

# 层流平衡相对论电子束束流特性的数值计算\*

刘 静<sup>†</sup> 舒 挺 李志强

(国防科技大学光电科学与工程学院,长沙 410073)

(2009 年 4 月 29 日收到;2009 年 6 月 10 日收到修改稿)

通过对层流平衡相对论电子的运动微分方程组进行数值求解,得到正则角动量在  $p_\theta = 0$ ,  $p_\theta = \text{const.}$  和  $p_\theta \propto r^2$  三种情况下,束流的传输特性. 针对  $p_\theta = 0$  的相对论实心电子束,利用数值求解得到了与解析方法一致的结果,从而验证了数值方法的合理性;针对无法用解析方法求解的  $p_\theta = 0$  环形电子束、 $p_\theta = \text{const.}$  和  $p_\theta \propto r^2$  的情况,利用数值方法得到了束流和空间极限电流关于波导、电子束结构和二极管电压等参数的变化规律及对轴向导引磁场的要求. 计算结果表明:当相对论电子束以层流平衡态传输时,环形束较实心束具有更高的空间极限电流和更低的轴向导引磁场,且当阴极发射面与导引磁场的磁场线垂直时,维持电子束层流平衡所需的轴向导引磁场最低;电子束在有限磁场导引下以层流平衡态传输时,空间极限电流明显大于无限大磁场导引下一维近似的情况. 利用数值方法对层流平衡相对论电子束进行理论研究,更全面地揭示了电子束在正则角动量满足不同条件时的束流特性,为设计新型结构的高功率微波器件提供理论参考.

**关键词:** 相对论电子束, 层流平衡, 空间极限电流, 轴向导引磁场

**PACC:** 5225, 5265

## 1. 引 言

研究相对论电子束的传输特性,尤其是电子束的空间极限电流对设计高功率微波及自由电子激光等器件具有重要的指导意义<sup>[1,2]</sup>. 要实现电子束在波导管内的传输,可以通过外加轴向导引磁场或者在波导管填充等离子体背景的方法以中和电子束空间电荷效应<sup>[3]</sup>.

Pierce<sup>[4]</sup> 及 Bennett<sup>[5]</sup>, Alfvén<sup>[6]</sup> 和 Lawson<sup>[7]</sup> 等人分别对在填充等离子体的波导管内传输的非相对论和相对论性电子束的束流特性进行了详细研究;Kirstein 等<sup>[8]</sup> 对在轴向导引磁场约束下的非相对论性电子束的束流特性进行了深入研究;而对相对论性电子束的情况,国内外研究人员建立了多种物理模型<sup>[3,9-12]</sup>. 其中,Reiser<sup>[3]</sup> 提出的层流平衡模型是比较有代表性的物理模型之一. 它根据电子径向受力平衡和正则角动量守恒,得到电子速度分量满足的自洽微分方程组,通过求解微分方程组,理论上可以给出电子束层流平衡态传输时的束流特性及对轴向导引磁场的要求.

层流平衡相对论电子束根据正则角动量  $p_\theta$  与径向坐标分量  $r$  的关系被分为三类,即  $p_\theta = 0$ ,  $p_\theta = \text{const.}$  和  $p_\theta \propto r^2$ . 当实心电子束在圆柱波导内以层流平衡态传输时即对应  $p_\theta = 0$ , 环形电子束在圆柱波导内以层流平衡态传输则对应  $p_\theta = \text{const.}$ , 环形电子束在同轴波导内以层流平衡态传输时包含  $p_\theta = 0$  和  $p_\theta = \text{const.}$  两种情况,而  $p_\theta \propto r^2$  则表示电子束的阴极发射表面与导引磁场磁场线不垂直的情况.

文献[3]指出仅  $p_\theta = 0$  的实心电子束电子运动所满足的自洽微分方程组可以进行解析求解,而对  $p_\theta = 0$  的环形束、 $p_\theta = \text{const.}$  和  $p_\theta \propto r^2$  的情况,在解析求解微分方程组的时候遇到了困难. 文献[13]借助数值方法,在文献[3]的理论研究基础上,对  $p_\theta = 0$  的环形束和  $p_\theta = \text{const.}$  的环形束的束流特性及层流平衡态对导引磁场的要求进行了求解,但是未对空间极限电流关于波导和电子束几何参数以及电参数的变化规律进行深入研究,而且没有研究  $p_\theta \propto r^2$  的电子束层流平衡束流特性. 有关这方面的理论分析,目前也未见报道. 高功率微波器件中二极管区常常浸没在外加导引磁场中,即对应正则角动量

\* 国家高技术研究发展计划项目资助的课题.

