

多量子位 Heisenberg XX 链中的杂质纠缠*

秦 猛†

(中国人民解放军理工大学理学院, 南京 211101)
(2009 年 6 月 1 日收到; 2009 年 8 月 23 日收到修改稿)

通过分析系统的杂质位与其余部分间的纠缠 $N_{1,A}$ 以及单个正常位与其余部分间的纠缠 $N_{L,A}$ 研究了匀强磁场作用下含杂质 Heisenberg XX 链的纠缠特性. 研究表明三量子位时纠缠存在的临界温度依赖于杂质参数 J_1 和匀强磁场 B . 研究发现, 当量子位 L 为奇数时, 纠缠 $N_{1,A}$ 随量子位的增加而增大, 而 L 为偶数时则相反, 并且量子位 L 为偶数时的纠缠大于量子位 L 为奇数时的纠缠; 对 $N_{L,A}$, 量子位 L 为奇数时, 纠缠随杂质参数 J_1 的变化与 $L=3$ 类似, 而 L 为偶数时纠缠随杂质参数 $|J_1|$ 的增加而增加.

关键词: 纠缠, 杂质, 多量子位, Heisenberg XX 链

PACC: 0367, 7510J

1. 引 言

自从量子纠缠这一概念被 Einstein-Podolsky-Rosem (EPR) 和 Schrodinger 提出来以后, 对量子纠缠的广泛研究已经成为物理学中的一个重要的领域, 一方面量子纠缠体现了量子态的非定域性, 另一方面在量子信息领域中, 作为物理资源的量子纠缠起着至关重要的作用, 如利用纠缠可以实现超密集编码^[1], 量子隐形传输^[2], 量子密钥分发^[3]等.

对量子纠缠态刻画的研究, 比如关于纠缠的定量描述即纠缠度量的研究是目前的热点之一. 作为固态领域中的一种重要纠缠资源的 Heisenberg 链, 可以用来实现量子点和量子计算机^[4], 所以近年来, 对各种 Heisenberg 链的纠缠特性及其控制的研究已经取得了一定的成果^[5-14]. 比如 Wang 等在一系列的论文^[6, 9]中探讨了 Heisenberg 链并对多量子位情况进行了研究. Zhou^[8]等探讨了完全各项异性 Heisenberg XYZ 链的纠缠特性, Xi^[11]等探讨了 Heisenberg XX 开链中边界量子位之间的纠缠. 但是, 上述工作都是采用 Wotters 提出的 concurrence^[15, 16]来计算任意两量子位间的混合纠缠. 很明显, 仅研究两量子位间的纠缠是远远不够的.

Heisenberg 链中的混合纠缠还可以用负性纠缠

度 N 来度量^[17]. N 是对 PPT 判据^[18] 违背程度的度量, 对 $2 \otimes 2$ 和 $2 \otimes 3$ 系统来讲, 负性纠缠度判据是充分必要的. 在有限温度下, 它可以度量 n 位量子系统的任意两部分 $\{m\} - \{n-m\}$ 间的纠缠, 也可以度量任意子系统间的纠缠. 目前还没有论文利用负性纠缠度这一重要概念对包含多个量子位的 Heisenberg XX 链的两体纠缠进行研究; 此外, 考虑到固态结构中杂质的存在有时会对整个系统纠缠的改变起着至关重要的作用, 外界磁场的存在与否也对纠缠的形成有重要的影响. 所以本文将研究沿 z 方向匀强磁场作用下, 含一位杂质的多量子位 Heisenberg XX 链的纠缠, 即单个量子位与余下部分间的纠缠, 这是本文的出发点.

本文在第二部分给出了系统的 Hamilton 量及负性纠缠度的定义表达式. 在第三部分, 我们先以三量子位为例, 详细分析了杂质 J_1 、磁场 B 以及温度 T 对对纠缠的影响, 然后比较了 3—9 量子位自旋链中纠缠伴随杂质的变化. 在第四部分我们对本文的主要结论做一总结.

2. 理论模型及度量方法介绍

采用周期性边界条件, 考虑自旋为 $1/2$ 的 Heisenberg XX 链, 令格点 1 为杂质格点, 则包含任意 L 个量子位的系统的 Hamilton 量可以表示为

* 解放军理工大学预研基金 (批准号: 2009JC02) 资助的课题.

