效应与频差  $\Delta$  的关系

考虑; 强场 ( $M \geq 6$ )、真空场 ( $M = 0$ )、频差较大 ( $\Delta \geq 1.6 g$ ) 时, 量子干涉可以忽略.

- [1] Stoler D, Saleh B E A, Teich M C 1985 *J. Mod. Opt.* **32** 345
- [2] Dattoli G, Galardo J, Torre A 1987 *J. Opt. Soc. Am. B* **4** 185
- [3] Fan H Y, Jing S C 1994 *Phys. Rev. A* **50** 1909
- [4] Song J, Cao Z L 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 696 (in Chinese) [宋军、曹卓良 2005 物理学报 **54** 696]
- [5] Zhao J G, Sun C Y, Wen L H, Liang B L 2009 *Chin. Phys. B* **18** 2294
- [6] Hu Y H, Fang M F, Liao X P, Zheng X J 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 4631 (in Chinese) [胡要花、方卯发、廖湘萍、郑小娟 2006 物理学报 **55** 4631]
- [7] Xia Q F, Zhou Y X, Gao Y F 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 1685 (in Chinese) [夏庆峰、周玉欣、高云峰 2009 物理学报 **58** 1685]
- [8] Tahira Nasreen, Razmi M S K 1993 *J. Opt. Soc. Am. B* **10** 1292
- [9] Ashraf M M 1994 *Phys. Rev. A* **50** 5116
- [10] Gao Y F, Feng J, Song T Q 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 1650 (in Chinese) [高云峰、冯健、宋同强 1999 物理学报 **48** 1650]
- [11] Gao Y F, Feng J, Shi S R 2002 *Int. J. Theor. Phys.* **41** 867
- [12] Li F L, Gao S Y, Zhao Y T 2003 *Chin. Phys.* **12** 872
- [13] Zhang G M, Li Y K, Gao Y F 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 3739 (in Chinese) [张桂明、李悦科、高云峰 2004 物理学报 **53** 3739]
- [14] Zhou Q C, Zhu S N, Ming N B 2005 *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **38** 4309
- [15] Li Y K, Zhang G M, Gao Y F 2005 *Acta Opt. Sin.* **25** 1131 (in Chinese) [李悦科、张桂明、高云峰 2005 光学学报 **25** 1131]
- [16] Li G X, Peng J S 1993 *Acta Phys. Sin.* **42** 1443 (in Chinese) [李高翔、彭金生 1993 物理学报 **42** 1443]
- [17] Eberly J H, Wodkiewicz K 1977 *J. Opt. Soc. Am.* **67** 1252

# Quantum interference in the cavity field spectra of nondegenerate two-photon Jaynes-Cummings model<sup>\*</sup>

Li Yue-Ke<sup>†</sup> Zhang Gui-Ming Gao Yun-Feng

(School of Media and Communications Technology, Liaocheng University, Liaocheng 252059, China)

(Received 9 May 2009; revised manuscript received 10 June 2009)

## Abstract

The cavity field spectra of two modes field both in the binomial state interacting with a two-level atom in an ideal cavity is investigated. The results for the weak initial fields are calculated. The influence of the quantum interference on the cavity field spectra is discussed. It's shown that the quantum interference term performs periodical damped oscillation with the changing of the difference of the two field frequencies. The periodicity is about  $0.16g$  ( $g$  is the coupling coefficient between the atom and the fields). When the difference of the two field frequencies is larger than  $1.6g$ , the quantum interference term can be ignored. Otherwise, the quantum interference term is related to photon number of initial field. The quantum interference term strengthens gradually with the photon number increasing, but weakens abruptly when the maximal photon number becomes greater than 4. The quantum interference phenomenon almost vanishes when the photon number is greater than 6.

**Keywords:** cavity field spectrum, quantum interference, binomial state field

**PACC:** 4250, 3280

---

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10574060).

<sup>†</sup> E-mail: liyueke@lcu.edu.cn