<sup>†</sup> E-mail: ljofnudt@163.com

满足  $p_\theta = \text{const.}$  或  $p_\theta \propto r^2$  的情况,因此,研究这类电子束束流特性对指导高功率微波器件设计具有重要的参考价值.

本文提出一种求解层流平衡电子束运动微分方程组的数值方法.首先通过求解  $p_\theta = 0$  的实心束并与解析计算结果进行比较,验证数值方法的合理性.然后对  $p_\theta = 0$  和  $p_\theta = \text{const.}$  的电子束的空间极限电流关于波导和电子束几何参数及电参数的变化规律以及  $p_\theta \propto r^2$  的层流平衡电子束的束流特性进行了研究.最后比较了不同正则角动量条件的层流平衡相对论性电子束的束流特性,并对电子束以层流平衡态运动和在无限大磁场导引下运动的空间极限电流进行了对比.数值计算有助于从理论上加深了对轴向磁场导引下相对论性电子束传输特性的了解.

## 2. 理论模型

层流平衡态是指电子束内所有电子以各自半径恒定,且互不交叉的轨迹关于轴线作螺旋运动,描述该运动的基本方程为

$$v''_\theta + \left(2 \frac{v_\theta v'_\theta + v_z v'_z}{c^2 - v_\theta^2 - v_z^2} + \frac{1}{r}\right) v'_\theta + \frac{\sqrt{c^2 - v_\theta^2 - v_z^2}}{mcr} \left(\frac{v_\theta p'_\theta}{v_z}\right)' = 0, \quad (1)$$

$$v''_\theta + \left(2 \frac{v_\theta v'_\theta + v_z v'_z}{c^2 - v_\theta^2 - v_z^2} + \frac{1}{r}\right) v'_\theta - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{1}{m(c^2 - v_\theta^2 - v_z^2)} \left(\frac{p'_\theta}{r}\right)' = 0, \quad (2)$$

其中  $v_z$  和  $v_\theta$  分别表示电子轴向和角向运动速度,层流平衡假设电子的径向速度  $v_r = 0$ ;  $p_\theta$  表示正则角动量,  $m$  为电子静止质量,  $c$  为真空光速;层流平衡假设  $\partial/\partial t = 0$ ,  $\partial/\partial z = 0$ ,  $\partial/\partial \theta = 0$ , 因此方程中的微分是对径向坐标分量求导数,即  $v''_z = \frac{d}{dr}(v'_z) =$

$$\frac{d^2 v_z}{dr^2}, v'_z = \frac{dv_z}{dr}, p'_z = \frac{dp_z}{dr}.$$

$p_\theta = 0$  和  $p_\theta = 0.5B_s r_s^2 = \text{const.}$  的层流平衡相对论性电子束,满足  $p'_\theta = 0$ ,  $r_s, B_s$  表示阴极半径及轴向导引磁场在电子发射位置的磁场强度.因此微分方程组简化为

$$v''_z + \left(2 \frac{v_\theta v'_\theta + v_z v'_z}{c^2 - v_\theta^2 - v_z^2} + \frac{1}{r}\right) v'_z = 0, \quad (3)$$

$$v''_\theta + \left(2 \frac{v_\theta v'_\theta + v_z v'_z}{c^2 - v_\theta^2 - v_z^2} + \frac{1}{r}\right) v'_\theta - \frac{v_\theta}{r^2} = 0. \quad (4)$$

$p_\theta = eB_s r^2 / (2\alpha^2) \propto r^2$  时,其中  $\alpha$  是由器件实际结构决定的描述电子束径向扩散或收缩的常数,定义为  $\alpha = r/r_s$ , 电子运动的微分方程组为

$$v''_z + \left(2 \frac{v_\theta v'_\theta + v_z v'_z}{c^2 - v_\theta^2 - v_z^2} + \frac{1}{r}\right) v'_z + \frac{eB_s}{m\alpha^2} \frac{v_\theta}{rv_z} = 0, \quad (5)$$

$$v''_\theta + \left(2 \frac{v_\theta v'_\theta + v_z v'_z}{c^2 - v_\theta^2 - v_z^2} + \frac{1}{r}\right) v'_\theta - \frac{v_\theta}{r^2} = 0. \quad (6)$$