† E-mail: qrainm@gmail.com

$$H = J_1(\sigma_1^x \sigma_2^x + \sigma_1^y \sigma_2^y + \sigma_1^z \sigma_2^z) + J \sum_{i=2}^{L-1} (\sigma_i^x \sigma_{i+1}^x + \sigma_i^y \sigma_{i+1}^y) + B \sum_{i=1}^L \sigma_i^z, \quad (1)$$

其中 $\sigma_i = (\sigma_i^x, \sigma_i^y, \sigma_i^z)$ 为 Pauli 自旋算子. J_1 为杂质格点与正常格点间近邻相互作用, J 为正常格点之间近邻相互作用. 若令 Boltzmann 常数 $k_B = 1$, 则热平衡时态的密度矩阵可以表示为

$$\rho(T) = Z^{-1} \exp(-H/T) = Z^{-1} \sum_i \exp(-E_i/T) |\psi_i\rangle \langle \psi_i|, \quad (2)$$

其中 $Z = \sum_i \exp(-E_i/T)$ 为系统的配分函数.

由于采用周期性边界条件, 所以任意一个正常量子位与其余部分间的纠缠都是相同的. 于是系统的杂质位与其余部分间以及单个正常位与其余部分间的纠缠可以用负性纠缠度 N 表示为^[19,20]

$$N_{1-A} = (\text{tr} |\rho^{1-A}| - 1)/2 \text{ 或 } \sum_i |(\mu_{1-A})_i|, \\ N_{L-A} = (\text{tr} |\rho^{L-A}| - 1)/2 \text{ 或 } \sum_i |(\mu_{L-A})_i|, \quad (3)$$

其中 A 表示除量子位 1 (L) 外的其余量子位, ρ^{1-A} (ρ^{L-A}) 表示 $\rho(T)$ 对位 1 (L) 的部分转置所得的部分转置矩阵, 而 $(\mu_{1-A})_i$ ($(\mu_{L-A})_i$) 表示相应部分转置矩阵的负本征值. 下面我们将略去具体计算过程, 直接给出数值计算结果与具体分析: 首先以三量子位为例, 研究杂质参数 J_1 , 磁场 B 以及温度 T

对纠缠的影响, 接着比较不同量子位, 纠缠随杂质参数 J_1 的变化情况. 为方便起见, 在以下讨论中我们取 $J = 1$.

3. 结果和讨论

图 1 (a) 和 (b) 给出了 $B = 0$ 时在不同温度下 N_{12-3} 和 N_{1-23} 随杂质参数 J_1 的变化. 从图 (a) 中可以看出纠缠 N_{12-3} 存在的临界温度 T_c 随 $|J_1|$ 的增加而增加, 给定温度, 存在一个纠缠为零时的临界杂质参数 $|J_{1c}|$. 在温度 T 较小时, 当 $|J_1| > |J_{1c}|$ 时, N_{12-3} 随 $|J_1|$ 的增加, 先增加至峰值再减小最后增加并趋于一个定值, 并在 $J_1 = 0$ 处达到最大值 0.5, 随着温度 T 的升高, 纠缠峰值下降并最终消失, N_{12-3} 的最大值将由 0.5 减小至 0.25 左右; 从中还可以看出, 给定杂质参数 J_1 , 温度升高, 纠缠减小. 从图 1 (b) 可以看出, 纠缠不为零时的临界杂质参数 J_{1c} 会随着温度的增加而增大. 给定温度 T , 当 $|J_1| > |J_{1c}|$ 时, N_{1-23} 将随 $|J_1|$ 的增大而先增加后缓慢减少至一定值. 但其最大值基本上保持在 0.31—0.34 之间. 从图 1 还可以发现, 纠缠是关于 $J_1 = 0$ 对称的, 也就是说反铁磁情形 ($J > 0$) 和铁磁情形 ($J < 0$) 具有相同的纠缠特性.