微分方程(1)–(6)对实心束和环形束的边界条件分别满足

$$v_z(r=0) = c \cdot (1 - \gamma_0^{-2})^{1/2},$$

$$v'_z(r=0) = 0, v_\theta(r=0) = 0, \quad (7)$$

$$v_z(r=r_c) = c \cdot (1 - \gamma_0^{-2})^{1/2},$$

$$v'_z(r=r_c) = 0, v_\theta(r=r_c) = 0, \quad (8)$$

其中  $r_c$  是环形束内径.另外一个边界条件  $v'_\theta(r=0)$  和  $v'_\theta(r=r_c)$  则与波导壁电势  $\Phi_b$  及电子束内外径的电势比  $\Phi_0/\Phi_a$  有关.其中  $\Phi$  是定义的归一化电势,满足

$$\Phi = \frac{e}{mc^2} \phi = \gamma - 1. \quad (9)$$

电子束与波导壁之间的电势满足

$$\frac{\gamma}{\gamma_0} = \frac{\gamma_a}{\gamma_0} + \left(\frac{\gamma_a^2}{\gamma_0^2} - 1\right) \ln\left(\frac{r}{r_b}\right), \quad r_b \leq r \leq R. \quad (10)$$

当给定波导壁电势  $\Phi_b$ 、电子束内相对论因子关系  $\gamma_a/\gamma_0$  及波导和电子束结构参数  $R, r_b$ , 由(9)式和(10)式可以确定出  $\gamma_b, \gamma_a$  和  $\gamma_0$ .将  $\gamma_0$  代入边界条件(7)和(8)式,并对  $v'_\theta$  在一定范围内扫描,当微分方程的解满足

$$\gamma(r=r_b) = \left(1 - \frac{v_\theta^2(r_b) + v_z^2(r_b)}{c^2}\right)^{-1/2} = \gamma_a \quad (11)$$

时,则找到满足给定参数的微分方程初始条件,进而求得电子的速度分布  $v_z(r), v_\theta(r)$ , 并由下列关系式,可以得到层流平衡时电子束的束流特性

$$\gamma(r) = \left(1 - \frac{v_\theta^2(r) + v_z^2(r)}{c^2}\right)^{-1/2}, \quad (12)$$

$$\frac{mc^2}{e} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\gamma}{dr}\right) = \frac{en(r)}{\epsilon_0}, \quad (13)$$

$$I_{\text{solid}} = \int_0^{r_b} 2\pi n(r) v_z(r) r dr, \quad (14)$$

$$I_{\text{hollow}} = \int_{r_c}^{r_b} 2\pi n(r) v_z(r) r dr. \quad (15)$$

### 3. 分析与计算

#### 3.1. $p_\theta = 0$ 相对论性实心电子束

$p_\theta = 0$  表示在电子的出射位置无轴向导引磁场作用,因此这类源也被称作屏蔽式源.它是唯一能进行解析求解的情况,因此用数值方法首先对屏蔽式源产生的层流平衡电子束束流进行求解,通过与解析计算的结果进行比较,以验证数值方法的合理性.

由屏蔽式源产生的实心电子束以层流平衡态传输时,电子的运动满足(3)式和(4)式.按照上一节介绍的方法,并参照文献[3]和[13]设定圆柱波导半径  $R = 3.6 \text{ cm}$ ,实心电子束半径  $r_b = 3.0 \text{ cm}$ ,在波导壁归一化电势分别为  $\Phi_b = 3.0$  和  $\Phi_b = 5.0$  的情况下,对微分方程组进行数值求解,并利用(14)式计算得到束流关于波导壁电势  $\Phi_b$  和电子束电势参数  $\Phi_0/\Phi_a$  的变化规律如图1和图2所示.

图1和图2中实线所示为文献[3]中解析求解的结果,虚线对应数值计算的结果.可以发现:数值计算与解析求解的结果非常一致,因此证明了数值方法的合理性.

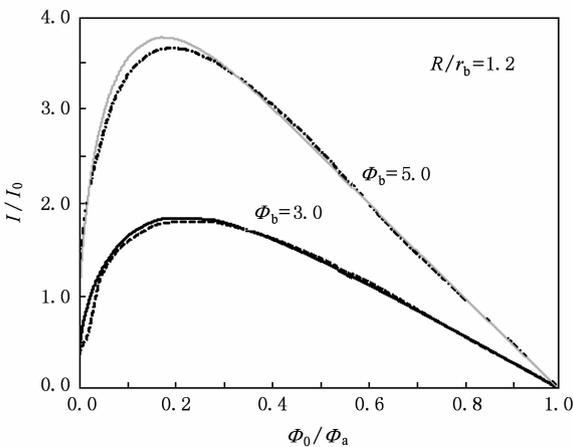


图1  $p_\theta = 0$  实心束的束流特性

#### 3.2. 正则角动量为常数的环形电子束

正则角动量为常数的环形电子束对应屏蔽式 ( $p_\theta = 0$ ) 或浸没式 ( $p_\theta = 0.5B_s r_s^2 = \text{const.}$ ) 两种源.当环形束以层流平衡态传输时,电子的运动方程满足(3)式和(4)式,可以看出正则角动量为常数

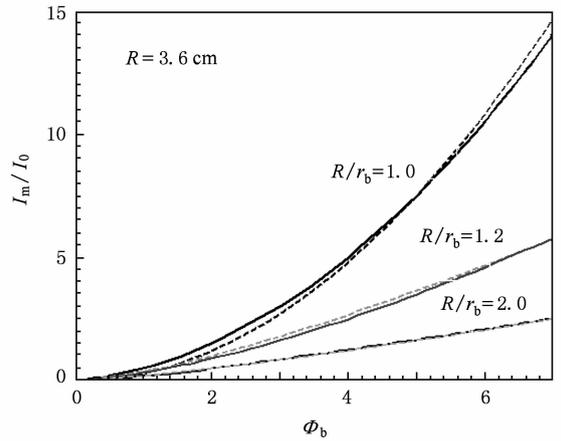


图2 空间极限电流随波导壁电势的变化规律

的浸没式源,其电子出射处磁场强度  $B_s$  对电子束的束流特性没有影响.结合利用(15)式,数值求解得到电子束束流特性如图3和图4所示.

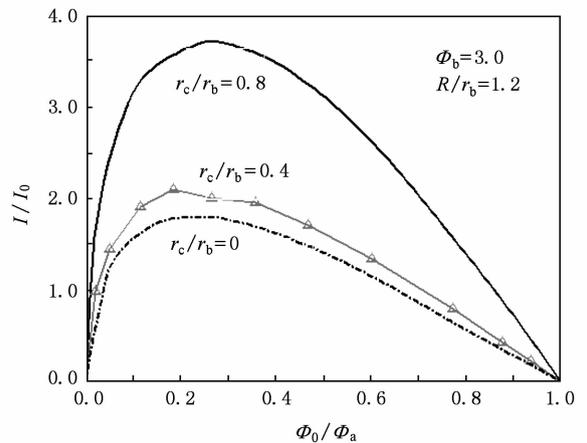


图3 正则角动量为常数的环形束束流特性

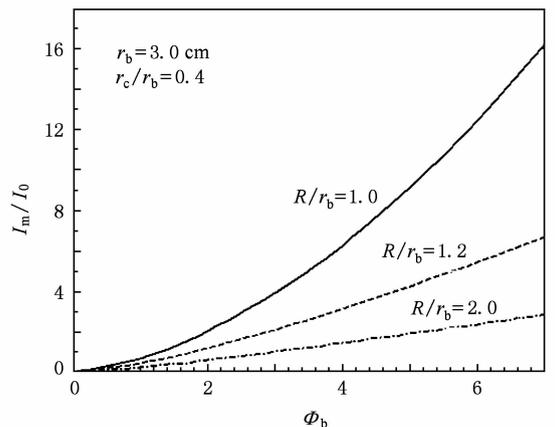


图4 环形束空间极限电流随波导壁电势的变化规律

图3所示为波导壁归一化电势为3.0,波导半径与电子束外径比为1.2时,环形电子束内外径比分别为0.4,0.8时,层流平衡束流随电子束电势参数 $\Phi_0/\Phi_a$ 的变化规律,束流曲线的最大值即对应该结构和二极管电压下的空间极限电流.为进行比较,图中虚线即为上一节所求得得实心束束流特性.从图中容易看出:在二极管电压、波导和电子束结构等参数相同的条件下,环形束较实心束具有更高的传输束流,且束流随着电子束厚度的减小而增加.

图4所示为内外径之比0.4的环形束,其空间极限电流关于波导壁归一化电势和结构参数的变化规律.从图中容易看出:层流平衡相对论环形束的空间极限电流随着波导壁电势的增大而增大,越靠近波导壁的电子束具有越大的空间极限电流,这与电子束在无限大磁场导引的一维运动假设时的规律类似.