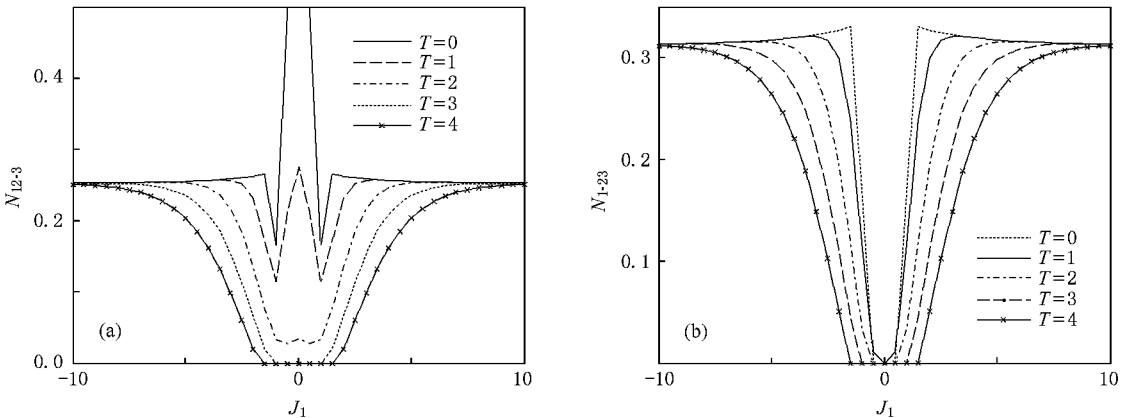


图 1 不同温度下 N_{12-3} (a) 和 N_{1-23} (b) 随杂质参数 J_1 的变化 $B = 0$

图 2 给出了磁场 B 对纠缠的影响, 从中可以看出磁场对两种不同的纠缠的影响类似. 给定温度 T , 存在一个特殊值 $|J_{1c}|$, 当 $|J_1|$ 大于该值时, 纠缠将随着 $|B|$ 的增加, 先增加后减小为 0, 当 $|J_1|$ 小于该值时, 磁场的存在只会减少纠缠至 0. 但是纠缠的增加有其上限: 对 N_{1-23} , 其上限为 0.5 左右, 对 N_{12-3} , 其上限为 0.43 左右. 并且 $|J_{1c}|$ 的取值与温度有关, 温

度越高, $|J_{1c}|$ 越大. 磁场的增加之所以会使纠缠减小, 是因为磁场增加会使各个自旋的取向趋于一致, 从而导致纠缠减小甚至消失. 因此根据不同的需要, 可以通过改变磁场来生成和控制纠缠.