另外,层流平衡电子束的轴向导引磁场满足<sup>[3]</sup>

$$B_0 = - \frac{m}{e} \frac{(\gamma r v_\theta)'}{r} \Big|_{r=r_b} + \frac{p'_\theta}{er} \Big|_{r=r_b} - B_c, \quad (16)$$

其中 $B_c$ 表示波导壁内角向感应电流产生的均匀轴向磁场,电子束对应的感应磁场可以写为<sup>[14]</sup>

$$B_c = \frac{4\pi\mu_0 e}{r_b^2} \left[ \frac{r_b^2}{2} \int_{r_c}^{r_b} n(r') v_\theta(r') r' dr' - \int_{r_c}^{r_b} r dr \int_{r_c}^r n(r') v_\theta(r') r' dr' \right]. \quad (17)$$

将微分方程组(3)式和(4)式的解代入(17)式,可以进一步得到维持电子束层流平衡所需轴向导引磁场随电势参数 $\Phi_0/\Phi_a$ 和电子束结构的变化规律,如图5所示.

图5的计算参数与图3相同,从图5中可以看出:相对论电子束以层流平衡态传输时,导引磁场强度随电势参数 $\Phi_0/\Phi_a$ 的增加而减小,其中在相同的参数条件下,实心束较环行束需要更高强度的轴向导引磁场,且环形束厚度对导引磁场的影响不明显.

### 3.3. $p_\theta \propto r^2$ 相对论性电子束

正则角动量满足 $p_\theta \propto r^2$ 的相对论电子束以层流平衡态传输时,电子的运动满足(5)式和(6)式.参数 $\alpha$ 是由器件实际结构决定的描述电子束径向扩散或收缩的常数,假设电子束半径保持不变,即 $\alpha = 1$ .首先,研究电子束出射处磁场强度 $B_s$ 对束流特性

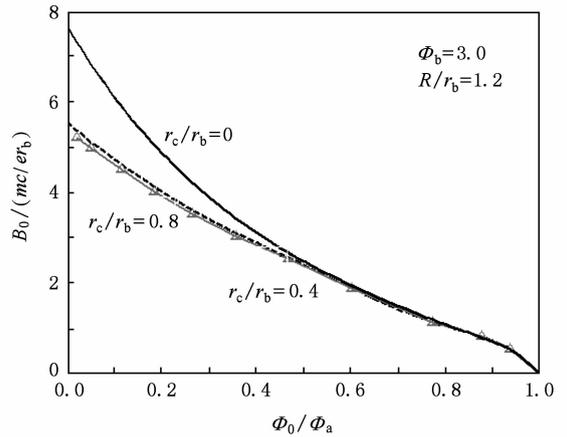


图5 正则角动量为常数的电子束层流平衡时对轴向导引磁场的要求

的影响:设定圆柱波导半径 $R = 3.6$  cm,壁归一化电势 $\Phi_b = 3.0$ ,电子束内外径为 $r_c = 1.2$  cm, $r_b = 3.0$  cm,数值计算(14)式和(15)式分别得到实心束和环形束以层流平衡态传输时传输束流随 $B_s$ 的变化规律,如图6和图7所示.

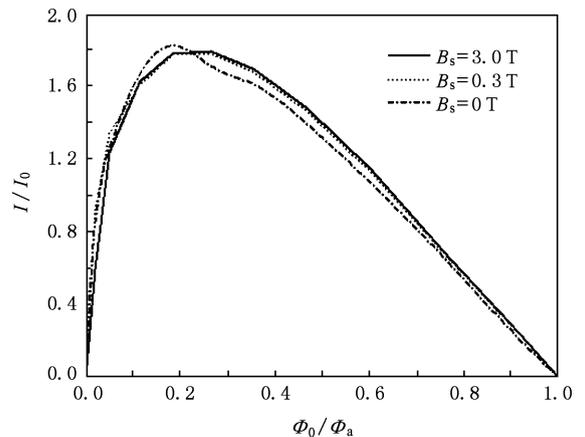


图6  $p_\theta \propto r^2$  层流平衡实心束束流特性

图6和图7中 $B_s = 0$  T的曲线即代表屏蔽式源的情况,由于高功率微波器件中外加轴向导引磁场通常在0—3 T的范围内取值<sup>[14]</sup>,因此针对浸没式源,考虑 $B_s = 0.3$  T和 $B_s = 3$  T的两种情况.