在研究了多量子位情形下的两体纠缠随各参量的变化后, 我们进一步比较不同量子位时纠缠伴随杂质参数 J_1 的变化情况. 图 3 给出了 3→9 量子

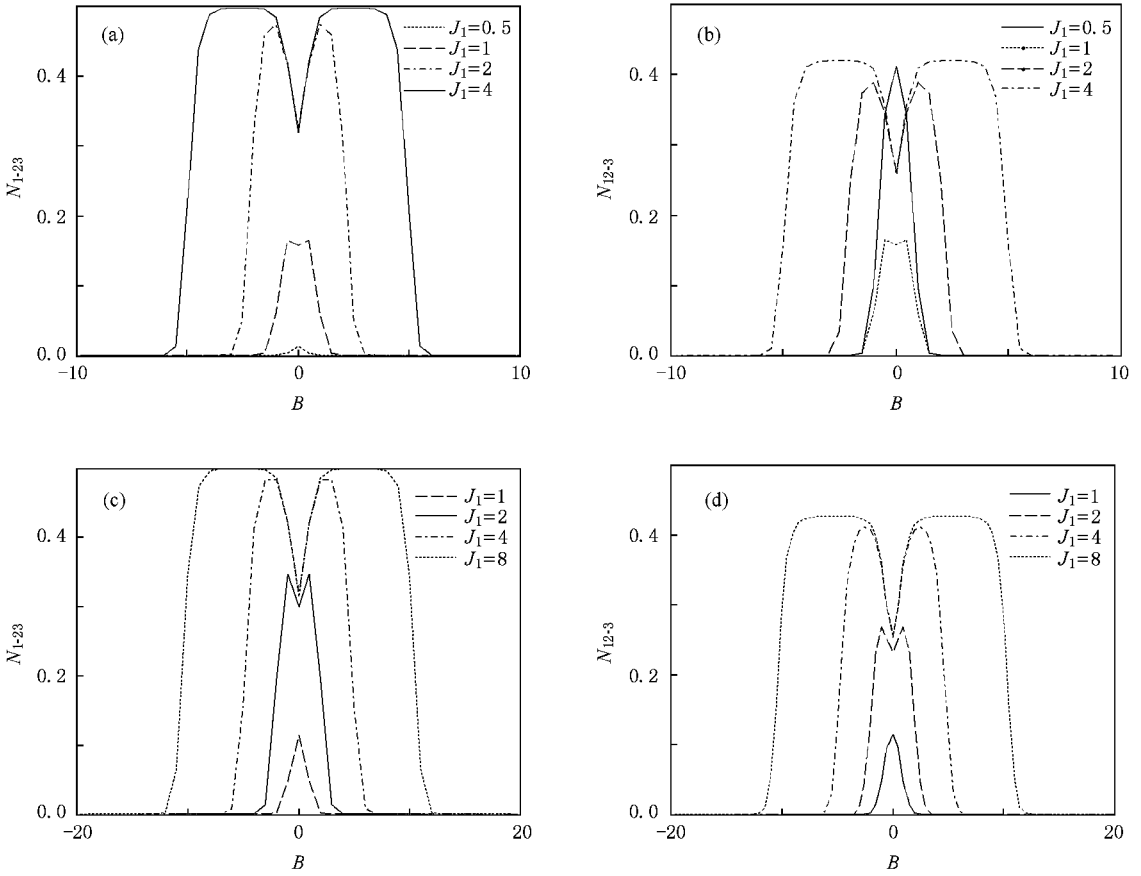


图 2 在不同 J_1 下 N_{1-23} 及 N_{12-3} 随磁场 B 的变化 (a) $T=0.5$, (b) $T=0.5$, (c) $T=1$, (d) $T=1$

位纠缠伴随杂质参数 J_1 的变化,从图中可以看出温度较低时, N_{1-A} 随 $|J_1|$ 的变化与 $L=3$ 类似, N_{L-A} 在量子位 L 为奇数时随 $|J_1|$ 的变化与 $L=3$ 时类似, 而量子位 L 为偶数时纠缠伴随 J_1 的增加而增大. 同时从图 3(a) 可看出, 在相同 J_1 下, 偶数量子位时的纠缠大于奇数量子位时的纠缠, 并且偶数量子位时, 纠

缠的大小随链长度的增加而减小; 而奇数量子位时却相反, 自旋链位数越长纠缠越大. 故相同条件下, 在 $L=4$ 时偶数量子位纠缠最大, 在 $L=3$ 时奇数量子位纠缠最小. 对比图 3(a) 和 (b), 可以发现, 纠缠并非在 $J_1=1$ 时处于最大值, 亦即各向同性条件下纠缠并非最大, 杂质的存在可以调节纠缠的变化.

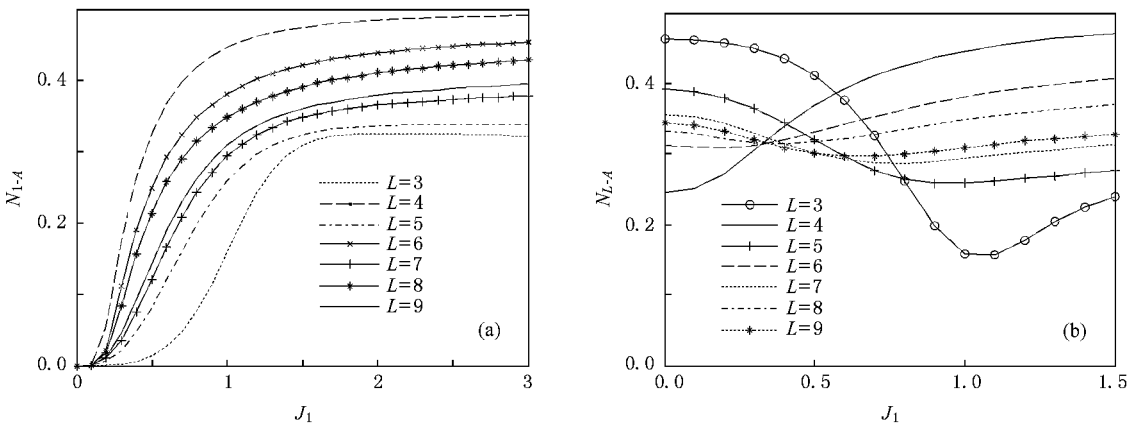


图 3 $T=0.5$ 时 3—9 量子位的 N_{1-A} 和 N_{L-A} 随杂质参数 J_1 的变化 (a) N_{1-A} , (b) N_{L-A}

4. 结 论

使用负性纠缠度这一度量纠缠的概念,通过分析 N_{1-A} 和 N_{L-A} 讨论了含杂质 Heisenberg XX 链的纠缠. 首先以三量子位为例,研究发现纠缠生成的临界温度随 $|J_1|$ 的增加而增加,固定 J_1 后,纠缠会随磁场 B 的增加而增加. 在低温时,两种不同的纠缠随 J_1 的变化有很大的差别. 当 $|J_1|$ 分别大于各自的临界杂质参数时, N_{12-3} 随 $|J_1|$ 的变化先减小后增大,而 N_{1-23} 则随 $|J_1|$ 增大而增大. 随着温度的升高,