图6和图7均表明:在相同的结构参数和电参数条件下,浸没式源产生的电子束(实心束和环行束)束流特性与屏蔽式源产生的电子束束流特性基本一致,即轴向导引磁场在阴极位置的磁场强度对以层流平衡态传输的相对论性电子束的束流特性影响不明显,因此可以尽量使用屏蔽式源从而缩短

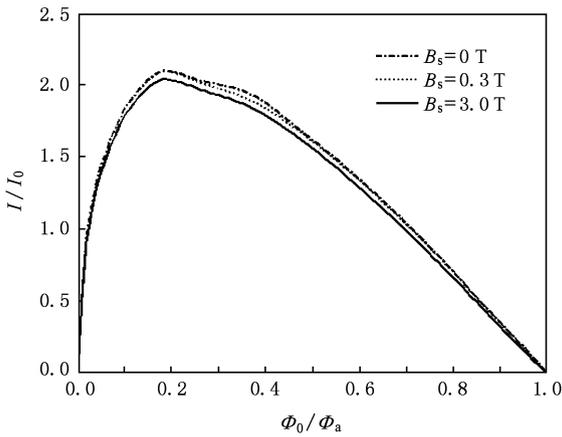


图 7  $p_\theta \propto r^2$  层流平衡环形束束流特性

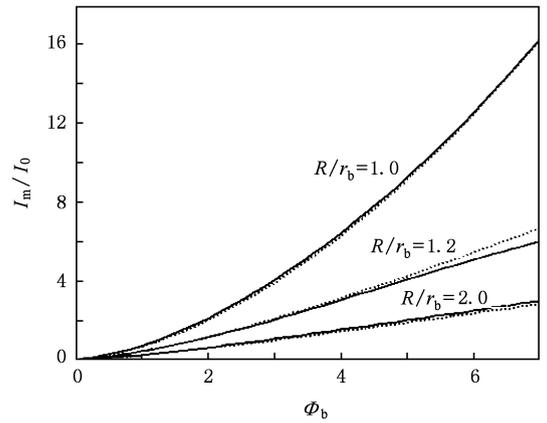


图 9 电子束外径与波导壁距离对环形束空间极限电流的影响

导引磁场的作用距离。

其次,束流曲线关于电势参数  $\Phi_0/\Phi_a$  存在极大值,即对应空间极限电流.比较图 6 和图 7 可以发现:正则角动量满足  $p_\theta \propto r^2$  的相对论电子束以层流平衡态传输时,环形束较实心束具有更高的传输束流.

另外,进一步研究电子束以层流平衡态传输时,波导及电子束结构参数对空间极限电流的影响,如图 8—10 中实线所示.为与屏蔽式源产生的电子束情况进行比较,将上两节的计算结果用图 8—10 中虚线绘出.

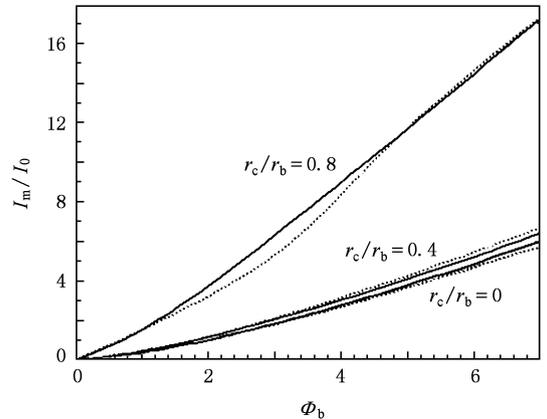


图 10 电子束厚度对环形束空间极限电流的影响

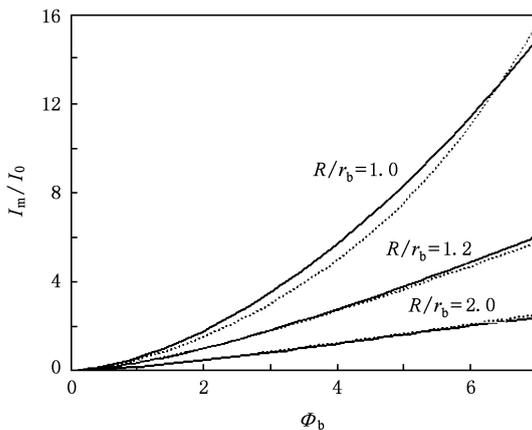


图 8 电子束外径与波导壁距离对实心束空间极限电流的影响

从图 8—10 可以看出:电子束以层流平衡态传输时,对各种正则角动量的情况,空间极限电流均随电子束外径与波导壁距离的减小而增大,随波导壁电势的增加而增大;环形束的空间极限电流均大于实心束的情况,且环形束的空间极限电流还随电

子束厚度的减小而增大。

电子在无限大磁场导引下的一维运动模型给出实心束和环形束的空间极限电流  $I_{scl}^s, I_{scl}^h$  分别为<sup>[1]</sup>

$$I_{scl}^s = I_0 \frac{(\gamma_b^{2/3} - 1)^{3/2}}{1 + 2\ln(R/r_b)}, \tag{18}$$

$$I_{scl}^h = I_0 \frac{(\gamma_b^{2/3} - 1)^{3/2}}{1 - 2r_b^2 \ln(r_b/r_c) (r_b^2 - r_c^2)^{-1} + 2\ln(R/r_b)}, \tag{19}$$

其中  $I_0 = 4\pi\epsilon_0 m_0 c^3 / e \approx 17 \text{ kA}$ ,其他符号的定义与前文相同。

当  $R/r_b = 1, r_c/r_b = 0.4$  时,将以上三节用数值方法计算得到的层流平衡相对论电子束的空间极限电流和(18),(19)式的计算结果进行比较,如图 11 和图 12 所示。

从图 11 和图 12 中可以看出:当电子在弱相对论 ( $1 < \gamma_b (= \Phi_b + 1) \leq 2$ ) 条件下,由层流平衡模

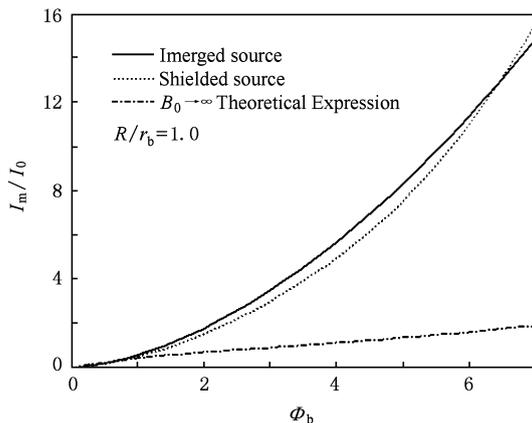


图 11 实心束空间极限电流的理论计算

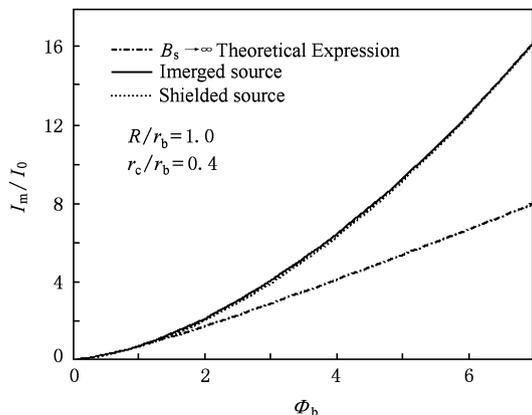


图 12 环形束空间极限电流的理论计算

型得到的电子束空间极限电流与一维模型得到的结果近似相等;当电子在相对论和超相对论 ( $2 < \gamma_b$ ) 范围内,由层流平衡模型得到的电子束空间极限电流明显高于一维模型的结果。

当正则角动量为常数时层流平衡电子束的轴向导引磁场为有限值,如图 5 所示,当正则角动量满足  $p_\theta = eB_s r^2 / (2\alpha^2)$  时,由 (14) 式易知  $B_0^{\text{im}} \approx B_0^{\text{sh}} + B_s / \alpha^2$ , 电子束的轴向导引磁场也为有限值,即层流平衡的相对论电子束,其轴向导引磁场为有限值.文献 [14] 和 [16] 分别用粒子模拟的方法得到电子束空间极限电流随磁场增大呈现首先显著减小然后逐渐增大的变化趋势,且当磁场增大到一定强度后,空间极限电流趋于恒定,但恒定值远远低于磁场较

小时的情况.因此,轴向导引磁场强度的差别是造成层流模型和一维模型差异的主要原因,而且层流平衡模型的计算结果更接近实际。

#### 4. 结 论

本文提出了一种求解层流平衡电子束方程的数值计算方法,通过对  $p_\theta = 0$  的实心束求解并与解析计算结果进行比较,验证数值方法的合理性.然后,对  $p_\theta = 0$  和  $p_\theta = \text{const.}$  的电子束的空间极限电流关于波导和电子束几何参数及电参数的变化规律和  $p_\theta \propto r^2$  的层流平衡电子束的束流特性进行了研究。