前者的最大值将由 0.5 降至 0.25 左右,而后的最大值将基本保持在 0.3—0.34 之间. 随后我们比较了 3—9 量子位纠缠伴随杂质参数 J_1 的变化情况,结果表明,偶数量子位的纠缠大于相同条件下的奇数量子位的纠缠,固定 J_1 ,偶数量子位的纠缠随量子位 L 的增加而减小,而奇数量子位时却相反. 对 N_{L-A} , L 为奇数时,纠缠随 J_1 的变化与 $L=3$ 类似,而 L 为偶数时纠缠随 $|J_1|$ 的增加而增加. 研究表明,可以通过调节杂质参数 J_1 ,外界磁场 B 以及温度 T 来生成和控制纠缠,这对于在固态系统中量子纠缠态的制备和参数的调整有一定的作用.

-
- [1] Bennett C H 1992 *Phys. Rev. Lett.* **69** 2881
- [2] Bennett C H, Brassard G, Crépeau C 1993 *Phys. Rev. Lett.* **70** 1895
- [3] Ekert A K 1991 *Phys. Rev. Lett.* **67** 661
- [4] Loss D, DiVincenzo D P 1998 *Phys. Rev. A* **57** 120
- [5] Qin M, Tao Y J, Hu M L, Tian D P 2008 *Sci. Chin. Ser. G* **51** 817
- [6] Wang X G 2002 *Phys. Rev. A* **66** 034302
- [7] Qin M, Tian D P, Tao Y J 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 5395 (in Chinese) [秦 猛、田东平、陶应娟 2008 物理学报 **57** 5395]
- [8] Zhou L, Song H S, Guo Y Q, Li C 2003 *Phys. Rev. A* **68** 024301
- [9] Wang X G, Fu H, Solomon A I 2001 *J. Phys. A* **34** 11307
- [10] Tian D P, Qin M, Tao Y J, Hu M L 2007 *High Energ. Phys. Nucl. Phys.* **31** 1082
- [11] Hui X Q, Chen W X, Liu Q, Yue R H 2006 *Acta. Phys. Sin.* **55** 3026 (in Chinese) [惠小强、陈文学、刘 起、岳瑞宏 2006 物理学报 **55** 3026]
- [12] Arnesen M C, Bose S, Vedral V 2001 *Phys. Rev. Lett.* **87** 017901
- [13] Qin M, Tian D P 2009 *Chin. Phys. B* **18** 1338
- [14] Gao F, Tang S Q, Xie L J, Zhan X G, Zhang D Y 2009 *Chin. Phys. B* **18** 3203
- [15] Hill S, Wootters W K, 1997 *Phys. Rev. Lett.* **78** 5022
- [16] Wootters W K 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 2245
- [17] Vidal G, Werner R F 2002 *Phys. Rev. A* **65** 032314
- [18] Peres A 1996 *Phys. Rev. Lett.* **77** 1413
- [19] Canosa N, Rossignoli R 2006 *Phys. Rev. A* **73** 022346
- [20] Schliemann J 2005 *Phys. Rev. A* **72** 012307

Multipartite entanglement in the Heisenberg XX chain with impurity^{*}

Qin Meng[†]

(*Institute of Science, People's Liberation Army University of Science and Technology, Nanjing 211101, China*)

(Received 1 June 2009; revised manuscript received 23 August 2009)

Abstract

We studied the entanglements of the Heisenberg XX chain with impurity in the presence of a uniform magnetic field along the z axes by means of negativity. Through analyzing N_{L-A} and N_{1-A} , we show that the critical temperatures for nonzero negativities depend on the impurity parameter J_1 and the magnetic field B . It is also shown that as qubit L increases, the entanglements increase when L is odd but decrease when L is even. And the entanglements of the even-qubit chains are larger than those of the odd-qubit chains. The condition is similar with $L = 3$ for N_{L-A} when qubit L is odd, but the entanglements increase with the increase of even qubit L .

Keywords: entanglement, impurity, multipartite, Heisenberg XX chain

PACC: 0367, 7510J

^{*} Project supported by the Pre-research Foundation of People's Liberation Army University of Science and Technology (Grant No. 2009JC02).

[†] E-mail: qrainm@gmail.com