通过对层流平衡相对论性电子束运动微分方程进行数值求解,得到了束流特性的规律性认识.首先,相对论性电子束以层流平衡态传输时,环形束较实心束具有更高的传输束流和较低的轴向导引磁场以维持束平衡,因此环形束更易实现低磁场下高束流的层流平衡传输态;其次,通过比较屏蔽式源和浸没式源产生的相对论性电子束以层流平衡传输时的束流特性,发现阴极位置的导引磁场磁场强度对束流大小没有明显影响,束流主要受波导和电子束结构参数及电参数的影响,因此可以尽量使用屏蔽式源从而缩短导引磁场的作用距离;另外,通过比较屏蔽式源  $p_\theta = \text{const.}$  和  $p_\theta \propto r^2$  的两种情况,发现当电子束以层流平衡态传输时,  $p_\theta \propto r^2$  的电子束需要更强的轴向导引磁场,由于  $p_\theta = \text{const.}$  和  $p_\theta \propto r^2$  分别对应阴极发射面与导引磁场的磁场线垂直和非垂直的情况,因此采用阴极发射面与磁场线垂直的二极管结构有利于降低导引磁场强度;最后,通过比较相对论性电子束在层流平衡态传输和在无限大磁场导引下传输时空间极限电流的大小,发现层流平衡对应的有限磁场导引时电子束空间极限电流明显大于在无限大磁场导引下的情况,这与粒子模拟得到的结果一致.利用数值方法,层流平衡相对论性电子束  $p_\theta = 0$ ,  $p_\theta = \text{const.}$  和  $p_\theta \propto r^2$  的三种情况得到全部求解,电子束束流特性为设计高功率微波器件提供了理论参考。

- [1] Miller P B 1982 *An Introduction to the Physics of Intense Charged Particle Beam* (New York; Plenum)
- [2] Freund H P, Antonsen Jr T M 1996 *Principles of Free-electron Lasers* (London; CHAPMAN & HALL)
- [3] Reiser M 1977 *Phys. Fluids* **20**477
- [4] Pierce J R 1944 *J. Plasma Physics* **15** 721
- [5] Bennett W H 1934 *Phys. Rev.* **45** 890
- [6] Alfven H 1939 *Phys. Rev.* **55** 425
- [7] Lawson J D 1959 *J. Nucl. Energy Pt. C* **13**1
- [8] Kirstein P T, Kino G S, Waters W E 1967 *Space-Charged Flow* (New York; McGraw-Hill)
- [9] Stephens K F, Ordonez C A 2000 *Phys. Plasmas* **7** 3108
- [10] Sotnikov G V, Yatsenko T Y 2002 *Tech. Phys.* **47** 535
- [11] Uhm H S 1993 *Phys. Fluids B* **5** 1919
- [12] Liu J, Li Z Q 2008 17th *International Conference On High-Power Particle Beams* Xi'an, China
- [13] Li J Q, Mo Y L 2007 *Chin. Phys.* **16** 2716
- [14] Hramov A, Koronovskii A, Morozov M 2008 *Phys. Lett. A* **372** 876
- [15] Benford J, Swegle J A 2007 *Edi Schamiloglu High Power Microwaves* (Second Edition) (Taylor & Francis Group, LLC)
- [16] Kurkin S A, Hramov A E 2009 *Tech. Phys. Lett.* **35** 23

## Further theoretical study on laminar-flow equilibria in magnetically focused relativistic electron beams\*

Liu Jing<sup>†</sup> Shu Ting Li Zhi-Qiang

(College of Optoelectric Science and Engineering, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

(Received 29 April 2009; revised manuscript received 10 June 2009)

### Abstract

A numerical solution for the self-consistent differential equations describing the laminar-flow equilibrium in magnetically focused relativistic electron beams is given and proved to be available by comparison with analytical results of solid electron beam in the case of  $p_\theta = 0$  (magnetically shielded sources). With the numerical method, the space-charge limited current and the externally applied magnetic field of both solid and annular electron beam in three cases of  $p_\theta = 0$ ,  $p_\theta = \text{const}$  and  $p_\theta \propto r^2$  (magnetically immersed sources) are presented and compared. It is shown that the conditions at the source with respect to the canonical angular momentum  $p_\theta$  have little effect on the space-charge limited current and the externally applied magnetic field, but more intense annular electron beam generated by the source with  $p_\theta = \text{const}$ . can be transported in the same drift tube under lower guided magnetic field than solid ones.

**Keywords:** relativistic electron beams, laminar-flow equilibrium, space-charge limited current, guided magnetic field

**PACC:** 5225, 5265

\* Project supported by the National High Technology Research and Development Program of China.

<sup>†</sup> E-mail: ljofnudt@163.com